JEAN PIAGET

ENSAYO DE LOGICA OPERATORIA



EDITORIAL GUADALUPE
Mansilla 3865, Buenos Aires, Argentina

Título del original francés:
Essai de logique opératoire

Traducción: María Rosa Morales de Spagnolo
Tapa: Jorge Petray y Carlos Braña

Hecho el registro que señala la ley 11.723

CONTENIDO

Capítulo II

Capítulo III

Capítulo IV

Capítulo V

Capítulo VI

Capítulo VII

Capítulo VIII

NOTA COMPLEMENTARIA *

En la introducción de la nueva edición de nuestro "Ensayo de lógica operatoria" hemos mostrado cómo tres excelentes lógicos al tratar de formalizar la estructura del "agrupamiento" habían llegado o bien a estructuras demasiado amplias, o bien a reticulados limitados por convenciones arbitrarias: de ahí la hipótesis que parecía imponerse de que el "agrupamiento" por el hecho de estar demasiado próximo a su "contenido" no podía dar lugar a una formalización diferenciada. Ahora bien, el lógico H. Wermus, especializado en problemas del transfinito, acaba de lograr esta axiomatización de los "agrupamientos", lo que es sumamente interesante, ya que constituyen sin duda una de las estructuras más simples utilizadas por el pensamiento científico.

1. Además del lenguaje lógico con igualdad $(=)$, Wermus parte de un predicado binario propio que nota $x \prec y$, denominado "sucesor inmediato". Está determinado por dos axiomas:

Ax. 1. Asimetría de $\prec$: $\forall x \forall y \ (x \prec y \Rightarrow \overline{y \prec x})$ $(=$ no $y \prec x)$.

Ax. 2. Unicidad del sucesor: $\forall x \exists y \forall z \ [x \prec y$ y $x \prec z \Rightarrow (y = z)]$.

Una teoría formal del sucesor inmediato es entonces posible, introduciendo en su lenguaje un nuevo símbolo (designado $\neg\!\vee\!\!\neg$), que reemplaza el "$\cup$" del reticulado y expresa la "unión" de próximo en próximo, propia de los "agrupamientos". Esta operación de "unión contigua" $x \neg\!\vee\!\!\neg\, y = z$ engendra el sucesor inmediato z de dos elementos contiguos x e y. De ahí un tercer axioma:

Ax. 3. $(x \neg\!\vee\!\!\neg\, y = z) \Leftrightarrow (x \prec z)$ y $(y \prec z)$.

Faltan formalizar las relaciones inversas de $\neg\!\vee\!\!\neg$, con la intención de sustraer de una clase z el complemento de x para "volver a des-

* En la última edición del "Ensayo" aparece en nota separada esta formalización del agrupamiento presentada por el lógico H. Wermus, que incluimos en la presente edición.

cender" a x. Se introduce entonces en el lenguaje de la teoría de los agrupamientos dicotómicos un símbolo "$\urcorner$" de operación binaria. Un cuarto axioma precisa su definición formal:

$$\text{Ax. 4.} \quad \forall z \forall y \quad (\exists ! x) \quad [(z \urcorner y = x) \Leftrightarrow (x \curlyvee y = z)] \quad \text{y} \quad \forall u (u \prec z \text{ y } u \neq x \Rightarrow u = y).$$

Este axioma establece la existencia y la unicidad de la "sustracción" (dicotómica) de un elemento de su sucesor.

Así se encuentra formalizado nuestro agrupamiento I (y II, ver página 131 de esta obra), es decir el agrupamiento aditivo y dicotómico de clases. De allí Wermus pasa fácilmente a los agrupamientos transitivos y multiplicativos a través de nuevos axiomas que es inútil enumerar aquí [1].

La formalización del "agrupamiento" se deduce pues de una teoría formal del "sucesor inmediato" y de la "contigüidad". Wermus encuentra, por otra parte, el posible pasaje director del "agrupamiento" a los números naturales (ver el capítulo IV de este volumen). Hay que recordar además que, según un metateorema general de la teoría de la deducción, una teoría formal no es coherente más que si, y solamente si, posee un modelo. Ahora bien, independientemente de las cuestiones psicogenéticas, el mismo es proporcionado por las clasificaciones utilizadas en la taxonomía zoológica y botánica. Las clasificaciones constituyen, en efecto, "agrupamientos" y no reticulados, ya que la operación "$\cup$" se halla restringida a los "predecesores inmediatos" de un mismo elemento [2]; dicho de otro modo, se combina la operación "$\cup$" y el predicado "sucesor" de tal modo que $x \cup y$ no puede realizarse más que si $x \cup y$ es el sucesor inmediato común de x y de y.

1 Ver su artículo sobre la formalización de los agrupamientos en los *Archives de psychologie* (Genève), 42 (1973), nº 163.

2 Una clase de elementos distantes como "la ostra y el camello" no presenta en efecto, ningún significado taxonómico, por oposición a las especies de un mismo género, a los géneros de una misma familia, etc.

J. P.

NOTA PRELIMINAR

Como nos dice Piaget en la introducción a esta segunda edición, su "Traité de Logique" aparece por primera vez en Francia en 1949, respondiendo a un pedido hecho expresamente por la Sorbonne ante la necesidad de contar con un libro de texto para sus alumnos. Sin embargo, el objetivo de Piaget al aceptar la tarea no es el de proporcionar un nuevo libro de lógica —en el sentido habitual del término— sino, como él mismo lo aclara, "mostrar esencialmente el proceso de construcción de las formas lógicas". Dicho de otro modo, el interés esencial de Piaget se centra en el *proceso de formalización de las estructuras del conocimiento mismo*, objetivo que se inscribe dentro del marco de su interés específico, que es su enfoque epistemológico-genético.

Dicho planteo lo aclara en una obra posterior "Relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real", obra que constituye precisamente la superación de sus diferencias con Beth, donde nos dice "...los trabajos acerca de los fundamentos conducen a buscar en los conocimientos lógico-matemáticos un punto de partida universal, pero, desde el punto de vista psicológico, las actividades del sujeto que hacen posible semejante análisis normativo aparecen, por el contrario, como el punto de llegada de un largo proceso genético; y una epistemología que procure conciliar estos dos aspectos de deducción normativa y de explicación genética sin caer en un círculo vicioso, apenas se podrá orientar en otra dirección que en la de una especie de dialéctica que sustituya el apriorismo estático por la idea de una construcción continua, a la vez progresiva y reflexiva..." [1].

La lógica operatoria aparece así, en primer lugar, como una respuesta al problema del círculo vicioso en que se incurre siempre al tratar de fundamentar la lógica. Ya que toda cuestión relativa a problemas de fundamentación presupone la lógica, la única manera de quebrar, mejor dicho, de ampliar sin que se vuelva vicioso sino necesario, dicho círculo, está en retroceder hasta alcanzar las etapas de la

1 PIAGET, J., BETH, E. W. "Relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real". Ed. Ciencia Nueva, Madrid, 1961. Pág. 171.

formalización misma. Análisis psicogenético que representa, a nivel lógico, la misma variación fundamental que se manifiesta entre la epistemología clásica y la epistemología genética. La filogénesis del conocimiento requiere —como lo ha demostrado exhaustivamente Piaget— para su fundamentación científica, un previo análisis ontogenético: las raíces del sujeto epistémico sólo pueden alcanzarse retrocediendo hasta las raíces de la inteligencia misma. En este análisis regresivo, Piaget se aparta tanto de todo empirismo como de todo apriorismo "...la fuente común de la razón y la experiencia —que Piaget encuentra en la coordinación general de las acciones del sujeto— supone desde el primer momento una interacción fundamental entre el sujeto (el organismo) y los objetos (el medio). No existe, pues, un marco *a priori* que contuviese de antemano todo el desarrollo, sino un punto común de origen a partir del cual se escalona una serie ininterrumpida de construcciones, y luego de reconstrucciones, peldaño a peldaño, de las estructuras esbozadas en las etapas anteriores"[1].

El proceso de formalización de dichas estructuras, es precisamente lo que constituye la lógica misma. Lo cual no supone de ningún modo un planteo de tipo reduccionista, como aclarará Piaget mismo en su Introducción "...la lógica es la axiomática de las estructuras operatorias, de las cuales la psicología y la sociología del pensamiento estudian su funcionamiento real. Existe así, entre la teoría formal y el análisis real, exactamente la misma relación que entre toda axiomática y toda búsqueda real concomitante (...): independencia completa en los métodos y correspondencia posible entre los problemas".

Dicha correspondencia es la que se evidencia precisamente a la luz del enfoque epistemológico.

De ahí que me haya parecido sumamente importante hacer hincapié en este planteo a fin de permitir la ubicación de la obra, desde un comienzo, en su contexto adecuado.

Lo que se encontrará en ella es pues una epistemología de la lógica, pero una epistemología basada en un planteo genético, lo que hace que adquiera una triple dimensión:

1) Desde el punto de vista estrictamente lógico, opone la necesidad de la determinación de las estructuras de conjunto al punto de vista atomístico de la lógica formal, así como sustituye el punto de

1 Ibid., págs. 351-352.

vista estático basado en la identidad vacía, por la dialéctica interna a la reversibilidad misma del pensamiento. En este sentido, Piaget nos mostrará cómo el principio de no-contradicción de la lógica clásica representa sólo una de las manifestaciones, pero no la única, de la reversibilidad inherente a la razón misma.

2) Desde el punto de vista psicopedagógico, el análisis lógico de las estructuras del conocimiento, permite la comprensión de los distintos niveles de equilibrio logrados por el sujeto, con las consecuentes derivaciones en el plano psicogenético y didáctico.

3) Finalmente, desde el punto de vista epistemológico, muestra una vez más, como toda la obra de Piaget, la necesidad de una toma de conciencia de un replanteo radical en las cuestiones epistemológicas: "...hay un hecho histórico que acaso epiloguen nuestros biznietos, y es el de que aún en pleno siglo XX, los filósofos que se ocupan del sujeto cognoscente no siempre advierten que existe una psicología científica". Luego de la constitución del Centro Internacional de Epistemología Genética, y de la acabada demostración de la naturaleza interdisciplinaria de la epistemología contemporánea, no se justificaría de ningún modo que siguiésemos sentándonos "entre dos o tres sillas" como no tuvo más remedio que hacerlo Piaget en 1947-49.

María Rosa Morales de Spagnolo

INTRODUCCION
A LA SEGUNDA EDICION

Si en 1947 se dirigieron a mí para escribir un "Tratado de Lógica", fue simplemente porque los autores mejor calificados no quisieron, en esa época, asumir semejante riesgo. Por mi parte, debido a las necesidades de la epistemología genética a la cual comenzaba a consagrarme, había escrito en 1942 una pequeña obra sobre "Clases, relaciones y números" que contenía precisamente un comienzo de análisis lógico sobre la constitución de esas estructuras. Acepté pues encargarme de dicho "Tratado", pero precisando mis intenciones bajo el subtítulo de "Ensayo de Logística Operatoria", y tratando de mostrar esencialmente el proceso de construcción de las formas lógicas.

Semejante ensayo fue recibido por los especialistas con sentimientos diversos, lo que obliga a explicar, por una parte, por qué algunos de ellos se han reservado algunas cosas hasta esperar la aparición de una segunda edición, y, por otro lado, por qué el lógico J. B. Grize, que ha tenido a bien encargarse de esta reedición, ha testimoniado su devoción y su amistad hasta asumir la ingrata tarea de revisar la presentación.

El problema que ha originado este ensayo es pues el de comprender cómo se constituyen las estructuras elementales de clases, relaciones, números, proposiciones, etc., formalizadas con absoluta independencia por el lógico, como así también, determinar sus relaciones con las "operaciones" del pensamiento "natural", mucho más pobre y no formalizado. Sostener como algunos que el problema no se plantea, es olvidar que la aritmética de los matemáticos forma parte de los números "naturales", construidos antes que cualquier teoría, y que, según la opinión unánime de los lógicos, el número presenta cierto parentesco con las clases y las relaciones. Es olvidar igualmente, que Aristóteles extrajo la silogística de una reflexión sobre el pensamiento común, y que su toma de conciencia pudo haber sido incluso mucho más completa si hubiese advertido, en los mismos razonamientos

espontáneos, la existencia de una lógica natural de relaciones, así como la clase vacía, etc. Por otra parte, los trabajos actuales sobre los límites de la formalización muestran suficientemente que más allá, y, por consiguiente, más acá de esta formalización, existen realidades "intuitivas" respecto de las cuales es necesario averiguar sus relaciones con las estructuras formalizadas, por más fuertes que hayan llegado a ser estas últimas.

Ahora bien, al ser el problema general que se plantea la epistemología genética precisamente el tratar de alcanzar la naturaleza de los conocimientos en función de sus mecanismos de formación, es evidente que deberíamos haber incluido en ese programa el análisis de la constitución de las estructuras lógicas. En efecto, después de haber sido fundado en Ginebra, en 1952, un Centro Internacional de Epistemología Genética, estos trabajos han sido esencialmente interdisciplinarios: lógicos, matemáticos, cibernéticos, etc., colaboran allí con psicólogos y biólogos, de tal manera que, si nuestro mal llamado "Tratado de Lógica" hubiese visto la luz diez años más tarde, habría sido forzosamente obra de un equipo. Pero en 1947-49, yo era el único responsable de semejante empresa; su naturaleza interdisciplinaria me obligó pues a tratar de sentarme entre dos e incluso tres sillas.

Las reacciones de los especialistas fueron así principalmente de dos clases: Unos aprobaron el proyecto de subordinar el estudio de las operaciones lógicas a la búsqueda de estructuras de conjunto y admitieron la idea de que, si éstas existen, es legítimo buscar sus raíces en aquellas de donde proviene el pensamiento "natural"[1]. Pero queda por resolver en este caso, el problema, no superado todavía, de la formalización de las etapas intermedias, pues, si bien es posible axiomatizar las grandes estructuras alcanzadas, tales como los grupos o los reticulados, etc., la cuestión permanece abierta aún en lo que concierne a las etapas anteriores, como por ejemplo la estructura de "agrupamiento", sobre la cual volveremos. Otros lógicos, por el contrario, no vieron ningún interés en suscitar los problemas que planteábamos, y se limitaron a señalar los defectos resultantes de la poca formalización de nuestro ensayo. En compensación, experimentamos

1 Precisemos además que las leyes de las estructuras "naturales" escapan, en general, a la conciencia del sujeto: expresan lo que él sabe "hacer" en el momento de la solución de un problema cualquiera, y no lo que él piensa de manera reflexiva.

una inmensa satisfacción al poder convencer a uno de estos adversarios, el gran lógico E. W. Beth —luego de un artículo particularmente severo de su parte— de escribir en colaboración una obra titulada "Epistemología matemática y psicología"[1], donde pudimos finalmente llegar a un acuerdo sobre la necesidad de "cierta coordinación entre la lógica y la psicología" (Conclusions communes, p. 325).

Conviene pues ahora delimitar con precisión qué es lo que se encontrará y qué es lo que no se encontrará en la presente obra. La idea central es que la formalización no constituye un estado sino un proceso, y que, en consecuencia, se fundamenta en las estructuras que se van elaborando paulatinamente en cada nivel. Al tratar entonces de determinar las más elementales, pero que permitiesen naturalmente un juego de composiciones necesarias o inferencias válidas, las encontramos en las operaciones de clasificación y de establecimiento de relaciones, que representan el nivel más simple de la lógica de clases y de relaciones: tal como se encuentran, por ejemplo, en ciertas disciplinas descriptivas como la zoología o la botánica sistemáticas, las que volvemos a encontrar en las relaciones genealógicas, o las que el estudio del desarrollo del pensamiento ha puesto en evidencia en el momento en que se constituyen las primeras "operaciones".

Ahora bien, al analizar tales estructuras se encontró que no constituían aún "reticulados", como los que testimonia el álgebra de Boole, fundamento de la lógica proposicional, así como de una lógica completa de clases: en efecto, una clasificación no procede sino por encajes de próximo en próximo (o "contiguos"), y no presenta ningún "conjunto de las partes" o como es el caso de la combinatoria proposicional. Esta falta de movilidad excluye igualmente que se reduzca la clasificación a un grupo. No obstante, se pudo encontrar, al igual que en las seriaciones o en las estructuras multiplicativas correspondientes, ciertos caracteres constantes de composición que permitieron hablar de una estructura de conjunto, ya muy generalizada a nivel del pensamiento "natural" precientífico, así como en las disciplinas simplemente descriptivas. La designaremos con el nombre de "agrupamiento".

1 Estudios de epistemología genética. XIV. París, P.U.F., 1961.
Publicado en castellano bajo el título de "Relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real", Ed. Ciencia Nueva, Bs. As. 1969. (Nota de la T).

Pero, pese a que el "agrupamiento" se halle tan próximo a su contenido cualitativo (de ahí su interés para quien busca lo elemental, y su falta de interés para quien quiera alcanzar de entrada lo general), su análisis ha conducido no obstante, a dos tipos de resultados imprevistos. El primero se refiere a las relaciones entre el número entero, las clases y las relaciones asimétricas transitivas. En efecto, como trataremos de mostrar, dos de los ocho agrupamientos cualitativos posibles (el de las inclusiones simples y el de las seriaciones), pierden sus caracteres limitativos y se fusionan necesariamente en un solo sistema, al hacer abstracción de las cualidades distintivas que caracterizan a sus elementos individuales: puede extraerse así de esta fusión la serie de los números enteros por síntesis de la inclusión y del orden. De este modo, es posible alcanzar el mecanismo constitutivo de los números "naturales" sin hacer referencia más que a componentes lógicos, evitando así las dificultades del reduccionismo de los *Principia Mathematica:* en efecto, la operación de biyección que Whitehead y Russell introducen en las clases, contiene ya el número, puesto que hace abstracción de las cualidades distintivas inherentes a los individuos de las clases, mientras que las correspondencias bi-unívocas que intervienen en los agrupamientos elementales, no relacionan entre sí más que los términos que poseen las mismas cualidades (ver Cap. IV).

Un segundo resultado sugerido por el estudio de los agrupamientos es el hacer comprender cómo, a partir de los encajes de próximo en próximo, la generalización de ciertas operaciones que llamaremos "vicariancias", conduce a esa clasificación de todas las clasificaciones (o a la segunda potencia), que constituye la combinatoria y con ella al "conjunto de las partes". Se tratará pues, de hecho, del pasaje de los agrupamientos a los reticulados, y en consecuencia, a la estructura en que se fundamenta la lógica usual. Pero aún hay más, pues al componer las inversiones N (ya existentes en los agrupamientos de clases), las reciprocidades R (existentes en los agrupamientos de relaciones), las correlativas C (o inversas de las recíprocas) y la transformación idéntica I, se encuentra un grupo conmutativo de cuaternalidad tal que $RN = C$; $RC = N$; $NC = R$ y $NRC = I$. Ahora bien, para quien tema las consideraciones sobre el pensamiento "natural" en lógica, puede ser interesante señalar que nosotros habíamos constatado ya la existencia de este grupo en el seno de las operaciones proposicionales antes de 1949 (creyéndolo ya conocido), es decir en

un momento en que los lógicos no habían comenzado aún a preocuparse.

Dicho esto, se plantea un problema interesante en lo que concierne a la formalización del agrupamiento. O bien se procede (como Grize, 1960) a dar ciertos postulados, pero provistos de reglas limitativas de aplicación, o bien se llega a una estructura demasiado rica, que remite al reticulado y no ya al agrupamiento con sus restricciones. Ahora bien, estas dificultades son muy significativas, tanto si pudiese alcanzarse un día dicha formalización, pero mucho menos fácilmente que como se ha podido formalizar los reticulados y los grupos, como si las resistencias encontradas permaneciesen insuperables. En ambos casos, hay en ello en primer lugar una confirmación de que la formalización constituye un proceso y no una situación adquirida independientemente de los niveles considerados. En segundo lugar, parecería indicar que cuanto más cercana se halla una estructura de su contenido cualitativo, tanto más difícil resulta su formalización. Se sabe, en efecto, que el mismo Frege, en un texto impresionante, reveló haber fracasado al tratar de constituir una lógica de los contenidos [1]. De un modo general, como veremos más adelante, las formas y los contenidos permanecen siempre relativos, toda forma no es tal sino en relación a cierto contenido, y al mismo tiempo ella a su vez pasa a ser contenido respecto de formas de rango superior. Las dificultades encontradas en lo que concierne al agrupamiento, pueden interpretarse pues como una razón más para considerar dicha estructura como suficientemente elemental, de ahí su poca movilidad (lo que la priva de la generalidad de las estructuras de rango superior que interesan al lógico clásico y al matemático) y su resistencia a la formalización. No obstante, nos ha parecido interesante estudiar semejante estructura y precisamente a causa de sus mismas lagunas, puesto que constituye un término de transición suficientemente estable y muy corriente entre las operaciones del pensamiento natural y las que formaliza la lógica. En efecto, del mismo modo que es posible interesarse en los "semigrupos", etc., dicha estructura constituye a la vez un conjunto de semi-reticulados y un grupo incompleto. Respecto del grupo, el agrupamiento posee en común una reversibilidad completa, así como la operación idéntica general y única, pero como estas operaciones com-

1 Frege, 1962, Einleitung.

prenden también tautificaciones, la asociatividad no es sino parcial. En cuanto a los reticulados, dejando de lado la reversibilidad que es mucho más fuerte que las complementariedades propias de los reticulados complementados, pueden verse no obstante en los agrupamientos semi-reticulados, por la razón esencial de considerar aparte las operaciones aditivas ($+$, $\cup$ ó $\vee$) y multiplicativas ($\times$, $\cap$ ó $\cdot$), de ahí la ausencia de un "conjunto de las partes", la limitación del número de las "fronteras" (presencia de "supremum" sin presencia general de "infimum" o viceversa), y una composición por simples encajes de próximo en próximo. Si uno se interesa sólo en estructuras "generales", este tipo de composición no presenta ningún valor, y la tendencia comprensible de todo axiomatista, sería eliminar estas restricciones para llegar ya fuese a un grupo o a un reticulado, lo que resulta bastante fácil. Por el contrario, si lo que se busca es lo "elemental" a fin de alcanzar las relaciones entre las operaciones "naturales" y las estructuras formalizables, es deber de todo analista establecer hasta dónde pueden conducir dichas composiciones. Ahora bien, el hecho de que puedan conducir no solamente a los reticulados complementados, sino incluso como ya dijéramos, a los números naturales por síntesis de la inclusión y el orden, así como el grupo *INRC* por composición de las inversiones y las reciprocidades, parece justificar desde ya tal estudio.

Hemos tratado además de establecer (Cap. VI) lo que resultaría de la aplicación de las reglas ordinarias del agrupamiento, dentro del conjunto de las operaciones interproposicionales, pero considerando como directa una operación aditiva ($\vee p$) y como inversa una multiplicativa ($\cdot \bar{p}$). Como es lógico suponer, el agrupamiento abarca, en este caso, todas las combinaciones del "conjunto de las partes", pero es interesante mostrarlo, pues en el detalle de las combinaciones posibles se reencuentra el equivalente proposicional de los agrupamientos de clasificación y seriación, lo que establece lazos aún más estrechos entre nuestras estructuras elementales, pero limitadas, y la estructura final del reticulado complementado.

Queremos finalmente expresar todo nuestro reconocimiento a J. B. Grize, quien tuvo a bien encargarse de esta reedición utilizando especialmente un simbolismo más conforme con el uso de los lógicos que aquél con que nos habíamos contentado con nuestras preocupaciones más constructivistas que formalizantes. El lector le estará agradecido,

y si nuestro colega ha renunciado a formalizar él mismo el "agrupamiento", es por las razones ya indicadas, que se derivan de esa situación excepcional de una estructura que en tanto "natural" permanece muy próxima todavía a su contenido cualitativo: ahora bien, repitámoslo una vez más, esto supone de hecho un problema de interés general, y cualquiera que fuese su solución futura, será igualmente instructiva respecto de las relaciones, cada vez menos desdeñables, entre el pensamiento "natural" y las exigencias siempre crecientes del formalismo mismo.

JEAN PIAGET

Mayo 1970.

OBJETO Y METODOS DE LA LOGICA

Cada uno reconoce actualmente la validez de un axioma o de un teorema de lógica, independientemente de las ideas que puedan tenerse sobre esta misma lógica considerada en tanto disciplina general. Semejante hecho muestra que la lógica ha adquirido el rango de ciencia propiamente dicha, gracias a los métodos precisos que han reemplazado los procedimientos simplemente reflexivos y verbales de la lógica clásica. Pero, como ocurre en todas las ciencias, incluidas las ciencias deductivas, el acuerdo cesa de ser completo no bien se trata de la significación a dar a los principios, o incluso del objetivo a alcanzar y de los métodos a seguir. Es por ello, cosa paradojal, que es necesario anunciar de qué se va a hablar, cuando se emprende la tarea de escribir un *Ensayo de lógica,* así como es indispensable precisar qué métodos se tendrán en cuenta.

En verdad, se podría, no sin buenas razones, invertir el orden de presentación: comenzar *in medias res,* luego una vez terminada la exposición de los resultados, preguntarse qué es la lógica y concluir por una discusión de los principios. Pero, sin tener en cuenta que una Introducción es sobre todo una toma de posición en relación a los trabajos de los antecesores de los cuales se es deudor, incluso en aquellos puntos en que uno se aparta de ellos, es esencial insistir en el hecho de que la interpretación de los principios de la lógica pertenece a los mismos lógicos. Pero, esa no es precisamente la opinión unánime. "No se les pide a los matemáticos —escribe Ch. Serrus[1]—

1 SERRUS, 1945, pág. 71. Los nombres propios seguidos de un milésimo remiten a la bibliografía situada al final de la obra.

que discutan los principios de las matemáticas, sino sólo que los establezcan. Una ciencia se justifica en la medida que se hace, y la lógica no es otra cosa que una ciencia, la ciencia positiva de las leyes del pensamiento". No obstante, como es bien sabido, los matemáticos reivindican vigorosamente, y con razón, el derecho de investigar con toda autonomía los "fundamentos" de su ciencia, y así ocurre actualmente con toda disciplina. Un derecho igual debe pues estar reservado al lógico, aunque más no sea para determinar su dominio en relación al de la epistemología (Serrus querría remitir a ésta toda cuestión acerca de la "significación de la lógica"). Por otra parte, ¿es cierto que la lógica sea la "ciencia positiva de las leyes del pensamiento"? Los lógicos de la Escuela de Amsterdam responderían que se trata en realidad de las leyes de la "comunicación", y los del Círculo de Viena dirían que los principios lógicos son las reglas de una "sintáxis". Si bien estamos de acuerdo en que la lógica conduce sobre el pensamiento mismo, falta todavía que el programa de una "ciencia de las leyes del pensamiento" converja con el de una parte de la psicología, que es la psicología del pensamiento. Incluso entonces, es preciso establecer las relaciones en juego y sobre todo delimitar las fronteras, que, para algunos autores, coinciden con las de lo normativo y lo constativo.

A todo ello, se agrega una razón fundamental para precisar la posición propia de la lógica: es que las estructuras lógicas constituyen el único instrumento común de demostración utilizado por todas las ciencias (además de sus instrumentos particulares). Cuando el matemático construye un sistema de números o una geometría, sin preguntarse por anticipado qué es el número o la vecindad espacial (sin que por eso no pueda reflexionar luego sobre ello en una teoría de los "fundamentos"), tiene derecho a proceder así, puesto que se basa en un cuerpo de verdades previas (incluso si las diferencia a su modo), que son las verdades lógicas mismas. Pero, quien quiera analizar éstas sistemáticamente está obligado a basarse en alguna cosa, aunque más no sea la evidencia del pensamiento reflexivo (en la medida en que la misma sea reconocida por otros), o sobre las necesidades de la comunicación, etc., o incluso en los razonamientos considerados como válidos por otras ciencias (a riesgo de encerrarse en un círculo...); o no basarse en nada, pero explicando por qué y justificando ese apriorismo. Es evidente que existirá siempre un círculo:

no es posible construir la lógica mas que por medio de razonamientos lógicos, admitidos de una u otra forma (intuitivamente, etc.). Pero toda la cuestión estriba en saber si es preciso volver a trazar este círculo, a riesgo de volverlo vicioso, o si es posible ampliarlo, de modo de volverlo solidario del sistema circular de las ciencias en su conjunto [1].

Ahora bien, si se comienza sin más en plena lógica proposicional, como se ha vuelto usual (inspirado en el procedimiento de construcción directo de las matemáticas), se choca precisamente con dificultades insuperables respecto de la posición de la lógica en relación a las demás ciencias. Se comienza por mostrarnos que dos proposiciones cualesquiera p y q consideradas, ya sea como verdaderas o como falsas, dan entre sí 16 combinaciones posibles; que tres proposiciones corresponden a 256 combinaciones, etc. Pero, ¿por qué esos números? ¿A causa de la fórmula 2^{2^n}? En este caso, se plantean dos cuestiones: ¿cómo se hace para que cada combinación numéricamente distinta presente una significación lógica diferente, y sobre todo, por qué basar la lógica sobre un análisis combinatorio presentado como *a priori*, mientras que el cálculo matemático de las combinaciones implica él mismo toda la lógica? ¿No existen otras vías más naturales?

El problema está entonces en saber qué es "natural" para el desarrollo de la teoría lógica, y nos vemos aquí reconducidos a las discusiones del principio. Que la lógica moderna tienda a ser "pura", es decir exclusivamente formal, es algo en que todos estarán de acuerdo. Pero es posible preguntarse, y el ejemplo de las combinaciones proposicionales nos muestra de entrada el sentido del problema, si es lícito instalarse directamente en pleno formalismo en una ciencia que constituye el análisis de las condiciones previas de toda demostración deductiva, es decir precisamente de toda formalización, o si el mejor método para alcanzar lo formal en sus aspectos más significativos, no sería el de seguir las etapas de la formalización lógica misma: se trataría entonces de partir del suelo para dirigirse al techo (lo que evita entre otras cosas la necesidad de postular la unidad de ese techo), en lugar de suspender los niveles inferiores a los niveles superiores de la construcción.

1 Para el Círculo de las Ciencias, ver PIAGET, 1950, t. III y PIAGET, 1967, págs. 1151 y siguientes.

§ I. EL OBJETO DE LA LOGICA.

Hay un punto en el cual todos los lógicos, cualquiera fuese su escuela, se hallan de acuerdo: que el análisis lógico se refiere a enunciados susceptibles de verdad o falsedad, o, dicho de otro modo, que el objeto de la lógica es relativo a lo verdadero y a lo falso. Ya se trate de lógica normativa (arte de pensar bien o codificación de las reglas de verdad), de lógica reflexiva (o análisis del pensamiento considerado como verdadero), de logística con matices platónicos, nominalista o fisicalista, cada una se refiere siempre a la distinción entre lo verdadero y lo falso. Se podría decir pues, en una primera aproximación, que la lógica es el estudio del conocimiento verdadero, considerado en sus formas más generales.

Pero los conocimientos verdaderos, bajo sus formas particulares, nos remiten a otras ciencias distintas de la lógica, y el estudio de los diversos tipos de conocimiento científico constituye el objeto de la epistemología; se tratará entonces, en primer lugar, de delimitar los campos respectivos de la epistemología y de la lógica, y luego, de la lógica y las demás ciencias diferenciadas. Ahora bien, respecto del primer problema el acuerdo dista de ser general, y todas las posiciones han sido sostenidas, desde la absorción de la lógica dentro de la epistemología, o la inversa, hasta todos los modos concebibles de repartición. La opinión más sostenida, que nosotros aceptaremos aquí, se basa sin embargo en una distinción entre dos puntos de vista posibles sobre el conocimiento, distinción que cada uno está obligado a tener en cuenta, pese a la diversidad de expresiones que lo designan. Puede estudiarse, en efecto, el conocimiento ya sea como una relación entre el sujeto y el objeto, o bien como forma pura, es decir referido exclusivamente (más adelante precisaremos el sentido de esta exclusividad) a ciertas actividades del sujeto que implican la distinción entre lo verdadero y lo falso (los enunciados proposicionales, por ejemplo, o las "leyes" del pensamiento, sus operaciones, etc.). Convendremos pues, en llamar *epistemología* al estudio del conocimiento en tanto relación entre el sujeto y el objeto, y reservaremos el nombre de *lógica* para el análisis formal del conocimiento.

Es posible, en efecto, construir una teoría de las relaciones entre el sujeto cognoscente y los objetos dados en la experiencia, y es a esta teoría a la que se le da habitualmente el nombre de teoría del

conocimiento o epistemología. Pero, la historia muestra que si se plantea tal problema bajo su forma general, al tratar de alcanzar la relación entre el sujeto y el objeto considerado como definitivo (en sí y *a priori* o *a posteriori* en el conocimiento constituido), se llega a epistemologías múltiples e irreductibles entre sí, solidarias casi siempre de una metafísica del espíritu o del mundo exterior (o ambas conjuntamente). Es posible, por el contrario, como hemos tratado de justificarlo anteriormente en otra parte [1] construir una epistemología positiva, reduciendo el problema a este planteo más limitado: ¿cómo crecen los conocimientos? Bajo este ángulo genético e histórico-crítico todos los problemas de la epistemología clásica se vuelven así abordables, pero en términos de acrecentamiento y no ya desde un punto de vista estático.

Ahora bien, ya sea en esta forma restringida como en su forma general, la epistemología considera siempre el conocimiento tanto desde el punto de vista del objeto como del sujeto. Incluso cuando se ocupa de las matemáticas bajo su forma axiomatizada, o de relaciones lógicas puramente formales, la epistemología se ve sin cesar reconducida a la cuestión de las relaciones entre el sujeto y el objeto: su problema propio en lo concerniente a las ciencias deductivas, es comprender cómo son posibles la lógica y las matemáticas no sólo en tanto actividades del sujeto, sino también en su adecuación a lo real. Ahora bien, dicho planteo es mucho más amplio que el problema lógico, el cual se limita únicamente a la validez interna de los sistemas proposicionales, es decir a la manera en que una proposición implica o excluye otras. La epistemología supone pues resuelto el problema lógico, pero la recíproca no es válida. Incluso una epistemología puramente apriorística acompañada de la metafísica más idealista, está obligada a proporcionar una teoría de la experiencia y a explicar el acuerdo entre los marcos, supuestos *a priori*, y los datos sensibles. La lógica, por el contrario, estudia simplemente la manera en que los datos son enunciados por proposiciones y cómo éstas se encadenan entre sí: se refiere pues a un dominio que permanece interior a la actividad del sujeto. Incluso si estos datos sensibles son relativos, desde el punto de vista epistemológico, a una interacción entre el objeto y las actividades del sujeto, y aún cuando estas proposiciones expresen operaciones, es decir (epistemológicamente hablando) acciones del

1 Piaget, 1950. Piaget, 1957.

sujeto ejercidas sobre el objeto, la lógica no se ocupa más que de la sistematización y coherencia internas de esas operaciones y no de sus relaciones con el objeto como tal. Es en este sentido que la lógica permanece referida exclusivamente a las actividades del sujeto, y no se ocupa de sus interacciones con el objeto, las cuales conciernen pues sólo a la epistemología. Esto no significa de ningún modo que la lógica niegue (ni tampoco que no afirme), la existencia epistemológica del objeto, sino que aún cuando las operaciones, de las cuales estudia su coherencia interna, se efectúen sobre objetos exteriores cualesquiera, la lógica no tiene por qué considerar su intervención [1].

Es necesario precisar pues que lo verdadero y lo falso de que se ocupa la lógica, constituyen únicamente una verdad y una falsedad formales. Se distingue en efecto, una verdad real o acuerdo de las proposiciones con la experiencia, y una verdad formal o acuerdo de las proposiciones entre sí. La verdad real concierne a la metodología de las ciencias experimentales, mientras que la verdad formal es el objeto de aquella disciplina que se ha llamado "lógica formal", desde que se designó como "lógica aplicada" el estudio de los métodos propios de las demás ciencias. No hablaremos pues de *lógica formal*, sino que, siguiendo el uso actual, la denominaremos simplemente *lógica*. En efecto, la metodología no forma parte de la lógica, y nada es más equivocado que el término de lógica aplicada, cuando se lo utiliza para caracterizarla. Hay en esto tres buenas razones. La primera es que histórica y genéticamente la así llamada lógica aplicada ha precedido siempre a la lógica formal. En efecto, se comienza por razonar sobre lo real, luego de lo cual solamente es posible preguntarse (una vez organizadas las operaciones intelectuales, y elaboradas suficientemente sus estructuras de conjunto) cómo se razona. La lógica es pues el producto de una reflexión y una formalización retrospectivas, y no un código elaborado ya antes de sus aplicaciones. Cuando Aristóteles intentó una primera formalización de la lógica las matemáticas existían ya, y él mismo había tratado previamente de comprender el universo y de clasificar los seres vivos. En segundo

1 GONSETH, 1937, caracterizó la lógica como, entre otras cosas, una "física del objeto cualquiera". Esta acentuación fisicalista va demasiado lejos. Se trata de *operaciones* sobre el objeto cualquiera. El hecho que resulten exitosas en su aplicación a lo real, y que dicho éxito baste para constituir una física, es un problema epistemológico y no lógico.

lugar, si la lógica ha llegado a ser una ciencia positiva desde que posee sus propios algoritmos, puede ser aplicada a las matemáticas, e incluso a la física o la biología, etc., del mismo modo que las matemáticas se aplican a las demás ciencias, y como la física y la química se aplican a la biología. Pero estas aplicaciones no deben confundirse con la metodología de las ciencias interesadas: consisten sólo en una integración de las fórmulas lógicas en las teorías axiomatizadas de las ciencias deductivas, en su utilización cuando se trata de expresar en términos cualitativos lo que no puede ser medido (provisoria o definitivamente), o en la construcción de modelos diversos [1]. En tercer lugar, y sobre todo, la metodología es asunto de los especialistas de cada ciencia pues ¡para poder tratar fructíferamente los métodos, la condición *minimum*, no así suficiente, pero seguramente necesaria, es haberlos practicado y vivido! La falta de reconocimiento de esta evidencia ha sido la causa precisamente de que las lógicas de la "inducción" se hayan mantenido hasta sus últimos tiempos, tan asombrosamente inadecuadas; comenzando con la de F. Bacon, sobre cuyo valor los filósofos mismos no han llegado a un acuerdo, y continuando con los *canons* de J. Stuart Mill, que si bien constituyen excelentes sujetos de disertación, su rendimiento efectivo no ha igualado en lo más mínimo su éxito escolar.

Ahora bien, una vez que los procedimientos metodológicos de las distintas ciencias hayan sido analizados por los especialistas mismos, es natural que interesen, desde el más alto punto de vista, a la epistemología y la lógica. Sólo desde el primero de estos dos puntos de vista, interesa sobre todo la metodología, ya que ella desnuda precisamente las relaciones vivas y variables que relacionan el sujeto a los objetos. La lógica, por el contrario, no toma de los datos metodológicos más que aquellos elementos que interesan a la formalización gradual del saber, a partir de los puros enunciados de los hechos hasta la constitución de una teoría coherente, sin ubicarse desde un ángulo histórico o genético, sino permaneciendo en el terreno de la formulación en cuanto tal.

En síntesis, lo verdadero y lo falso no son para la lógica más que la verdad formal y la contradicción entre los enunciados proposi-

1 En psicología, por ejemplo, es posible describir mediante símbolos logísticos ciertos mecanismos de la inteligencia e incluso de la percepción, independientemente de la medida.

cionales. La lógica no tiene que establecer de ningún modo una teoría de la experiencia. Parte, lo que es exacto, de los enunciados más simples posibles y más próximos a los datos; pero no es ella quien decide si una proposición es verdadera o falsa en relación a los hechos: recibe simplemente, a título de simples *datos*, un cierto número de *enunciados*, calificados unos de verdaderos, otros de falsos, y su trabajo específico comienza con la composición formal de estos enunciados, verdaderos o falsos por hipótesis. Muestra por lo tanto, y tal es exclusivamente su rol, cómo estos enunciados combinados entre sí llegan a consecuencias formalmente necesarias o a contradicciones, según se respeten o no ciertas estructuras formales de composición. Es en este sentido que la lógica se interesa sólo en la forma pura sin ocuparse del objeto mismo, el cual concierne a las ciencias experimentales y a la epistemología.

Pero, conviene determinar ahora en qué consiste esta "forma", es decir de qué es ella forma. Una cuestión preliminar es saber si se trata de una forma normativa, es decir de un conjunto de reglas y valores reglados, o si se trata de una estructura sujeta a leyes necesarias y no a imperativos. Ambas opiniones han sido sostenidas. Para unos, como A. Lalande, la lógica es esencialmente una disciplina normativa, ya que se refiere a lo verdadero y lo falso que son valores reglados, y puesto que lo verdadero se impone necesariamente al espíritu no como una ley natural o psicológica, sino a la manera de una regla moral. Para otros, por el contrario, como los nominalistas vieneses, las composiciones formales a que conduce la lógica constituyen una estructura, idealizada y esquematizada es cierto, pero cuyas transformaciones son accesibles a un cálculo que da lugar a las mismas constataciones mentales que toda combinatoria.

En realidad, ambas tesis corresponden a dos puntos de vista posibles (y por otra parte, complementarios) sobre la lógica, y conciernen a su significado epistemológico sin afectar su técnica. Son pues aceptables simultáneamente, toda proposición lógica puede expresarse así alternativamente en el lenguaje normativo de la regla, y en el lenguaje constativo de la ley. Sean en efecto, dos proposiciones p y $\overline{p}$, verdadera y falsa en virtud de una construcción formal. Pueden, a este respecto, emplearse los términos de "verdadero" y "falso" y colocarse así desde un punto de vista normativo: por ejemplo la proposición p "Ginebra está en Francia" es falsa. Pero pueden también

considerarse p y $\bar{p}$ como proposiciones positivas y negativas, y leer $\bar{p}$ como "Ginebra no está en Francia", lo que permite permanecer constantemente en lo verdadero. El principio de no contradicción significará entonces simplemente que ningún término puede pertenecer a la vez a una clase dada (por ejemplo, las ciudades de Francia) y a su complementaria (las ciudades no situadas en Francia). Hablaremos así en algunos casos de proposiciones verdaderas o falsas, y en otros, de proposiciones positivas y negativas, quedando en claro que toda composición formal es pues reducible a una misma estructura abstracta, ya se trate de valores reglados (verdad y falsedad), o de simples relaciones combinatorias (positivas o negativas).

Pero, ¿de qué es la estructura? Dicho de otro modo, ¿de qué constituyen las "formas" lógicas reglas o leyes? Una primera solución consiste en considerarlas como el conjunto de coordinaciones propias de un lenguaje bien formado. Es la opinión común del Círculo de Viena que interpreta la lógica como una pura sintáxis, y de la Escuela de Amsterdam que ha hecho de ella un sistema de "comunicaciones" (insistiendo en particular sobre las "significaciones"). El matiz epistemológico propio de tales interpretaciones consiste seguramente en poner el acento sobre el conocimiento, ya sea experimental o intuitivo, respecto del cual las estructuras formales constituirían simples enunciados combinables entre sí. Pero, incluso al reducir las formas lógicas al rango de puros signos, subsiste aún el hecho de que un signo implica siempre un significado, y que el mismo juego formal, independientemente de toda referencia a su contenido, es un sistema de significaciones precisas, ya que contiene valores verdaderos y falsos (o positivos y negativos). Sería pues enteramente tautológico teniendo en cuenta su contenido, ya que un sistema de combinaciones formales engendra por lo menos tantas significaciones como combinaciones diferentes, y puesto que operar sobre los signos equivale igualmente a operar sobre las significaciones, es decir a componer las operaciones intelectuales. La interpretación nominalista de la lógica no concierne así más que a la epistemología de las estructuras lógicas sin empobrecerlas en nada en tanto relativas a las actividades del sujeto; tales estructuras contienen pues a la vez signos y operaciones de inferencia que se aplican a estos signos para conferirles significaciones relativas a sus mismas combinaciones.

De ahí la segunda interpretación posible: las estructuras lógicas

expresan las leyes del pensamiento. No se trata naturalmente de leyes causales ni temporales sino de aquellas que regulan las actividades del sujeto y que son susceptibles de engendrar relaciones verdaderas o falsas. ¿Qué son pues estas actividades si no se trata ya de un puro lenguaje? Un sistema de proposiciones contiene dos tipos de estructuras: las relaciones internas entre los términos contenidos en la proposición y las relaciones externas entre las proposiciones mismas. Si convenimos en llamar "operaciones" las actividades intelectuales que componen o descomponen tales relaciones, puede considerarse entonces que las estructuras lógicas expresan las operaciones del pensamiento.

La lógica sería así, en una segunda aproximación, la teoría formal de las operaciones del pensamiento. Pero dos problemas se plantean entonces: el de los límites entre la lógica y la psicología o la sociología, que se ocupan también de las operaciones del pensamiento (ver § II) y, sobre todo, el de las fronteras a trazar, o a suprimir, entre la lógica y las matemáticas, las que constituyen a su vez estructuras operatorias cada vez más diferenciadas (ver § III). Hechas estas dos reservas, puede considerarse que la definición abarca bien todo el programa de la lógica clásica como de la moderna. Allí donde aquella conducía sobre enunciados verbales —resultados estáticos de las operaciones mismas— ésta ha llegado a ser esencialmente cálculo. Ahora bien, el cálculo expresa las operaciones como tales, y por más refinada que pueda ser su axiomatización, los axiomas no describen en resumidas cuentas más que el juego de ciertos "operadores" fundamentales. Ciertamente, en su afán de impulsar al *maximum* el formalismo, la lógica moderna tiende a reducir, en la medida de lo posible, no solamente toda mención al contenido del pensamiento sino también a los datos psicológicos cualesquiera que fuesen; en efecto, estos últimos arriesgarían introducir un elemento intuitivo en el seno de un mecanismo formal que se trata de purificar tanto como se pueda.

Es por ello que, bajo la doble influencia de las corrientes nominalistas y la necesidad de la formalización, la lógica ha llegado a menudo a no emplear ninguna expresión extraída de un dominio exterior al discurso mismo; esto permite entonces a ciertos lógicos aparentar ignorar el concepto de pensamiento y atenerse a lo que podría llamarse una especie de lógica del comportamiento (por analogía con la psicología del mismo nombre, la cual quiso reducir también el pensamiento al lenguaje, antes de descubrir sus relaciones con la

acción). Pero es precisamente al seguir este camino como se llega mejor a poner en evidencia el papel irreductible de los operadores. Que se trate de operaciones-acciones o como se dice a veces de "manipulaciones", o de operaciones-pensamientos, es asunto que importa a la psicología: desde el punto de vista lógico, se trata de operaciones formalizables y esto basta para caracterizar una lógica coherente.

Pero la definición adoptada parecería tendenciosa al introducir de entrada la idea de transformación operatoria en lugar de poner el acento sobre los elementos estáticos en tanto tales: sobre los enunciados proposicionales en lo referente al cálculo de proposiciones, y sobre las relaciones o las clases en lo relativo a la lógica de las estructuras elementales. Reconocemos en efecto, que hay allí una intención en esa acentuación de la noción de operación: es precisamente la que desarrollaremos en esta obra, que trata de extraer los caracteres de los sistemas de conjunto, es decir de las totalidades operatorias que constituyen, en cada nivel de la formalización, ya sea las clases y las relaciones, como las proposiciones mismas. Pero, independientemente de toda hipótesis sobre el papel efectivo que desempeñen en la lógica formal las totalidades o los sistemas de conjunto de las transformaciones, falta todavía que la noción de operación se aplique a todos los elementos lógicos, incluso si pudiesen, por otra parte, ser considerados estáticamente (es decir, en caso de operaciones nulas). Es igualmente falso tanto lógica como psicológicamente creer que pueda darse una clase, una relación, o incluso un objeto individual provisto de cierto número de atributos positivos o negativos (presencia o ausencia de cualidades determinadas) sin hacer intervenir operaciones (de reunión, correspondencia, sustitución, seriación, etc.), y basta ya, al dar una proposición p, con calificarla como positiva o negativa, para someterla a otras operaciones, independientemente de su descomposición interna posible en términos de clases o de relaciones. Es pues el conjunto de las operaciones del pensamiento lo que la lógica debe formalizar si quiere arribar a una teoría exhaustiva de la coherencia formal.

§ 2. LAS RELACIONES DE LA LOGICA CON LA PSICOLOGIA Y LA SOCIOLOGIA.

Si la lógica es una teoría formal de las operaciones del pensamiento, la psicología y la sociología, o al menos algunas de sus ramas, constituyen por el contrario, una teoría real sobre las mismas operaciones: las operaciones efectuadas por el individuo o intercambiadas gracias al lenguaje y realizadas en común. En principio pues, el límite entre la lógica y la psicosociología en relación a sus respectivos objetos, aparece claro: es lo que separa una forma pura de un mecanismo concreto y causal. Pero en la práctica, ¿es también tan fácil la delimitación?

En principio, el punto de vista de la lógica y el de la psicología o de la sociología son completamente distintos. Para la primera disciplina, el único problema es el de la validez formal de las composiciones operatorias: dado un sistema de proposiciones verdaderas o falsas, determinar cuáles son las otras proposiciones verdaderas o falsas que se derivan válidamente de las relaciones admitidas. Ahora bien, analizar la validez formal será necesariamente *fundamentarla,* de ahí que el fin esencial de la lógica consistirá en extraer los principios o axiomas necesarios y suficientes que aseguren el rigor de los encadenamientos operatorios estudiados. Para la psicología y la sociología el problema es, por el contrario, establecer las leyes reales de las operaciones de la acción o del pensamiento y *explicarlas:* la cuestión no será pues "fundamentar" sino exclusivamente comprender y reconstituir genéticamente [1].

Así el juego de las operaciones se presenta bajo un aspecto muy diferente según se lo estudie formalmente o desde un punto de vista real, en tanto comprendido en un contexto temporal y causal de actividad viviente. Formalmente las operaciones son transformaciones que permiten establecer ciertas proposiciones o relaciones a partir de otras proposiciones o relaciones, y transformaciones cuya validez se rige

1 Por ejemplo, una inferencia como $A = B$; $B = C$, luego $A = C$, aparecerá al lógico como muy primitiva (como un axioma o como extraída directamente de un axioma); el psicólogo, por el contrario, constatará que dicha transitividad no es accesible al pensamiento antes de un nivel mental dado: tratará entonces de determinar los factores que preparan su construcción y lo transforman en necesario (reversibilidad progresiva de las operaciones mentales que conduce a la conservación de los datos, etc.)

por la aceptación (o el rechazo) de ciertos axiomas. Realmente, las operaciones son acciones equilibradas. Decir que son acciones significa que poseen una historia que las une a las actividades concretas del sujeto: psicológicamente equivale a mostrar la continuidad entre las coordinaciones sensorio-motrices y las acciones efectivas, luego entre estas y las acciones interiorizadas o actos simbólicos que caracterizan el pensamiento; sociológicamente supone mostrar cómo este pasaje del acto real a la operación mental es solidario de una cooperación concreta entre los individuos y de un sistema de comunicación entre ellos. Decir que las operaciones son acciones equilibradas equivale, por otra parte, a afirmar que estas acciones interiorizadas en pensamiento y expresadas como proposiciones, llegan a coordinarse en sistemas móviles, pero estables, en los cuales las transformaciones se vuelven enteramente reversibles, y donde la conservación del conjunto se halla asegurada por esta reversibilidad misma, regida por normas colectivas de reciprocidad (expresión interindividual de la reversibilidad). En síntesis, allí donde la lógica ve en las operaciones transformaciones formales cuya validez se basa en los axiomas, la psicosociología las considera como acciones interiorizadas efectuadas en común o según correspondencias interindividuales susceptibles de una coordinación equilibrada (composición reversible) tanto a nivel del pensamiento individual como en los intercambios entre los individuos.

En lo referente a los principios, queda pues claro que tanto la teoría formal de las operaciones, o lógica, como la teoría real de las mismas operaciones, o análisis genético y causal propio de la psicología y la sociología, no podrían usurparse nada entre sí sino más bien complementarse de manera perfectamente delimitada y sin contradicción posible.

Pero, por más evidente que sea el principio de tal delimitación, se advierte que esta diferenciación y esta complementariedad son en realidad muy recientes, y se hallan aún por justificar incluso en nuestros días, luego de largas fases de indisociación y de usurpación mutua.

A falta de un algoritmo simbólico, la lógica clásica no pudo separarse, en efecto, de una descripción psicológica (introspectiva y no genética lo que la hace más dudosa) de los conceptos, juicios y razonamientos. Si bien creyó alcanzar una ontología, no fue sino gracias a una especie de proyección del pensamiento sobre las cosas, insistiendo, desde este punto de vista, sobre el aspecto normativo del pro-

blema al oponer sus descripciones del pensamiento verdadero a las de los paralogismos. Pero, a falta de una axiomática estricta, esta caracterización de lo verdadero y lo falso no podía sino limitarse más que a una introspección de lo que el sujeto mismo considera como verdadero o falso. Al enunciar los "principios" de lo verdadero, no contradicción, identidad y tercero excluido, los formuló no a título de axiomas de partida de una construcción formal autónoma, sino como "hechos normativos" observados en la conciencia individual o colectiva. No salió pues mucho, en realidad, de los marcos de la psicología y la sociología, y describió las realidades lógicas como se describen en sociología las normas que rigen una sociedad dada (o a todos los grupos sociales, si es posible hallar pautas comunes).

Se reencuentra este psicologismo en la doctrina de Goblot [1], quien tuvo el gran mérito de haber puesto el acento en las operaciones mismas, no obstante su operacionalismo continúa siendo una teoría psicológica, tanto más cuanto que no alcanza la coherencia formal. Caracterizar la deducción por la construcción operatoria es, en efecto, enunciar una evidencia psicológica, pero es simplemente plantear el problema lógico. ¿Cuál es entonces el modo de composición entre operadores que sea susceptible de garantizar a la construcción su rigor? Tal es el verdadero problema, desde este segundo punto de vista, y para resolverlo es absolutamente necesario poder formalizar la regulación misma del proceso constructivo.

Ahora bien, si la lógica ha permanecido tanto tiempo psicologista, la psicología y la sociología han abusado recíprocamente del logicismo. Así, la psicología del pensamiento, basada en métodos de introspección provocada, ha consistido, por ejemplo, en analizar a nivel de la sola conciencia adulta, las diferencias entre los juicios (susceptibles de verdad y de falsedad) y la simple asociación de ideas: ahora bien, a falta de un estudio genético de las operaciones, semejante método ha llegado a veces a chocar, al término de esa dirección, con un residuo lógico irreductible que se ha considerado simultáneamente como "extrapsicológico" (Marbe) y ¡como actuando sin embargo sobre los estados mentales [2]!

En contrapartida, a medida que el estudio de la inteligencia se

1 Goblot, 1918.
2 Ver Piaget, 1947, cap. II.

ha vuelto genético, y que la lógica ha formalizado, por su parte, la estructura de las construcciones operatorias, ambas disciplinas se han diferenciado a tal punto de excluir toda intersección entre ellas, llegando a ser de este modo, pero sin buscarlo, no sólo complementarias, sino incluso en ciertos dominios, exactamente correspondientes.

Quisiéramos a este respecto, recordar en breves palabras los resultados de nuestros estudios anteriores sobre el desarrollo individual e interindividual de las operaciones, como ejemplo de investigaciones exclusivamente psicológicas, pero que convergen con una formalización lógica posterior (es decir, precisamente con aquella que tomaremos como hilo conductor de este *Ensayo*). El primer punto a tener en cuenta es que todo sistema de operaciones intelectuales se presenta psicológicamente bajo dos aspectos paralelos: exteriormente se trata de acciones coordinadas entre sí (acciones efectivas o mentalizadas), mientras que interiormente, es decir para la conciencia, se trata de relaciones que se implican unas a otras. La explicación psicológica consiste entonces en proceder del exterior al interior y no a la inversa, es decir en ver en las implicaciones reflexivas el producto de la toma de conciencia de la organización de las acciones. Ahora bien, el principal resultado de este método aplicado a la sucesión de las conductas cognitivas desde el nacimiento hasta la edad adulta, es el de mostrar que la conciencia de las implicaciones necesarias (tales por ejemplo, como la noción de la conservación de un todo independientemente de la disposición de sus partes) se halla ligada a dos condiciones psicológicas inseparables: la capacidad de composición entre las acciones (la acción α coordinada con la acción β da lugar a la acción γ), y sobre todo a su reversibilidad, es decir la posibilidad de desarrollarlas en los dos sentidos [1]. En una palabra, la conciencia de la necesidad lógica se halla ligada psicológicamente al logro de una composición reversible entre las acciones, y es esta composición reversible lo que transforma las simples acciones en operaciones propiamente dichas. Pero esta reversibilidad no se adquiere sino por etapas: solamente después de haberse logrado una organización sensorio-motriz de los actos, y una articulación más o menos móvil de las intuiciones representativas (o acciones imaginadas en pensamiento), es cuando se constituyen las operaciones, primero bajo una forma concreta (composición de las operaciones constitutivas de las clases y las relaciones), luego

1 Ver PIAGET, 1947, cap. IV y V.

bajo una forma abstracta o formal (traducción de las operaciones concretas en proposiciones formuladas a título de hipótesis, y composición de estas mismas proposiciones según operaciones a la segunda potencia, tales como implicaciones, incompatibilidades deductivas, etc.).

Ahora bien, estos datos psicológicos corresponden a una formalización lógica posible, puesto que las composiciones reversibles de las operaciones, cuya génesis puede seguirse a lo largo del desarrollo mental, presentan estructuras bien definidas. Es preciso, a este respecto, distinguir cuidadosamente dos tipos de procesos mentales. Por una parte, tenemos la formación o la evolución como tales, que no interesan directamente a la lógica. Pero por otro lado, están los estados de equilibrio alcanzados al término del desarrollo de un sistema de conocimientos cuyo criterio es precisamente la reversibilidad, que ha llegado a ser completa, de las operaciones. Ahora bien, esta reversibilidad, que supone un aspecto causal (y desde este punto de vista caracteriza precisamente la existencia de un estado de equilibrio), supone también un aspecto implicativo o lógico: una operación reversible es una operación que admite la posibilidad de una inversa. Por otra parte, la reversibilidad no es sino uno de los aspectos de la composición equilibrada de las acciones, la cual supone igualmente la intervención del producto de dos operaciones, de operaciones nulas o idénticas, y de la asociatividad de las operaciones (que corresponde psicológicamente a los "rodeos", así como la inversión corresponde a los "retornos"). En síntesis, una estructura psicológicamente equilibrada es, al mismo tiempo, una estructura lógicamente formalizable: tal es el caso de las clasificaciones, seriaciones y correspondencias en el terreno concreto, y de los sistemas deductivos en el de las proposiciones.

Desde este punto de vista, y limitándonos a los estados de equilibrio, se comprende entonces las verdaderas relaciones entre la lógica, por una parte, y la psicología o la sociología de las operaciones intelectuales, por la otra: *la lógica es la axiomática de las estructuras operatorias, de las cuales, la psicología y la sociología del pensamiento estudian su funcionamiento real.* Existe así, en este caso, entre la teoría formal y el análisis real, exactamente la misma relación que entre toda axiomática y toda búsqueda real concomitante (por ejemplo, entre la geometría axiomática y la geometría de los objetos físi-

cos): independencia completa en los métodos y correspondencia posible entre los problemas.

La correspondencia entre los problemas se halla clara. En primer lugar, todos los problemas suscitados por la formalización lógica pueden corresponder a cuestiones psicológicas y sociológicas. Así, el empleo de un simbolismo lógico adecuado corresponde al problema de los signos; cada estructura formalizada corresponde a una estructura real, ya sea en el pensamiento común o en su defecto, en el espíritu del lógico mismo, etc. Inversamente, toda estructura alcanzada por las operaciones mentales del individuo o por una cooperación interindividual, suscita el problema lógico de su posible formalización: es el caso de la reversibilidad y de distintos agrupamientos de conjunto constituidos por las operaciones concretas o abstractas.

Pero, si bien existe una correspondencia posible entre los problemas, existe igualmente una independencia radical entre los métodos: jamás un dato empírico, tanto psicológico como sociológico, podría invocarse en la formalización lógica, la cual permanece autónoma incluso respecto de las normas más comúnmente aceptadas por el grupo social o los individuos; jamás, igualmente, un razonamiento que se apoye sobre un algoritmo formal podría dar razón de un hecho de experiencia en psicología o en sociología del pensamiento. Es únicamente esta independencia de los métodos la que asegura, por otra parte, la correspondencia de los problemas. Ni la lógica ni la psicología clásicas han presentado esta correspondencia, a causa, entre otras cosas, de la falta de un método lógico propio. Sólo la logística garantiza, por su técnica de formalización, la autonomía respectiva de la lógica y de la psicosociología, pues únicamente la axiomatización puede liberar a una ciencia deductiva de sus lazos empíricos, así como a un estudio concreto y causal, de sus presuposiciones normativas.

§ 3. LAS FRONTERAS ENTRE LA LOGICA Y LAS MATEMATICAS.

Si la lógica se ha disociado así del análisis psicológico, se ha aproximado por otra parte, y exactamente en la misma medida, a las matemáticas puras. Se observa a este respecto, en el movimiento de las ideas propias de la segunda mitad del siglo XIX y en el siglo XX,

un desplazamiento en sentido inverso del que acabamos de recordar. La lógica clásica no mantenía sino lejanas relaciones con las matemáticas, puesto que permanecía de hecho en parte psicológica. Pero recíprocamente, las matemáticas se preocupaban poco por la lógica formal, puesto que permanecían esencialmente intuitivas. Ahora bien, mientras la lógica y la psicología evolucionaban en direcciones divergentes respecto de sus métodos, se dio una convergencia gradual entre la lógica y las matemáticas como resultado de un doble proceso, extremadamente significativo, ya que se debió a razones parcialmente independientes: la matematización de la lógica, por una parte, debido a la necesidad de un simbolismo preciso (el álgebra de la lógica) y la logicización de las matemáticas, por la otra, debido a las exigencias de la axiomatización, es decir, a la eliminación progresiva de la intuición como fundamento del conocimiento abstracto.

Pero es preciso distinguir cuidadosamente, en las relaciones entre la lógica y las matemáticas, dos tipos de cuestiones que son, de derecho, enteramente independientes: la de la convergencia entre los métodos logísticos y matemáticos, y la de la eventual reducción de las estructuras matemáticas a estructuras lógicas. Estos dos problemas son confundidos a menudo, de hecho o por lo menos lo han sido en la época en que la influencia de Russell tendía a ligarlos. Pero, la evolución ulterior de las ideas ha mostrado bien en que medida diferían uno de otro.

En lo concerniente a la interacción de los métodos, hay que remontarse al proyecto de una combinatoria universal de Leibniz para ver cómo la idea de un álgebra de la lógica, así como de una extensión de la lógica clásica a la de relaciones, pudo haberse inspirado en el álgebra matemática propiamente dicha. Tal proyecto comenzó a consolidarse desde mediados del siglo XIX con A. Morgan y G. Boole, luego, durante la segunda mitad del siglo, con W. S. Jevons, Peirce, Frege, Schroeder y Brontano, pero sin mayor repercusión sobre el pensamiento común, a causa de la falta de interés de los matemáticos, no preocupados aún por problemas de fundamentos ni de axiomática. Más tarde, los trabajos de B. Russell y A. N. Whitehead en Gran Bretaña, de G. Peano, Burali-Forti y de Padoa en Italia, de Coutourat en Francia, de C. I. Lewis y Church en los Estados Unidos, Chwistek, Lesniewski, Lukasiewicz y Tarski en Polonia, de Wittgenstein y Carnap en Austria, y de muchos otros, constituyeron la lógica por medio

de algoritmos precisos, asegurando finalmente la unión completa con los métodos de cálculo y formalización matemáticos. Es que, al mismo tiempo, las exigencias crecientes del método axiomático con los trabajos de Bolzano y Pash, y luego de Hilbert, hicieron sentir a los matemáticos la necesidad de una lógica más general y más rigurosa a la vez que la lógica clásica: del mismo modo, Hilbert mismo, con sus colaboradores W. Ackermann, P. Bernays, etc., participaron en la constitución de la lógica propiamente dicha (algunos de los lógicos citados precedentemente eran, por otra parte, matemáticos de oficio).

En cuanto a la reducción como tal de las estructuras matemáticas a las estructuras lógicas, no se planteó simplemente a causa de esta convergencia metodológica, sino que surgió, sobre todo, de la coincidencia notable hallada entre las partes más generales de las matemáticas y el álgebra de las clases y las relaciones. En efecto, la teoría de conjuntos, constituida por G. Cantor, tanto en su forma elemental como en sus partes más abstractas (cardinales y ordinales transfinitos), mostró una convergencia entre algunas de sus estructuras con las operaciones que llevaban sobre las clases y las relaciones en general: fue esta proximidad la que inspiró a Frege y a Russell sus célebres tentativas de reducción del número cardinal a la clase lógica, y del número ordinal a la relación asimétrica. Por otra parte, otros ensayos de reducción nacidos de la misma inspiración, condujeron a las relaciones entre la teoría de grupos y la lógica de relaciones (Coutourat) y a la analogía entre la idea misma de función y la de relación asimétrica. Finalmente, y esto reúne el terreno común entre la teoría de la deducción en general y el análisis axiomático, se trató de reducir el famoso razonamiento por recurrencia, cuyo papel fue descubierto por Maurolico y puesto particularmente en evidencia por Poincaré, a un razonamiento puramente lógico.

En síntesis, bajo la doble influencia de una fusión innegable entre los métodos por una parte, y de una convergencia parcial de la lógica con capítulos generales de las matemáticas por la otra, surgió una tendencia cada vez más fuerte a tratar de reunir las dos disciplinas en una sola. Pero, las modalidades de esta unión deseada varían de una escuela a otra, y para tomar partido es preciso examinar las cuatro soluciones posibles. Se puede, con Russell, concebir todas las matemáticas como una subclase de la lógica, lo que manifiesta la esperanza de una reducción completa de las relaciones matemáticas a las identi-

dades lógicas. Se puede, con Hilbert, concebir las relaciones lógicas como una subclase de los entes matemáticos, los cuales no serían así reductibles todos a las estructuras lógicas, sino que comprenderían a estas últimas a título de caso particular. Se puede, en tercer lugar, concebir las estructuras lógicas y matemáticas como las dos subclases disyuntas de la gran clase de las estructuras formales o abstractas. Se puede, finalmente, concebir las estructuras lógicas y matemáticas como parcialmente disyuntas, pero constituyendo una parte común por asimilaciones recíprocas (y no en sentido único).

Se advierte así que el problema de las relaciones entre la lógica y las matemáticas se plantea en términos muy distintos al de las relaciones entre la lógica y la psicología. En este último caso, se trataba de disociar dos dominios, no solamente en función de la claridad de las clasificaciones, sino sobre todo con un fin esencialmente metodológico: no alterar la pureza respectiva de un análisis formal y de una búsqueda experimental con usurpaciones ilegítimas. El problema es pues mucho más fácil de resolver, ya que la separación es deseada por ambas partes, y además, los mismos autores, para quienes la cooperación constituye un deseo manifiesto, encuentran en esta separación incluso la posibilidad de establecer correspondencias entre los problemas, así como una complementariedad en las soluciones. Muy distinta es la cuestión de las fronteras entre la lógica y las matemáticas: se trata aquí de moderar dos imperialismos inspirados por una misma ideología, a fin de ver si uno vencerá al otro o si se fusionarán en parte, pero entonces bajo la forma de una confederación. La cuestión es pues no elegir en este momento una de las cuatro soluciones posibles, sino más bien efectuar una elección provisoria en vista de mejores relaciones futuras.

Desde este punto de vista, la primera fórmula debe, sin duda alguna, excluirse. No solamente las reducciones, intentadas por Frege y Russell, de las matemáticas a la lógica fueron refutadas desde el comienzo, y tendremos ocasión de ver por qué razones puramente lógicas la duda se hallaba legítimamente fundada, sino que incluso la evolución de la misma lógica matemática condujo a cambios imprevistos: fue así que no se pudo llegar a verificar por medios elementales, la no-contradicción de la aritmética, y Gödel demostró en 1931 la imposibilidad de dicha demostración a menos que se recurra a instrumentos superiores a la aritmética misma. Queda así excluida actual-

mente, la posibilidad de considerar las matemáticas como un parte de la lógica. En cuanto a la segunda solución –la subordinación inversa– se basa en primera instancia sobre una convención verbal más que sobre una conexión natural: hacer de la lógica una parte de las matemáticas presentaría un sentido constructivo si, a partir de una estructura general única (tal como una "lógica general", un "grupo" de todos los grupos o un sistema de conjunto que subsumiese todos los conjuntos lógicos posibles, etc.) se pudiese engendrar el principio de una distinción entre las estructuras lógicas y las estructuras translógicas o matemática puras. Ahora bien, no existen tales estructuras generales, y a falta de ellas, sigue siendo una pura cuestión de palabras el llamar matemáticas las operaciones lógicas efectuadas por ejemplo por un biólogo, cuando clasifica una colección de animales en especies, géneros y familias, según la presencia o no de determinados caracteres cualitativos concretos.

En cuanto a la tercera solución, es inaceptable, ya que existen estructuras comunes a la lógica y a las matemáticas: si bien la lógica de proposiciones bivalentes no da cuenta de todas las formas de inferencia matemática, abarca no obstante una gran parte y pertenece por consiguiente tanto a una como a otra disciplina. Queda pues sólo por considerar la cuarta solución: autonomía relativa de la lógica y de las matemáticas y reducción recíproca parcial. Pero semejante esquema debe considerarse naturalmente sólo en un sentido heurístico, dejando abiertas las fronteras y las posibilidades de reducción futuras. En el estado actual de los conocimientos, la lógica aparece como un domino inferior, es decir más simple o más elemental en relación a las matemáticas, las cuales serían así superiores respecto de ella al desbordarla en complejidad y riqueza. Se produce entonces entre lo inferior y lo superior la misma doble corriente de asimilación recíproca que se manifiesta en el seno de todas las cuplas de ciencias que se hallan en la misma situación[1]: lo superior se asimila parcialmente a lo inferior, pero este a su vez se ve enriquecido por aquel. La lógica no se "aplica" desde fuera a las matemáticas: se halla más bien parcialmente incorporada y se encuentra así generalizada en lógica matemática. Inversamente, las matemáticas no se reducen sin más a la lógica, sino que la completan y la modifican según un proceso de intercambio continuo.

1 Ver Piaget, 1950, conclusiones.

La asimilación recíproca de la lógica y las matemáticas es particularmente clara en el terreno de la cantidad. Como veremos continuamente, la cuantificación lógica se reduce a las únicas relaciones de la parte al todo y de complementariedad (cantidad intensiva), mientras que las estructuras matemáticas suponen además una relación cuantitativa entre las partes mismas de los conjuntos (cantidad extensiva). Pueden construirse pues estructuras lógicas sin hacer mención a la matemática (clasificaciones, etc.), e inversamente, existen un conjunto considerable de estructuras matemáticas que desbordan la cantidad lógica. Pero queda claro que las estructuras intensivas intervienen también en matemáticas: se establecerán así, en el seno mismo de las matemáticas (teoría de conjuntos), relaciones cada vez más estrechas entre estructuras comunes a la lógica y a las matemáticas (inclusiones y complementariedades) y estructuras extensivas (correspondencias entre elementos, etc.), sin que pueda hablarse por ello de una identificación pura y simple entre ambas.

§ 4. LA DEFINICION Y LOS METODOS DE LA LOGICA.

Luego del análisis realizado acerca del objeto y de las fronteras de la lógica, podemos definirla en tercera aproximación como la *teoría formal de las operaciones deductivas*[1]. La calificación de formal basta para distinguir la lógica de la psicología y de la sociología. En cuanto a las relaciones entre el campo propio de la lógica y el de las matemáticas, el mismo comienza por el lado de las matemáticas: comprende en efecto un conjunto de operaciones elementales de carácter prematemático, que se derivan casi exclusivamnte de la cantidad intensiva. No obstante, penetra en las matemáticas y permanece abierto en su interior, ya que comprende también el análisis de las inferencias propiamente matemáticas, pero sin límites asignables por anticipado. El campo de la lógica permanece así abierto por arriba en tanto no se demuestre la existencia de una "lógica general", es decir de un sistema de inferencias tal que subsuma todas las demás.

Por otra parte, el análisis de las operaciones deductivas supone la

1 Las palabras "operaciones deductivas" designan las operaciones necesarias y suficientes que hacen posible la deducción, y no, naturalmente, todas las operaciones cuyo empleo da lugar a una deducción.

consideración de ciertas operaciones interiores a las proposiciones mismas, y que consisten en descomponerlas en operaciones de clases, relaciones de distintos tipos, etc. La lógica se halla obligada, en efecto, a ocuparse de tales operaciones elementales, en la medida en que dan lugar a estructuras deductivas posibles (por ejemplo, la transitividad de las inclusiones entre las clases, las relaciones de equivalencia, etc.). Ahora bien, este conjunto de operaciones (que llamaremos intraproposicionales) permanece a su vez abierto, pero por su base, puesto que no es posible saber por anticipado a partir de qué límite interesa a la deducción. Se advierte pues sin dificultad que se tratará, a este respecto, de analizar la lógica de clases y de relaciones ya que las inclusiones de clases y las series de relaciones dan lugar a inferencias coherentes y formalizables. Se admitirá igualmente que los nexos entre las clases, las relaciones y los números, deberán incluirse en el campo de estudios lógicos, ya que las diferencias entre las clases y los números dominan sin duda el problema de las relaciones entre el razonamiento por recurrencia y las inferencias propias de la lógica de proposiciones bivalentes[1]. Pero no es posible precisar *a priori* dónde convendrá detenerse, y el detalle de las operaciones intraproposicionales puede dar lugar a nuevos análisis imprevisibles en cuanto a su repercusión sobre la teoría de la deducción: en efecto, el número ilimitado de los distintos tipos de relaciones hace imposible fijar los límites de sus caracteres formales más generales, y es posible distinguir caracteres especiales cada vez más diferenciados. Es en este sentido, que el campo de la lógica permanece abierto por su base.

Ahora bien, esta doble apertura por arriba y por abajo hace indispensable una reflexión sobre los métodos de la lógica, ya que, contrariamente a las apariencias, estos pueden variar en gran medida y dar lugar a la misma diversidad que los métodos de las matemáticas, pese al acuerdo sobre los resultados finales. Si bien las matemáticas constituyen una disciplina exclusivamente deductiva, encontramos en ella, en efecto, todos los matices entre lo más o menos intuitivo o formal, entre los diversos tipos de intuición o de formalización. La diferencia más notable es la que opondrá los métodos aplicados a la búsqueda de un orden natural de construcción o de filiación y los que persiguen ante todo la pureza de la demostración. En lógica ocurre lo mismo: puede vacilarse entre construcciones que parecen, según ciertos crite-

1 La diferencia entre la noción de clase y de conjunto será precisada más adelante.

rios que analizaremos más de cerca, más o menos naturales, y reconstrucciones más artificiales, pero más puras. Puede comenzarse por arriba (lógica de proposiciones) o por abajo (clases y relaciones). Puede ponerse el acento sobre las relaciones estáticas o sobre las operaciones. Puede procederse de manera atomística o buscar las totalidades operatorias. Puede comenzarse sobre todo por los elementos comunes a la lógica matemática y a la de las estructuras extramatemáticas, o insistir de entrada en las diferencias entre los diversos dominios. En síntesis, pese a que se arribe a fórmulas idénticas, es posible concebir de la manera más variada la tarea de formalización a que se consagra la lógica.

Ahora bien, la verdadera razón de estas múltiples divergencias es que lo "formal" que caracteriza a la lógica no es una cualidad dada, propia de un estado, sino la expresión de un proceso o de un movimiento de formalización. La definición que acabamos de aceptar no designa en realidad más que un ideal: la lógica es, de hecho, no formal (en estado acabado), sino formalizante o formalizadora de las operaciones deductivas. Dicho de otro modo, lo propio de una teoría lógica es el hecho de constituir una formalización progresiva, pero sin que pueda saberse por anticipado donde finalizará la misma, dado su doble apertura por su cima y por su base. La formalización no se halla concluida en su cima dado que no existe (o no existe aún) una lógica general; y es *a fortiori* incompleta en su base, ya que las operaciones elementales proceden de acciones psicológicas ejercidas sobre los objetos concretos, y se trata de extraer pues, en su raíz, la "forma" de su "contenido" vivo y diverso.

De donde se desprende que, según las tendencias que lleven al lógico a partir de la cima, de la base o de los niveles intermedios de la jerarquía de las formalizaciones, llegará a una imagen muy distinta del edificio total, pese a que se representen las mismas piedras, las mismas fachadas, y que se reencuentren tarde o temprano las mismas estructuras. Provocará sobre todo impresiones contrarias respecto a la terminación del edificio, unos llegarán a idealizar la lógica hasta ver en ella el reflejo de las ideas eternas, otros la verán según los distintos aspectos de un taller de construcción. Es por ello que resulta necesario, incluso en lógica, hablar acerca de los métodos, y esto desde tres puntos de vista: la técnica misma de la formalización, el atomismo lógico o la determinación de las totalidades y el orden natural de formalización.

Sobre la necesidad de una técnica de formalización, todo el mundo concuerda actualmente en ver en los algoritmos la condición *sine qua non* de la constitución de una lógica. Pero la conquista es reciente. Todavía en 1918, Ed Goblot, podía escribir que si la "lógica deductiva" y la "lógica inductiva" formaban ya dos dominios muy distintos, ¡era inútil añadir un tercero con la logística! Las dos primeras de estas lógicas "han permanecido exteriores y como extrañas una a la otra, y me inquieta ver una tercera lógica formando una tercera corriente... ¿Tendremos pues tres lógicas que se ignoran entre sí, tres fuentes que seguirán sus cursos sin mezclar sus aguas?".[1] Es casi como (salvando las distancias) si en la época de Descartes, un matemático hubiese dicho: tenemos una aritmética que data de Pitágoras, una geometría que data de Euclides, y que guardan entre sí pocas relaciones, no agreguemos un álgebra pues, pese a que nos vanaglorien sus aplicaciones, creará fatalmente un tercer dominio separado. En realidad, el álgebra de la lógica no solamente constituyó un lenguaje más preciso para la lógica que la antigua formulación verbal; sustituyó más bien el método de simple reflexión por una técnica de construcción abstracta que simultáneamente amplió y reestructuró el campo de las operaciones deductivas, de manera análoga (salvando nuevamente las distancias) a como el álgebra matemática extendió el dominio de las operaciones matemáticas y reestructuró el espacio euclidiano al introducir, en geometría analítica, los ejes de coordenadas. En efecto, la lógica matemática permitió, por una parte, alcanzar una serie de operaciones desconocidas o al menos descuidadas por la lógica clásica; por otra parte, condujo a estructurar el sistema en función de ese mecanismo central que constituye el cálculo de proposiciones con sus estructuras de conjunto, cuya riqueza no ha podido todavía agotarse.

La razón decisiva del empleo de una técnica logística es pues que sólo el álgebra propiamente dicha es susceptible de asegurar una formalización progresiva, en oposición al estado semiformalizado con que se contenta toda lógica formal que emplee una técnica simplemente verbal. Admitir que la lógica pueda satisfacerse con el lenguaje corriente para expresar los distintos tipos de nexos y de operaciones, es suponer que este lenguaje corriente hubiese alcanzado, y para siempre, las conexiones formales. De ahí la idea frecuente en los adver-

1 Goblot, 1918, pág. XIX.

sarios de la notación logística, que es inútil retraducir en nuevos símbolos lo que la designación verbal indica por sí sola. Goblot llega hasta creer que el lenguaje común es más rico que el de la logística: luego de haber admitido con cierto desdén que el álgebra lógica "reduce laboriosas operaciones del espíritu a operaciones escritas muy fáciles"[1] (lo cual, notémoslo, es un reproche que puede dirigirse a todas las matemáticas), agrega: "¿No es para temer que se esté inclinado a ignorar o a separar todo lo que la nueva notación no pueda escribir?"[2]. Pero, si la notación logística fuese más pobre que el lenguaje verbal, su mayor precisión facilitaría entonces las operaciones del espíritu y la reflexión sobre todo lo que ella no fuese capaz de escribir, sin excluir para nada que se añadiesen nuevos desarrollos en el lenguaje ordinario. Ahora bien, lejos de ser menos rica, ha consistido por el contrario en distinguir múltiples significaciones heterogéneas, y a veces incluso incompatibles, que recubren ciertas palabras del lenguaje, tales como "es", "y", "o", etc. Es el lenguaje verbal de la lógica clásica el que precisamente "ha separado lo que no podía escribir". Basta constatar por el contrario, que el estado semiformalizado en que se ha mantenido la lógica durante más de veinte siglos no es definitivo, y que en consecuencia, la formalización lógica constituye un proceso y no una situación adquirida, para que todo deba hacerse a fin de asegurar una técnica adecuada a ese esfuerzo necesario y susceptible de renovaciones continuas. Ahora bien, no existe otra técnica de formalización deductiva más que las técnicas de expresión simbólica y de análisis axiomático. Así como en las ciencias experimentales es necesaria la experimentación para reemplazar la observación directa, y para disociar sistemáticamente los factores que dicha observación global confunde fatalmente, del mismo modo, en las ciencias deductivas, la reconstrución simbólica de las nociones es la única que permite extraer las implicaciones y relaciones que el lenguaje corriente deje indiferenciadas. La técnica logística no aporta pues solamente un lenguaje preciso; es esencialmente un método de pensamiento y de reflexión: es el único método que garantiza el análisis reflexivo contra la especulación, es decir justamente, contra esa forma de pensamiento incapaz de evitar las trampas del lenguaje corriente.

1 Goblot, 1918, pág. XVIII.
2 Goblot, 1918, pág. XIX.

La segunda cuestión a discutir es entonces la orientación que se deba dar a los análisis lógicos: ¿es necesario a fin de alcanzar más eficazmente las leyes de la necesidad formal dirigirse hacia los elementos, previamente aislados, del pensamiento y del discurso, o más bien hacia los sistemas de conjunto que ellos mismos contituyen en el proceso de la deducción? Dicho de otro modo, ¿es preciso fiarse de las reconstrucciones más simples y cómodas, pero quizás más artificiales, o tratar de extraer las conexiones naturales, a riesgo de deslizar bajo esta denominación cierto número de preocupaciones extralógicas?

Hay en primer lugar un malentendido que es preciso disipar. Todo lógico tiene preocupaciones extralógicas, puesto que la verdad formal no es, en sí misma, la verdad de nada. Fue así que la Escuela de Viena marcó una tendencia "fisicalista", una de cuyas preocupaciones básicas fue suprimir al *maximun* todo intermediario entre el contenido real o experimental de los enunciados y su forma lógica, concebida como "tautológica" y caracterizada como una simple "sintaxis". La preocupación dominante de Russell fue la reducción de las matemáticas a la lógica. La de la mayor parte de los lógicos matemáticos es asegurar el rigor de las axiomáticas y demostrar la no-contradicción de los sistemas. El autor de la presente obra confiesa que su preocupación esencial no es ni fisicalista ni matemática, sino que consiste en querer esclarecer el mecanismo real del pensamiento y especialmiente su reversibilidad a través del análisis de las estructuras formales correspondientes. En síntesis, cada uno puede tener preocupaciones extralógicas sin que dañen en nada el rigor de la formalización, siempre y cuando permanezcan exteriores a la misma; en efecto, lo único que se pide a la formalización es que presente una coherencia interna suficiente y no que responda a cuestiones epistemológicas que se plantearán a su debido turno. Ahora bien, a partir del momento en que las consideraciones extralógicas condujesen a alterar esta coherencia en nombre de principios no formales, aparecerían entonces como ilegítimas. Pero, en la medida en que se limiten a orientar la investigación lógica en una dirección o en otra conservando las condiciones generales de una formalización coherente, constituyen el equivalente de lo que ocurre en matemática cuando el matemático trata de resolver por sus propios medios un problema que le plantea el físico o el estadístico, etc.; estos problemas fecundan simplemente la inves-

tigación sin modificar por ello el método exclusivamente deductivo del análisis.

Ahora bien, la búsqueda de conexiones naturales en lógica puede entenderse en dos sentidos distintos: en el sentido de una correspondencia con dominios exteriores a la lógica, y en el de una sistematización interna más armoniosa y más coherente. En el primer caso, podemos decir que una construcción lógica es más o menos natural o artificial según su grado de correspondencia con sistemas, ya sea psicológicos (operaciones mentales del sujeto o sistemas de comunicaciones, etc.), o bien matemáticos. En el segundo caso, la construcción sería mucho menos artificial si se pudiesen encontrar estructuras análogas entre las distintas partes del campo de la lógica y se pudiesen resolver, en un conjunto más coherente, los aspectos disociados por las necesidades del análisis. Así, para tomar un ejemplo bien conocido, la noción de función proposicional es natural en ambos sentidos del término: corresponde (en sentido extrínseco) a la distinción matemática entre funciones y argumentos (constantes o variables); y permite por otra parte, situar más naturalmente (en sentido intrínseco) la lógica de clases y de relaciones en el cuadro de la lógica proposicional.

Podemos plantear entonces la cuestión (cuya importancia tratará de mostrar toda esta obra) de saber si es más natural para la lógica proceder por combinación a partir de elementos aislados, o por el análisis de las leyes de las estructuras de conjunto. Hay allí un problema del que el desarrollo de las matemáticas contemporáneas ha mostrado su innegable alcance, y que no obstante, cosa sorprendente, apenas si se ha discutido en lógica.

Tanto en matemáticas como en psicología, es decir en las dos disciplinas entre las cuales se intercala la lógica, el papel de las totalidades operatorias con sus propiedades de conjunto ha llegado a ser fundamental, tanto en la sistematización de las operaciones abstractas, como de las operaciones reales en juego en el pensamiento en acción. En matemáticas, las operaciones no existen nunca en estado aislado, sino que son solidarias de las estructuras globales. Los números, por ejemplo, no existen unos independientemente de otros: constituyen "grupos" (con sus leyes de composición de conjunto), "cuerpos", "anillos" y muchos otros sistemas totales. Las distintas formas de espacios se ordenan según una jerarquía de grupos, cada "grupo fundamental" de una geometría constituye un subgrupo del grupo funda-

mental que caracteriza el nivel superior. Las funciones constituyen entre ellas "familias", y la noción de "familia normal" representa a su vez una totalidad definida por leyes de organización propias. Los conjuntos constituyen series "bien ordenadas", "reticulados", etc., y el reticulado posee propiedades precisamente en tanto totalidad, las cuales se reencuentran en los dominios más variados (un grupo y sus subgrupos constituyen un caso particular de "reticulado"). En síntesis en un número creciente de casos es la totalidad del sistema la que se halla estructurada por transformaciones operatorias definidas, y son estas transformaciones de conjunto, reflejadas en los mismos elementos del sistema, las que confieren una organización a los dominios matemáticos considerados.

Ahora bien, frente a esta tendencia general, que opone tan profundamente las matemáticas contemporáneas a las investigaciones más analíticas de períodos anteriores, la lógica parece complacerse en un estado sorprendentemente atomístico. Sin duda, al ser la preocupación dominante de los lógicos una axiomatización cada vez más depurada y no una construcción operatoria progresiva, la mayoría de ellos respondería que toda teoría axiomática constituye por sí misma una totalidad lograda y cerrada: desde este punto de vista, un sistema será completo si toda proposición universalmente válida que le pertenezca se deduzca de los axiomas por medio de operadores admitidos. Pero, no creemos de ningún modo que semejante tipo de investigaciones agoten las posibilidades de la lógica. En lógica, como en cualquier otra ciencia, la axiomática más pura expresa esencialmente un mecanismo operatorio subyacente: el papel de los axiomas es determinar las reglas de un juego consistente en la manipulación de cierto número de operadores, y es únicamente a través de estos que puede deducirse la teoría de las proposiciones postuladas en el punto de partida. Sean cuales fueran la coherencia y el rigor de la teoría así lograda, el enunciado de los axiomas necesarios para su completamiento no resuelve pues, sino que más bien suscita, el problema de la totalidad operatoria en tanto tal: ¿cuál es la estructura de conjunto que constituyen los operadores mismos? Dicho de otro modo, ¿es posible aislarlos, o son solidarios más bien de un mismo sistema de transformaciones? Y si son interdependientes, los distintos sistemas así formados, ¿son ellos mismos autónomos o derivan por el contrario unos de los otros, etc.? Hay aquí un número apreciable de cuestiones estructurales, al-

gunas de las cuales han sido resueltas (por ejemplo, en lo que concierne a las operaciones propias del álgebra de Boole, es decir las relaciones entre los operadores interproposicionales y la teoría de los reticulados, etc.), pero que se hallan lejos de estar agotadas.

Por regla general, al contrario, se trata los operadores como si fuesen procedimientos auxiliares, bien reglados pero aislables, sin buscar lo que ellos mismos suponen ni extraer tampoco las leyes de organización total que implican por sus mismas conexiones. Así, se ponen aparte las operaciones de clases y de relaciones, sin insistir en las estructuras tan características que constituyen en tanto totalidades. Se estudia la lógica proposicional como combinatoria, es decir, se procede por análisis de las distintas composiciones dos a dos, etc., a partir de proposiciones cualesquiera simplemente combinadas entre ellas. Sin embargo, el estudio de los axiomas necesarios a esta combinatoria condujo a J. Nicod a agruparlos en un axioma único que conduce sobre cinco proposiciones y dos relaciones [1], pero no se buscó explotar todo lo que esta tentativa implicaba respecto a la existencia de una totalidad operatoria subyacente. Más aún, después de haber concebido la correspondencia entre la lógica de clases y la de proposiciones, se hizo todo lo posible por disociarlas. Disociación útil ciertamente, en tanto pone en evidencia la existencia de dos niveles distintos de formalización, pero que no hubiese perdido nada de su significado si se hubiese tratado, más adelante, de restablecer los contactos a fin de extraer los isomorfismos entre ambos tipos de totalidades distintas: se llegó así a razonar como si, en una deducción efectiva, las proposiciones se relacionasen entre sí sin una previa clasificación de las nociones que les sirven de contenido y sin una organización preliminar de las relaciones que expresan dichas proposiciones. ¿Cómo es posible pues, que frente a semejante contraste entre el atomismo lógico y las investigaciones matemáticas que conducen a estructuras totales, se haya podido pensar en reducir las matemáticas a la lógica?

Por otra parte, una variedad de atomismo aún más sorprendente, se manifestó en las investigaciones realizadas para fundamentar la lógica proposicional sobre los enunciados más elementales posibles. Toda una corriente lógica se orientó, en efecto, hacia la reconstrucción de las estructuras interproposicionales a partir de enunciados de "hechos", concebidos como la traducción del contacto más simple

1 Nicod, 1917.

entre el sujeto y un dato inmediato y sensorial. Tememos que, en este punto, la preocupación fisicalista de lógicos como Wittgenstein (al comienzo de su carrera) y los vieneses, haya conducido sus análisis lógicos a dejarse influenciar, pese a ellos, por cierta psicología (pues no es posible dejar de inspirarse en la psicología del sentido común cuando se decide hacer abstracción de toda psicología): en efecto, no es posible jamás llegar a tomar contacto con un hecho dado, incluso bien delimitado, ni tampoco llegar a enunciarlo, sin hacer referencia a sistemas de conjunto. A este respecto, conviene naturalmente distinguir con cuidado la cuestión de la formalización lógica misma (sobre la que volveremos, Cap. I, § 3), y el problema de las presuposiciones o de las eventuales correspondencias psicológicas, a las que nos limitamos en esta exposición preliminar. Ahora bien, desde este último punto de vista, resulta contrario a todos los datos psicológicos conocidos actualmente, imaginar que se puedan alcanzar hechos aislados: es posible sí disociarlos luego, pero el tomar contacto con un hecho supone necesariamente una organización que abarca gran número de conexiones con otros hechos. Las mismas percepciones no alcanzan sino relaciones interdependientes y permanecen relativas a las acciones, frente a las cuales desempeñan el papel de índices o señales. El lenguaje no confiere significado a una palabra más que en relación a todo un sistema de significaciones. En cuanto a las operaciones del pensamiento, hemos visto ya (§ 2) que no se constituyen nunca en forma aislada, sino que se apoyan unas sobre otras en sistemas de conjunto caracterizados por su composición reversible: no podría existir así una clase o una relación, sin hacer referencia a las clasificaciones, seriaciones, etc. El enunciado de hecho más individualizado resulta así solidario de un sistema de estructuras que lo trascienden y respecto a las cuales se halla situado. Es tan imposible psicológicamente "describir" o "enunciar" un hecho aislado, como determinar, en un espacio métrico, la posición de punto sin un sistema de referencias o de coordenadas.

Si las estructuras de conjunto desempeñan un papel similar, tanto en el dominio abstracto de las matemáticas como en el dominio concreto de las operaciones mentales, es seguramente legítimo (sin que ninguna consideración extralógica intervenga en el seno de la demostración lógica misma) preguntarse si no reencontraremos en lógica totalidades operatorias semejantes. Ahora bien, resulta de gran interés constatar, no solamente qué estructuras similares puedan construirse

con términos puramente lógicos, sino más aún, que su intervención permita ordenar los resultados conforme a una filiación más natural que el análisis atomístico (el término "natural" está tomado tanto en un sentido intrínseco como extrínseco). Es lo que trataremos de mostrar en la presente obra desde el doble punto de vista de la lógica proposicional y de la de clases y de relaciones.

Ahora bien, es preciso seguir un orden de presentación adecuado al querer intentar dicha correspondencia entre los dos dominios de la lógica. Dos razones nos han llevado a comenzar por las operaciones de clases y de relaciones, en lugar de partir del cálculo proposicional como se hace comúnmente. La primera es que la formalización no constituye un estado sino un proceso, de ahí el interés por seguir las etapas mismas de la formalización, procediendo de lo más concreto a lo más abstracto. La segunda es que ciertas operaciones de clases y de relaciones forman ya un todo acabado en sí mismo, pero a la primera potencia; se puede concebir entonces a las operaciones proposicionales como superiores a las precedentes y conduciendo no obstante sobre sus resultados (puesto que una proposición es, en su contenido, una operación de clases o de relaciones): las operaciones que combinan entre sí proposiciones serán pues operaciones a la segunda potencia, y el orden seguido por la formalización creciente coincidirá así con el de las potencias operatorias (es lo que veremos a partir de los § 1 y § 2).

PRIMERA PARTE

LAS OPERACIONES INTRAPROPOSICIONALES

PROBLEMAS PRELIMINARES: PROPOSICIONES, CLASES Y RELACIONES

Antes de poder abordar el cálculo de clases y de relaciones, es preciso dilucidar cierto número de cuestiones previas: delimitación de los dominios intra e interproposicional, rol de las funciones proposicionales, relaciones entre la forma y el contenido, etc. A estas discusiones preliminares se halla dedicado este primer capítulo.

§ 1. PROPOSICIONES, OPERACIONES INTRAPROPOSICIONALES Y OPERACIONES INTERPROPOSICIONALES.

La lógica clásica distinguía los conceptos, los juicios y los razonamientos, constituidos estos últimos por una composición de juicios. En cuanto a los conceptos, fueron concebidos en primera instancia como existentes en sí mismos, estáticamente, el juicio consistía desde este punto de vista en una composición de conceptos. Luego se vio que los conceptos se derivaban ellos mismos de juicios anteriores y prefiguraban a su vez un conjunto de "juicios virtuales" [1]. La lógica clásica fue conducida así a poner en evidencia la primacía del juicio en tanto acto operatorio. Pero dejó en suspenso un problema esencial: ¿el razonamiento, se basa entonces en una pura combinación formal entre los juicios, o depende de los conceptos relacionados entre sí mediante aquellos, es decir de los términos mismos de esos juicios?

Semejante problema muestra de entrada la necesidad de formalización: pues sólo un simbolismo preciso permite plantearlo de ma-

1 Goblot, 1918, pág. 87.

nera adecuada, y distinguir al partir del juicio, las dos categorías de operaciones en cuyo estudio se divide toda la lógica.

Expresaremos ante todo el juicio por una proposición p; es esta una condición de toda formulación, puesto que un juicio implícito o inherente a una acción muda no podría analizarse con exactitud.

Definición 1. — *Llamaremos "proposiciones" p, q, r, etc., a los enunciados categóricos, verdaderos o falsos, y afirmativos (positivos) o negativos.*

Los signos que sirven para formular el enunciado pueden ser los del lenguaje corriente o de un simbolismo convencional. Decir que el enunciado es categórico excluye los imperativos y los optativos, pero no excluye que la verdad o falsedad de la proposición se plantee a título de simple hipótesis. Decir que el enunciado es verdadero o falso implica que presenta un significado, por oposición a los enunciados desprovistos de sentido. La verdad y la falsedad son los dos únicos valores posibles en lógica bivalente, pero se pueden agregar otros en lógicas polivalentes (lo ni verdadero ni falso, lo probable, etc.). Escribiremos p, q, r para las proposiciones afirmativas (positivas) y $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$ para las negativas, entendiendo que, positiva o negativa, toda proposición es o bien verdadera o bien falsa. Más aún, diremos que si p es verdadera, $\bar{p}$ es falsa, y que si $\bar{p}$ es verdadera, p es falsa.

Puede concebirse entonces un conjunto de operaciones consistentes en componer una proposición con otra o consigo misma, a fin de obtener una nueva proposición bien determinada en cuanto a su valor de verdad. Por ejemplo, el condicional $p \supset q$ (si p entonces q) será una nueva proposición, falsa en el único caso en que p sea verdadera y q falsa; la conjunción $p \cdot q$ (p y q) será una nueva proposición, verdadera solamente si p y q son ambas verdaderas, etc.

Llamaremos tales operaciones "interproposicionales" y las definiremos del siguiente modo:

Definición 2. — *Se llamará "operación interproposicional" toda composición que permita construir, mediante proposiciones cualesquiera, p, q, r, de las cuales solo se conocen sus valores de verdad o falsedad, otras proposiciones bien determinadas, y caracterizadas respectivamente por las distintas combinaciones posibles de esos únicos valores de verdad.*

Puede concebirse también un conjunto de operaciones consistentes en transformar las proposiciones por descomposición de cada una de

ellas en sus elementos y por modificación de los elementos así separados. Por ejemplo, en una proposición como "esta rosa es roja" puede reemplazarse "esta rosa" por otros términos ("esta bandera", "todas las rosas", etc.) o incluso modificar la relación "es" ("esta rosa supera en belleza a aquella", etc.). Tales son las operaciones intraproposicionales.

Definición 3. — *Llamaremos "intraproposicionales" las operaciones que permiten descomponer una proposición en sus elementos (esta descomposición puede hacerse a distintos niveles), así como construir nuevas proposiciones determinadas por las transformaciones de esos elementos; los valores verdaderos o falsos de las proposiciones así obtenidas, resultan entonces de las combinaciones entre los elementos mismos.*

En lo referente a las relaciones entre los juicios y los razonamientos, se ve inmediatamente la ambigüedad que la lógica clásica deja subsistir en cuanto a la noción de la estructura formal del razonamiento. "Razonar —dice por ejemplo L. Liard— es inferir; inferir es extraer una proposición de una o varias proposiciones en las cuales se halla implícitamente contenida. Si la inferencia se hace sin intermediarios es entonces inmediata (...); si se hace con la ayuda de intermediarios, es entonces mediata[1]". Ahora bien, tanto las inferencias inmediatas entre proposiciones generales y especiales o singulares, como las inferencias mediatas o silogismos, tratados por la lógica de Aristóteles, se basan en la distinción del "todos" y el "algunos". Decir que "todos los hombres son mortales; Sócrates es hombre; luego Sácrates es mortal", es en efecto, descomponer las proposiciones en clases, incluir la clase de los hombres en la de los mortales y concluir de la pertenencia de Sócrates a la primera clase, su pertenencia a la segunda. Es pues fundamentar el razonamiento sobre los conceptos en extensión como acabamos de hacerlo, o en comprensión (por una jerarquía de predicados). Pero se puede fundamentar también el razonamiento sobre la sola combinación interproposicional de los juicios:

$$(p \supset q) \cdot (q \supset r) \rightarrow (p \supset r)$$

1 LIARD, sin fecha, pág. 31.

es decir, "si p entonces q y si q entonces r, implica que si p entonces r". Tales razonamientos, largamente ignorados bajo esta forma general por la lógica clásica, pertenecen en consecuencia a un nivel de formalización mucho más elevado que el de la silogística, como el análisis simbólico lo ha puesto en evidencia.

En cuanto a las relaciones entre los conceptos y el juicio, no pueden ser establecidos más que por descomposición de éste a través de un juego de operaciones intraproposicionales. Pero importa sobre todo recalcar que dicha descomposición supone diversos grados. Lo que significa, por una parte, que el análisis con que se contentó la lógica clásica no constituye sino una primera aproximación: la logística distinguió más tarde clases y atributos de distintos tipos, y sobre todo una "lógica de relaciones" ignorada por Aristóteles que reducía todo a la cópula "es". Pero esto significa igualmente, que toda descomposición en elementos primeros ("hechos" atómicos, etc.) permanece siempre relativa, y que dichos elementos no adquieren su propiedad de ser primeros más que según el modo de descomposición que depende él mismo del modo de recomposición que se tenga en vista.

§ 2. LA NOCION DE ESTRUCTURA FORMAL Y LA DISTINCION ENTRE FORMAS Y CONTENIDOS.

La distinción de las operaciones en intra e interproposicionales pone ya en evidencia la existencia de dos tipos de conexiones que pueden calificarse ambas como formales, pero que testimonian grados distintos de formalización. Sería erróneo pues creer que el nivel inferior no pudiese ser caracterizado por una estructura formal que se bastase a sí misma. "La lógica de proposiciones es o quiere ser (...) una lógica formal"[1], dice sin embargo Serrus, mientras que la de relaciones "no es ya una disciplina formal"[2] porque sus principios "dependen de la consideración del objeto"[3]. Es perfectamente exacto que la lógica intraproposicional conduce, en un sentido que definiremos enseguida, sobre el *contenido* de las proposiciones por oposición

1 SERRUS, 1945, pág. 15.
2 SERRUS, 1945, pág. 197.
3 SERRUS, 1945, pág. 15.

a la *forma* constituida por sus relaciones; es pues menos formal que la teoría de las operaciones interproposicionales. Pero este *contenido* posee él mismo una *forma* constituida por las estructuras de clases y de relaciones, y existen *contenidos* de un nivel aún inferior en relación a esa *forma*, es decir que son contenidos de esa forma, la cual es ella misma contenido de las formas interproposicionales. Por ejemplo, la relación de inclusión $A \subset B$, es una forma que puede tener como contenido la inclusión concreta "Pájaros $\subset$ Vertebrados", pero que es ella misma contenido, a título de realización particular, en la forma general de la implicación p implica q (por ejemplo "El "canario es un pájaro" implica "el canario es vertebrado").

No es legítimo pues sostener que la lógica intraproposicional dependa de la consideración del objeto, mientras que la lógica interproposicional sería la única "pura". Ambas constituyen formalizaciones de operaciones, es decir elaboraciones formales referentes a esos tipos de realidades que, psicológica y epistemológicamente, constituyen acciones del sujeto sobre los objetos; pero ambas retienen de las operaciones sólo sus coordinaciones estructurales a fin de reconstruirlas deductivamente. Uno de los dos dominios de la lógica es así, desde este punto de vista, más "puro" o más formalizado que el otro, pero se trata de grados y no de una oposición de naturaleza. Cuando se habla, por ejemplo, de la transitividad de una relación simétrica cualquiera que presenta esa propiedad, $x_1 = x_2$, $x_2 = x_3$, luego $x_1 = x_3$, se expresa un carácter propio de la operación general de sustitución, sin invocar los innumerables modelos que podrían realizarse a partir de allí: no se encuentra pues en ella la referencia al objeto, sino solamente a la acción operativa bajo su forma más depurada. Cuando se pasa, por otra parte, de esta forma general a otras más especiales como por ejemplo la identidad $x_1 = x_1$, la equivalencia cualitativa o intensiva $x_1 \overset{a}{\longleftrightarrow} x_2$ [1] (o más aún, como veremos en el § 19, a las múltiples formas de equivalencia lógica), la igualdad entre dos números (o equipotencia de dos conjuntos), se desciende naturalmente de lo más formal a lo menos formal, pero son todavía las estructuras formales lo que se estudia: no las propiedades de los objetos particulares, sino las propiedades estructurales de las operaciones que pueden efectuarse sobre los objetos al reunirlos bajo la forma de clases con estructuras especializadas; son pues siempre las propiedades estructurales las que interesan a la

1 x_1 y x_2 poseen ambos la propiedad *a*. Cf. § 6.

lógica, aún cuando intenta alcanzar las más elementales de las mismas.

Conviene definir pues lo que se entenderá por *estructuras*, por *fomas* y por *contenidos*. Según Wittgenstein. la estructura de la proposición está caracterizada por lo que queda de ella si no se habla más que de *hechos* cualesquiera, p, q, r, de *objetos* cualesquiera x, y, z y de *predicados* cualesquiera, a, b, c, es decir, en lenguaje corriente, si no se razona más que sobre proposiciones cualesquiera cuyos términos sean también cualesquiera. Extraer la "estructura" de un sistema de enunciados consistirá pues en substituir cada uno de los términos concretos empleados y cada una de las relaciones inter o intraproposicionales, por otros términos, pero cualesquiera, y designados por símbolos abstractos. Se ve así, que existirán grados distintos de formalización: Whitehead y Russell (en la segunda edición de los *Principia*) parten de proposiciones que enuncian un hecho determinado para pasar enseguida a proposiciones cada vez más generales (con predicados determinados y objetos indeterminados o a la inversa, y finalmente con objetos y predicados cualesquiera). Por eso importa precisar nuestro vocabulario en lo que concierne a las formas y los contenidos.

Sean las tres proposiciones $p \supset q$, $q \supset r$ y $p \supset r$. Poco importa que cada una de las dos primeras sea verdadera o falsa, su conjunción implicará siempre la tercera, lo que podemos escribir:

$$(p \supset q) \cdot (q \supset r) \rightarrow (p \supset r).$$

Puede ser naturalmente que $p \supset q$ y $q \supset r$ sean ambas verdaderas, o sea, que en cierto sentido "p implique q" y "q implique r". Pero se advierte ya la diferencia entre los dos casos del verbo "implicar". La implicación simbolizada $\rightarrow$ consiste en construir la proposición $p \supset r$ a partir de las otras dos que son dadas. Se podrá decir pues, en el caso en que una proposición condicional $p \supset q$ sea verdadera debido al contenido de p y de q, que se está en presencia de una *implicación material*. En el caso que una proposición condicional sea verdadera, independientemente del valor de verdad de sus componentes, estaremos frente a una *implicación formal.*

Como en la equivalencia lógica:

$$(p \supset q) \longleftrightarrow (\bar{p} \vee q),$$

decir que "*p* implica materialmente *q*" equivale a decir que se tiene "*no-p* o *q*". Esta definición pone en evidencia el carácter de simple hecho que expresa la implicación $p \supset q$, puesto que está simplemente dada: que haya que elegir entre *no-p* o *q* (o ambos, pero siempre con exclusión de *no-q* y *p*); si esta alternativa no es el resultado de una construcción formal anterior, no podría provenir, en efecto, más que del contenido de las proposiciones. De manera general, el dato preliminar que consiste en considerar como distintas las proposiciones *p, q, r* no podría referirse igualmente más que a su contenido. La construcción formal no se ocupa, efectivamente, del contenido de las implicaciones materiales $p \supset q$, y $q \supset r$, ni del de las proposiciones distintas *p, q* y *r*, sino que las considera simplemente como datos con sus distinciones: pero este dato se refiere necesariamente a un contenido. Podemos pues, en ese caso, imaginar otro criterio que el de Wittgenstein, y considerar las implicaciones materiales $p \supset q$ y $q \supset r$ como contenidos, en relación a la construcción formal que conduce a $p \supset r$: el contenido equivaldría así al dato y la forma a la construcción.

Se advierte inmediatamente que ambos criterios tienden a coincidir, salvo que el segundo muestra mejor el carácter relativo o móvil de las nociones de forma y contenido. Ambos convergen, en efecto, pues lo terminado coincide de hecho con lo dado, y lo cualquiera con lo construido. La diferencia entre un término cualquiera *x* y un término determinado x_1, es que el primero resulta de sustituciones indefinidas entre x_1, x_2, etc., por lo tanto ya de una construcción. En el caso de las implicaciones material y formal, la implicación $p \supset q$, que es dada, es además menos cualquiera que la constituida por la inferencia $(p \supset q) \,.\, (q \supset r) \rightarrow (p \supset r)$, ya que ésta sería igualmente verdadera aún cuando las dos primeras implicaciones fuesen ellas mismas construidas, mientras que en el caso particular $p \supset q$, es verdadera sólo en tanto dada. En síntesis, existen diversos grados entre lo determinado y lo cualquiera, y estos grados convergen con los de lo dado y lo construido.

Podemos definir pues la forma como lo que permanece inalterable en una relación operatoria cuando se realizan las sustituciones de los datos, y el contenido como constituido por estos datos mismos, los cuales pueden presentar sin embargo todos los grados de determinación.

Definición 4. – *El "contenido" de una relación operatoria está constituido*

por los datos, es decir, los términos que pueden ser sustituidos, mientras que la "forma" es lo que permanece inalterable en el curso de tales sustituciones.

Por ejemplo, en la construcción $(p \supset q) \cdot (q \supset r) \rightarrow (p \supset r)$, las implicaciones dadas $(p \supset q)$ y $(q \supset r)$ constituyen el contenido de la relación, mientras que la implicación que las une a la conclusión $(p \supset r)$ constituye la forma. Pero la implicación material $(p \supset q)$ es ella misma forma en relación al conjunto de proposiciones no cualesquiera sustituibles por p y q en la relación $p \supset q$ en que representa la forma general. La implicación material es pues a la vez contenido y forma, contenido en relación a la forma en la que ella entra como elemento, y forma en relación a las proposiciones más determinadas para las cuales representa la clase, es decir, el producto formal de las operaciones de sustitución.

Examinemos ahora el caso de una de esas proposiciones determinadas $p_1 \supset p_1$ o $p_2 \supset q_2$, por las que ha sido sustituida $p \supset q$. Dicha implicación material particular permanecerá como contenido en tanto desempeñe el papel de dato, pero tomará el rango de forma en tanto sea posible construirla. Lo cual puede hacerse pero mediante operaciones intraproposicionales, es decir estructuras de rango inferior a las formas interproposicionales. Supongamos así que p_1 signifique "x_1 es un A" y que q_1 signifique "x_1 es un B", ambos términos A y B representarán dos clases tales que A estuviese incluida en B (luego $A \subseteq B$). En ese caso, la implicación material $p_1 \supset q_1$ será verdadera, no ya en tanto dada, sino en tanto exprese las relaciones existentes entre un elemento x_1 de A y la inclusión de A en B. Será pues forma en relación a un contenido de nivel inferior constituido por las clases A y B, la pertenencia de x_1 a A y la inclusión de A en B.

En cuanto a las clases A y B, pueden a su vez estar dadas o construidas, constituyendo en este segundo caso formas con contenidos variables (según las operaciones de adición de las subclases, de reunión de los individuos, de intersección, de correspondencia, etc.). Y si en lugar de analizar las clases analizamos las relaciones entre los términos individuales, reencontramos las dos posibilidades: relaciones dadas a título de contenidos de una construcción formal, o relaciones construidas por medio de otras relaciones más elementales dadas a título de contenido.

En síntesis, la forma y el contenido lógicos de las relaciones operatorias son relativos uno respecto del otro, y, en consecuencia, indi-

sociables. Pero para poder discutir los problemas que plantea dicha cuestión, es preciso introducir aún dos definiciones:

Definición 5. — *Llamaremos "estructura" toda relación lógica susceptible de desempeñar alternativa o simultáneamente, el rol de forma y contenido.*

Definición 6. *Llamaremos "contenido extralógico" los términos que no puedan desempeñar más que el rol de contenidos.*

Cada estructura constituye así una forma en relación a las estructuras de rango inferior que abarca en su composición, y un contenido en relación a las estructuras superiores que la utilizan a título de dato o materia de construcción. Más precisamente, cada estructura es a la vez construcción (forma) respecto de formas inferiores, y aplicación (contenido) en relación a las superiores. Es por eso que la noción de "formal" que caracteriza a la lógica, se refiere a un proceso continuo de formalización y no a una situación estática.

Pero entonces se plantean, naturalmente, dos problemas esenciales. En primer lugar, ¿existe en la cima de dicha jerarquía de estructura, una forma pura que no sea más que forma y no ya contenido, y que constituya así la forma de todas las formas, o, dicho de otro modo, que desempeñe el papel de lógica general o norma suprema? ¿O bien la cima del edificio permanece abierta? Tal es sin duda, el problema esencial de la lógica matemática. En segundo lugar, ¿en qué consiste la base del edificio, se encuentran necesariamente en ella contenidos que permanecen puramente contenidos, sin ser formas de nada? ¿Estos contenidos extralógicos pueden reconocerse en el pasaje brusco que salta del símbolo del individuo lógico, por ejemplo x_1, al individuo empírico [1] denotado por aquel y que le sirve así de contenido último? ¿O bien, por el contrario, nos encontramos en presencia de una regresión indefinida, tal que los datos lógicos iniciales, elegidos siempre arbitrariamente, constituyan simplemente lo que se podría llamar "estructuras individualizadas" susceptibles de servir a la vez de contenido a las formas superiores, y de forma a un contenido convencio-

1 Notemos que el individuo empírico puede ser tanto un objeto mental como un objeto físico, ya que la lógica no tiene por qué disociar el objeto de la acción efectuada sobre él. RUSSELL niega a un "unicornio" existencia lógica: pero, entonces ¿los rayos N o los *Bathybius Haeckeli* constituirían seres lógicos mientras creyésemos en ellos, y perderían dicha existencia conceptual una vez reconocida la ilusión?

nalmente considerado como extralógico, lo que equivale a decir, aún no formalizado? Es este segundo problema el que examinaremos ahora.

§ 3. LAS PROPOSICIONES ELEMENTALES Y LA INDIVIDUALIZACION DE LAS FORMAS.

Si las estructuras lógicas constituyen así una jerarquía de estructuras, de modo que cada una desempeñe el papel de forma en relación a las inferiores y de contenido en relación a las superiores, el problema preliminar de la construcción lógica radicará en determinar en qué consisten los elementos del punto de partida, y cuál es a la vez la relación entre las estructuras elementales (definición 5) y los contenidos extralógicos (definición 6). El problema parece de fácil resolución para un atomismo lógico, y complicado para una lógica de las totalidades; pero quizás esta apariencia sea doblemente tramposa. Wittgenstein y Russell realizaron un esfuerzo admirable para resolver el problema en el terreno del atomismo proposicional, esfuerzo del cual son deudores tanto los que se separaron más tarde de dicho punto de vista, como sus propios partidarios. Existen, según estos autores, enunciados elementales sin generalización, que llevan sobre hechos no descomponibles en otros hechos. Wittgenstein los llama directamente "hechos atómicos" p, q, etc., y Russell "proposiciones atómicas". Una proposición molecular se halla constituida según Russell (por definición) por las proposiciones que puedan formarse componiendo entre sí proposiciones atómicas a través de la relación de incompatibilidad (p/q sea p incompatible con q). Las proposiciones elementales serían así el conjunto de proposiciones atómicas y moleculares. El carácter propio de las proposiciones atómicas sería el constituir enunciados de hechos individuales sin ninguna mención del "todos", "algunos" o del "siempre" y "a veces"; no suponen pues sino términos bien determinados (por oposición a los cualesquiera). No obstante admiten las operaciones de negación ($\bar{p}$), de conjunción ($p \cdot q$), de disyunción ($p \vee q$), todas reducibles a la incompatibilidad.

El problema que plantearemos pues, es el de saber si la noción misma de proposición atómica no es en sí contradictoria. Con esto no queremos decir que existan contradicciones en el cálculo de proposiciones construido por Wittgenstein y Russell, y destinado a servir de

fundamento al cálculo de proposiciones en general. Nos preguntamos simplemente si las así llamadas proposiciones atómicas, son realmente aislables como elementos anteriores a sus mutuas composiciones, y si constituyen de este modo el punto de partida más natural para la construcción del edificio lógico. Creemos, por el contrario, que constituyen siempre el resultado de descomposiciones a partir de estructuras totales más complejas.

¿En qué sentido, en efecto, puede hablarse de proposiciones elementales? Si nos colocamos desde el punto de vista exclusivo de las operaciones interproposicionales, sin considerar el contenido de las proposiciones, una proposición elemental no se distingue entonces de una proposición cualquiera p, q, r, etc., por oposición a sus composiciones ($p \cdot q$ ó $p \supset q$, etc.). No es pues de esto de lo que se trata. Si nos colocamos, por el contrario, desde el punto de vista de las operaciones intraproposicionales, una proposición elemental o atómica se caracterizará por ciertas relaciones entre un predicado determinado (a ó b) y un término individual (x_1 ó x_2) al cual se atribuye el predicado: escribiremos estas relaciones ax_1 ó bx_2, en caso de verdad, y $\overline{bx_1}$ en caso de falsedad. Dos problemas deben distinguirse cuidadosamente a este respecto, sobre los cuales se tiene la impresión que, pese a todo, Russell y Wittgenstein los hubieran dejado en cierto modo interferir: la cuestión del carácter lógicamente primero (o indescomponible) de tales estructuras, y la de sus relaciones con los contenidos extralógicos correspondientes (simplicidad de los hechos individualizados en la realidad).

Ahora bien, el primero de ambos problemas plantea una solución a la cual es difícil escapar; enunciar bajo la forma de una proposición p, una relación entre un término individual x_1 y un predicado a, supone necesariamente ubicar el término individual x_1 en relación con otros términos, no solamente porque la proposición p pueda ser asociada a q, r, etc., sino porque los mismos términos intraproposicionales a y x_1 que la componen, no podrían tener una significación lógica más que conforme a una condición: la de caracterizar a y x_1 en relación con otros términos (b, etc., ó x_2, etc.) tomados de otras proposiciones, o en relación con los mismos términos (a y x_1) que se reencuentran en otras proposiciones y reaparecen en relaciones distintas de ax_1.

No existen, en efecto, más que dos procedimientos para describir,

es decir para aislar el individuo lógico x_1: o bien atribuirle predicados distintos a los de los demás individuos (constituyendo entonces una "clase" singular), o compararlo con todos los demás términos por medio de "relaciones" en las que él mismo sería uno de ellos. Supongamos primero que el término individual x_1 no presenta más que un carácter distintivo a que lo diferencia de x_2, x_3, etc., calificados por b, c, etc. Lo que equivale a decir que existen dos clases, de las cuales la clase X contiene los individuos que tienen la cualidad a, y la otra X' contiene los individuos que no tienen esa cualidad, o si se quiere, que tienen la cualidad complementaria $\bar{a}$. Se tendrá pues:

$$X = \mathrm{d}f\{x \mid ax\} = \{x_1\} \quad \text{y} \quad X' = \mathrm{d}f\{x \mid \bar{a}x\} = \{x_2, x_3, \ldots\}$$

Si se establece: $X \cup X' = \mathrm{d}f\, Y$, se tendrá:

$$(0) \qquad X' = Y - X.$$

Además, si se establece igualmente:

$$X_1 = \mathrm{d}f\{x \mid bx\} = \{x_2\} \quad \text{y} \quad X_2 = \mathrm{d}f\{x \mid cx\} = \{x_3\}, \text{ etc.,}$$

será posible construir las subclases de Y:

$$K_1 = \{x_1, x_2\}, \qquad K_2 = \{x_1, x_3\}, \text{ etc.}$$

y se tendrá:

$$(0') \qquad \{x_1\} = K_1 - \{x_2\} = K_2 - \{x_3\}, \text{ etc.}$$

Lo que equivale a decir que el término x_1 no se caracteriza únicamente por la presencia del predicado a, sino también por la ausencia de b, c, etc. (es decir, por $\bar{b}$, $\bar{c}$, etc.), y que estas presencias o ausencias bastan ya para constituir un conjunto de subclases determinadas, es decir, una clasificación. La parte común de las clases K_1, K_2, etc., serán entonces igual a X, y la suma de las partes no comunes equivaldrá a X'. Supongamos ahora que x_1 en lugar de estar caracterizado por la cualidad positiva a, fuese reconocible solamente por la ausencia de las cualidades b, c. etc. Esto equivaldría a definir el predicado a

por la ausencia simultánea de las cualidades *b*, *c*, etc., lo cual no cambiaría nada lo que precede: el hecho atómico será siempre solidario de una clasificación de conjunto.

Admitamos finalmente que la diferencia entre el hecho individualizado x_1 y los otros hechos x_2, x_3, etc., sea una diferencia de grado, expresable en más o menos. Lo que significará entonces que el término x_1 se distinguirá de x_2, x_3, etc., por un juego de relaciones asimétricas. Si designamos con una flecha ($\rightarrow$ ó $\leftarrow$) las relaciones que expresan una diferencia orientada, tendremos:

$$(0'') \qquad (x_1 \rightarrow x_2) \text{ ó } (x_1 \leftarrow x_2); \qquad (x_1 \rightarrow x_3) \text{ ó } (x_1 \leftarrow x_3); \text{ etc.}$$

En este caso (fig. 1) el término x_1 se distinguirá bien de x_2, x_3, etc., de los cuales será no obstante, y por esto mismo, solidario, gracias a la existencia de un sistema de relaciones.

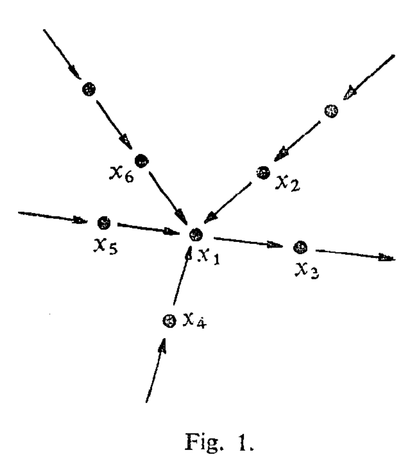


Fig. 1.

En síntesis, aún cuando no se perciban más que las diferencias entre x_1 y los demás términos individuales x_2, etc., estas diferencias suponen o bien una clasificación (0) ó (0') o un sistema de relaciones (0''). Dicho de otro modo, un hecho individualizado es necesariamente o bien una clase singular que resulta de la intersección de varias subclases, o bien un centro de relaciones que constituye la interferencia de múltiples cuplas o de seriaciones más complejas. En ambos casos, la individualización misma del hecho, así llamado atómico, es el resultado, ya sea de una descomposición en el interior de cierto número de otras clases, ya sea de un establecimiento de relaciones en el interior de un sistema de relaciones. Son estas clases y estas relaciones asimétricas las que únicamente permiten la elaboración de las operaciones proposicionales a las que Wittgenstein somete sus proposiciones atómicas. La posibilidad misma de estas proposiciones supone ya una

clasificación o un sistema de relaciones previos. En efecto, Wittgenstein ha reconocido con profundidad, que las primeras proposiciones que enuncian un "hecho" se construyen mediante negaciones a partir de otros "hechos": ahora bien estas negaciones e incompatibilidades no son más que la expresión proposicional de sustracciones de clases de forma (0) y (0') ó de diferencias asimétricas de forma (0''). En cuanto a las operaciones de disyunción, implicación, etc., traducen en términos interproposicionales las interferencias o las inclusiones propias de esas clases y de los campos de esas relaciones (ver § 28).

Se puede resolver pues el primero de los dos problemas suscitados anteriormente cuando se negó la existencia lógica de elementos atómicos. Todo elemento individualizado es solidario de una forma, la cual se halla a su vez subordinada a un sistema de formas superiores. Las formas más elementales, es decir las estructuras (definición 5), más individualizadas, son clases singulares o relaciones entre un solo término y otro. Pero toda clase singular es solidaria de otras clases y por lo tanto, de una clasificación de conjunto. En cuanto a la relación más simple, depende a su vez de establecimientos de relaciones que la superan. Así, la identidad, que constituye simultáneamente el principio de la clase singular y la más individualizada de las relaciones (relación entre un término y otro que se reduce a él mismo), ha sido invocada con razón por Russell como criterio para las "descripciones" individuales[1]: ahora bien, la identidad no tiene de simplicidad lógica más que el hecho de constituir un límite para la equivalencia (o identidad parcial) y para la diferencia (al ser la equivalencia una diferencia nula); en efecto, la identidad $x_1 = x_1$ supone una delimitación entre lo que es idéntico a x_1 y lo que no lo es dentro del conjunto de hechos al que pertenece x_1. Así, la identidad misma no podría caracterizarse más que en función de las demás relaciones que la desbordan.

Podemos considerar ahora el segundo problema: ¿en qué consiste el contenido extralógico (definición 6) de las formas más simples, es decir de la clase singular y de la relación de identidad? En otros términos, ¿qué significa un "contenido" que no sea "forma" de nada, si todo individuo considerado por la lógica es necesariamente miembro de una clase y término de una relación? ¿Estamos finalmente frente a un verdadero hecho atómico, es decir a un elemento prelimi-

1 RUSSELL, 1928, pág. 211.

nar aislado? No es así de ningún modo. Tanto psicológicamente como epistemológicamente, sin que la lógica haya de tomar posición sobre este punto, un hecho o un objeto individualizado son siempre relativos al corte exigido por la acción del sujeto, y en consecuencia, relativos a las estructuras perceptivas o intelectuales de conjunto que los asimilan (y que se acomodan luego a ellos): desde este punto de vista, no existen pues hechos aislados y los elementos individuales no son anteriores a los sistemas que constituyen entre sí, sino sólo descomponibles en función del conjunto de cada sistema. Desde el punto de vista lógico, que es el único que nos preocupa aquí, es exactamente igual: el dato individual que sirve de contenido a la forma más simple (por ejemplo, un guijarro en tanto que individuo, único miembro de una clase singular, y único término de una relación de identidad) no constituye un elemento indescomponible más que relativamente al sistema de operaciones consideradas. Al construir otro sistema de clases y de relaciones, el elemento individual del primer sistema puede transformarse en forma de rango superior en el segundo sistema (el mismo guijarro considerado como colección de corpúsculos o como un haz de relaciones geométricas, etc.). El último término del análisis lógico es pues relativo esencialmente al edificio formal que asegura su individualización, es decir que esta individualización misma depende de la totalidad del sistema. El contenido individualizado de las formas lógicas no es por lo tanto extralógico más que en la medida exacta en que haya sido dado y no construido operatoriamente como lo son las clases, relaciones y proposiciones cuya elaboración se basa en estructuras operatorias de conjunto. Pero los calificativos de dado o de extralógico no significan que se alcancen así elementos primeros en sí mismos, tanto desde el punto de vista físico como psicológico o lógico. De lo que se deduce que el sistema de las estructuras se halla siempre abierto por su base, es decir susceptible de dar lugar a análisis ulteriores más finos, así como a nuevas formalizaciones de contenidos considerados hasta entonces como dados y extralógicos. Esta abertura hacia la base es seguramente un obstáculo para todo sistema atomístico que proceda del elemento a la totalidad; pero no expresa, por el contrario, más que la infinita diferenciación posible de las totalidades en los sistemas lógicos basados en las relaciones de conjunto del todo a la parte.

§ 4. LAS FUNCIONES PROPOSICIONALES, LAS CLASES Y LAS RELACIONES.

Hasta ahora hemos traducido las operaciones intraproposicionales en términos de clases (y de relaciones), como si la noción de clase lógica fuese de una validez evidente. Ahora bien, luego de haber sido objeto de una admirable reorganización en los trabajos de Russell, la lógica de clases fue abandonada por él en tanto fundamento del edificio lógico, e incluso, en tanto necesidad formal en general, por razones sutiles que trataremos de examinar ahora.

La noción capital que se debe a Russell y que une de la manera más natural la noción de clase a la de proposición (al punto que hizo caso inútil a sus ojos la existencia misma de las clases) es la noción de "función proposicional". Es el pasaje de la proposición como tal a la función proposicional, lo que introduce pues al estudio de las operaciones intraproposicionales.

Una proposición p es verdadera o falsa, y es exclusivamente a título de tal que interviene en el cálculo de proposiciones, es decir en la lógica de las operaciones interproposicionales. Caracterizada por sus únicos valores de verdad y de falsedad, no supone pues ninguna cuantificación explícita, y las expresiones "uno", "algunos", "todos", etc., no interesan así directamente a la lógica proposicional, dado que son relativos al contenido de la proposición, y por lo tanto a las operaciones intraproposicionales.

Pero, un término determinado de una proposición puede ser sustituido por un término cualquiera: la proposición "esta rosa es roja" se transformará así en "x_1 es roja" y si designamos el hecho de ser roja por a, escribiremos la proposición ax_1. En cuanto a la expresión ax, es decir "x es roja", no podemos afirmar que sea verdadera ni falsa. Este enunciado no sería siempre verdadero, puesto que ciertos términos determinados x_1 y x_2 por los que podemos sustituir x no son rojos: las proposiciones ax_1 y ax_2 serían entonces falsas. Pero el enunciado ax no es tampoco siempre falso: él no es en sí mismo ni verdadero ni falso, y no constituye ya una proposición, dado que el carácter esencial de una proposición es precisamente el de ser verdadera o falsa (definición 1). Lo llamaremos con Russell "función proposicional", y designaremos bajo el nombre de "argumento" el término x, considerando a como la función misma:

Definición 7. — *Una función proposicional ax es un enunciado ni verdadero ni falso, pero susceptible de adquirir un valor de verdad o de falsedad según la determinación de los argumentos que sustituyan al argumento indeterminado x.*

Al tomar la variable x sus valores de un conjunto dado, es posible transformar aún la función proposicional ax en una proposición (verdadera o falsa) de dos modos. Se puede afirmar, con o sin razón, que todos los x gozan de la propiedad a, lo que escribiremos $(x)ax$, o que al menos un x goza de la propiedad, lo que escribiremos $(\exists x)ax$ Las nociones de "todos", "algunos" y "ninguno", ligados por la silogística a la teoría de las proposiciones, se expresan así en términos de funciones proposicionales por las palabras "todos", "alguno(s)", "ninguno", o incluso "siempre", "algunas veces", "jamás". Ahora bien, al expresar estas nociones esencialmente una estructura de encajes de clases, se percibe el parentesco entre la noción de función proposicional y la de clase lógica. A una función proposicional ax, puede asociársele una clase, la de los elementos que la satisfagan, sea $\{x \mid ax\}$, clase que, eventualmente puede ser vacía. Recíprocamente, cada clase puede ser definida por alguna función proposicional que será verdadera para los miembros de esa clase y falsa para los miembros de la clase complementaria.

Pero el pasaje de la función proposicional a la clase supone ciertas precauciones. Unas se refieren a la "teoría de los tipos" que excluye a las clases que se comprenden a sí mismas como elementos (por ejemplo, la clase de todas las clases). Otras conciernen a la existencia misma de las clases en tanto estructuras lógicas fundamentales, y es en este último punto donde Russell introdujo las modificaciones que nos es preciso examinar ahora.

Una clase lógica no podría concebirse, en efecto, como una simple colección de individuos: la mejor prueba, dice Russell, es que una clase puede ser vacía. Es preciso agregar que, cuando existen, los individuos de una clase son cualificados y constituyen por lo tanto, objeto de proposiciones. Así, la clase no se reduce a una colección física, pero resulta de la sustitución de un individuo por otro en el seno de una proposición: la primera condición de la existencia lógica de una clase es pues la construcción de una función proposicional (equivalente lógico de lo que psicológicamente es un esquema de asimilación conceptual).

Pero esta asimilación no basta, según Russell. Además de las con-

diciones restrictivas propias de las clases matemáticas (conjuntos), que no interesan aquí (ver Cap. IV), Russell formula la siguiente exigencia: dos funciones proposicionales "formalmente equivalentes", es decir siempre equivalentes, deben aplicarse a los mismos objetos, mientras que dos funciones no formalmente equivalentes deben determinar objetos diferentes. Ahora bien, si toda función proposicional corresponde a una clase, se tendrán entonces varias clases para los mismos objetos, lo que está excluido. "Dos funciones proposicionales $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ –dice Russell– son formalmente equivalentes, cuando $\varphi(x)$ es siempre equivalente a $\psi(x)$. Pero ocurre que hay otras funciones formalmente equivalentes a una función dada, lo que hace imposible la identificación de una clase con una función, puesto que no podría ser que las clases fuesen de tal modo que dos clases distintas tuviesen exactamente los mismos miembros"[1]. Se trata en consecuencia, del hecho de que dos funciones formalmente equivalentes determinan la misma clase. Pero, según Russell, esto no es siempre posible. Existen, en efecto, proposiciones que él llama *extensivas*, que conservan el mismo valor de verdad si se sustituyen en ellas funciones proposicionales equivalentes. Así, la proposición "la raíz cuadrada de 16 es 4" es extensiva en el sentido de que si a la función proposicional "x es cuatro" se la sustituye por la función equivalente "$x = 2 + 2$", la proposición sigue siendo verdadera. Por el contrario, la proposición "Russell dice haber encontrado un hombre" sería *intensiva* en el sentido que, pese a la equivalencia entre "x es un hombre" y "x es un animal racional", no dice que haya encontrado un animal racional. En este caso, no habría correspondencia unívoca entre la clase y la función.

Semejante manera de concebir las relaciones lógicas es seguramente sorprendente (lo que explica por qué Wittgenstein trató de separar a la vez la noción de clase y la de "proposición intensiva"). Pero es perfectamente consecuente con el atomismo lógico, que revela así un atomismo gramatical o verbal. Si una proposición puede ser analizada en sí misma, independientemente de todo sistema de clases o de relaciones que impliquen ciertas leyes de totalidad, es evidente que se tiene el derecho de considerar las proposiciones "El signo IV designa el cuarto número cardinal" y "El signo 4 designa el cuarto número cardinal" como conteniendo dos funciones formalmente equi-

1 RUSSELL, 1928, pág. 218.

valentes ("x es IV" y "x es 4"), y enseguida declarar que en la proposición "El escribió 4", la función "x es IV" no puede ser sustituida por la función "x es 4". Pero, en una lógica de las totalidades está permitido preguntarse si el hecho que 4 no sea equivalente a IV en la proposición "El escribió 4", no es contradictorio con la afirmación de que IV y 4 son "siempre equivalentes". Dicho de otro modo, si nos colocamos desde el punto de vista de las estructuras de conjunto, es preciso decir en primer lugar, que no podría aislarse una proposición de su contexto sin caer en el verbalismo, y en segundo lugar, que la equivalencia supone niveles jerárquicos y, en consecuencia, significaciones distintas; no existen pues términos "siempre equivalentes" a excepción de la identidad estricta.

En el ejemplo de los signos 4 y IV, podemos construir una clase singular A que comprenda sólo "el signo 4" y una clase complementaria A' que comprenda todos los demás signos, aparte de 4, que representen al cuarto número cardinal". Esta clase A' comprenderá entonces el signo IV. Reunidas una a la otra, las dos clases A y A' constituyen entonces la clase $B = A \cup A'$, que comprende "todos los signos que representan el cuarto número cardinal". Se puede definir entonces una equivalencia interior a una clase singular, que escribiremos en el caso de A bajo la forma $4 \overset{A}{\longleftrightarrow} 4$, que representa la identidad o autoequivalencia. Por el contrario, la equivalencia entre 4 y IV no es sino relativa a la clase B, por lo tanto, $4 \overset{B}{\longleftrightarrow}$ IV. Es falso pues que 4 sea equivalente a IV desde el punto de vista A, como también lo es desde el punto de vista A', puesto que IV no pertenece a la clase A, ni 4 a la clase A': las expresiones $4 \overset{A}{\longleftrightarrow}$ IV y $4 \overset{A'}{\longleftrightarrow}$ IV son contradictorias con lo precedente, es decir falsas. Por su parte el signo IV constituirá una clase singular A_2, por lo tanto, IV $\overset{A_2}{\longleftrightarrow}$ IV. Además A_2 tendrá como complementaria respecto de B la clase A'_2 $(= B - A_2)$, que comprenderá la clase A, así como la clase A' comprende la clase A_2. Habrá pues tantas formas de equivalencias como clases construidas: la equivalencia será, en este sistema, la co-pertenencia de dos individuos a una misma clase, o la co-inclusión de dos subclases en una misma clase total. Desde dicho punto de vista, que es el de un sistema de conjunto, no es legítimo hablar ya de equivalencia general: se pierde en generalidad, pero se evita la contradicción entre lo "siempre equivalente" y los casos donde no hay precisamente ¡ninguna equivalencia!

Al descartar entonces el problema de las proposiciones intensivas [1], desde el punto de vista de una lógica que subordina los diversos tipos de equivalencias a la consideración de los sistemas de conjunto, es legítimo pues hacer corresponder a toda función proposicional una clase, definida por el conjunto de los valores verdaderos de esa función. Sólo resta no obstante, respetar la jerarquía de las clases no mezclando los valores correspondientes a niveles diferentes. Es lo que Russell observa en su famosa "teoría de los tipos": los individuos serían de tipo (0); las clases que contengan sólo individuos serán de tipo (1); las clases que comprendan clases de tipo (1) serán de tipo (2); etc. El principio esencial de la construcción de las clases será así, no incluir jamás en una clase dada más que clases de tipo inferior a la misma. Volveremos a encontrar el problema a propósito de los "agrupamientos" de clases (Cap. II), donde veremos que las leyes de conjunto propias del "agrupamiento" bastan para resolverlo.

Antes de poder abordar el estudio de esos sistemas de conjunto, limitémonos a definir del siguiente modo las clases, en una primera aproximación:

Definición 8. — *Una clase es el conjunto de términos que pueden ser sustituidos unos por otros, a título de argumentos que confieren un valor de verdad a una función proposicional* [2].

Tal definición equivale a decir, por una parte, que una clase es un conjunto de términos equivalentes desde cierto punto de vista; pero ello implica, por otra parte, que dicha equivalencia debe hallarse subordinada a un juego de sustituciones respecto de las cuales se tratará de fijar las reglas.

En efecto, las proposiciones pueden relacionarse entre sí mediante operaciones, ya sea inter o intraproposicionales; las sustituciones posibles dentro de las funciones proposicionales estarán pues, en una se-

1 Es inútil insistir que la terminología de Russell no coincide con la nuestra en lo que concierne al empleo de las palabras "intensivo" y "extensivo" (ver definiciones 14 y 15).

2 Con todo rigor, habría que distinguir entre los términos y los nombres. Son estos últimos los que pueden ser sustituidos por la variable x de una función proposicional. Así, no podríamos movilizar al Sr. Nixon para que tomara el lugar de x en "El Sr. Nixon es el presidente de los EE.UU.", sino solamente su nombre.

gunda aproximación, determinadas por las leyes mismas de composición de dichas operaciones.

Pero las funciones proposicionales que hemos analizado hasta ahora, no llevaban sino un argumento: ax o bx, etc. Ahora bien, existen funciones con dos argumentos axy, a las cuales se las ha considerado siempre como caracterizando las "relaciones"[1]: en efecto, la función axy se verifica cuando dos términos x_1 y y_1 presentan entre sí la relación a. ¿Basta pues con limitarse, para distinguir las clases de las relaciones, a esta diferencia entre las funciones con un solo argumento ax que corresponderían a las clases, y las funciones de dos o más argumentos axy o $axyz$ que corresponderían a las relaciones? Y la definición 8, en la que no hemos introducido dicha diferencia, ¿no sería entonces demasiado general?

Pero, ese modo de presentar las cosas, si bien es muy frecuente, encubre las dos reservas siguientes. En primer lugar, dos términos x_1 y x_2 que satisfacen alternativamente las condiciones de verdad de la función de un solo argumento ax, mantienen entre sí por lo menos una relación: la relación de equivalencia desde el punto de vista ax, puesto que x_1 y x_2 son ambos sustituibles respecto de x. La clase $[x_1, x_2, \ldots]$ se halla pues cualificada por medio de esta equivalencia misma, que es una relación. En segundo lugar, en la función con dos argumentos bxy, que enuncia una relación entre x e y, la misma se halla constituida nuevamente por el predicado b, es decir por la función como tal, mientras que los términos mismos x e y constituyen lo que se llama el "campo" de la relación, formando así una clase por el hecho de estar ligados por la relación b. Las coincidencias entre las clases y las relaciones son pues mucho más estrechas de lo que podría pensarse en función de los enunciados de uno o varios argumentos ax y bxy.

Pero se plantea aquí una cuestión preliminar: podría ser que las clases fuesen ellas mismas relaciones o viceversa; dicho de otro modo, el problema de la distinción entre ambos tipos de estructuras debe cuestionar, en primera instancia, la legitimidad misma de dicha diferencia. En efecto, una clase es una reunión de términos individuales (o una reunión de otras clases cuyas subclases reúnen siempre, en definitiva, términos individuales), mientras que una relación es por el

1 Por ejemplo, axy significará que x es padre de y.

contrario, lo que permite reunir estos términos según sus equivalencias, u orden, etc.: ¿una clase no es pues ella misma una relación, o una forma particular de relación? No, porque la clase es esencialmente "extensión": está constituida por las x o por las x y las y de las funciones ax y bxy; por el contrario, lo que permite reunir las x o las x y las y, es la función misma a o b que constituye la "comprensión", y que como veremos, es en todos los casos la relación.

En otros términos, puede admitirse que la clase está constituida por su propia "extensión", mientras que la "comprensión" correspondiente consiste en relaciones. Recíprocamente, la extensión de una relación, o más precisamente su campo, no es otro que una clase, mientras que la relación misma en tanto relación, está constituida por su propia comprensión. Es lo que trataremos de justificar, primero directamente, luego (§ 5) por el análisis de los predicados en general.

La lógica tradicional, que no distinguía entre las clases y las relaciones, sino que las reunía bajo el término indiferenciado de "conceptos", oponía por el contrario muy cuidadosamente, la extensión y la comprensión: la extensión es, por definición, el conjunto de individuos a los cuales se aplica (justamente) el concepto, mientras que la comprensión es el conjunto de atributos que poseen en común esos individuos. Dicha extensión corresponde a lo que se llama actualmente la clase, y se puede definir como clase todo concepto en extensión (*cf.* def. 8). Se tratará solamente de determinar si no existe más que una sola forma de clases, tal como las clases no ordenadas, por ejemplo "los hombres", o si no existen clases más o menos estructuradas en función de las relaciones que unen sus términos, como por ejemplo "los padres y los hijos" o "los números enteros", etc. En cuanto a las cualidades que caracterizan la comprensión, el problema es mucho más complejo. La lógica clásica asimilaba todos los juicios a la forma atributiva "x es a", la cópula, como único nexo, era considerada ya fuese como pertenencia ($\in$), o como inclusión ($\subseteq$). De donde resultaba que un juicio como "x es más grande que y" se descomponía en un sujeto "x", un atributo "más grande que y" y la cópula misma "es". Pero, si "los objetos más grandes que y" constituyen una clase, el significado principal del juicio consiste en relacionar ambos objetos x e y a través de la cópula "más grande que" es decir por un predicado que no tiene el mismo sentido atributivo que en "x es grande" y que ya no es atributo en el sentido clásico

del término. Por ello, el lenguaje moderno de las funciones proposicionales distingue cuidadosamente una expresión como "x es grande" que se escribirá ax de una relación "x es más grande que y", que se escribirá axy o bxy, etc.

Sólo que, como ya hemos visto, esta distinción entre las funciones de uno o varios argumentos, no basta para caracterizar la diferencia entre las clases y las relaciones, pues incluso en una función de dos argumentos bxy, los términos x e y constituyen, en tanto términos, una clase; e incluso en una función de un solo argumento ax, la función a constituye una relación respecto de x, así como la función b lo es respecto de x y de y.

En efecto, en toda relación bxy, se distingue el *dominio* de la relación $[x \mid (\exists y)\, bxy]$, es decir el conjunto de los antecedentes; el *codominio* $[y \mid (\exists x)\, bxy]$, es decir el conjunto de los consecuentes; y el *campo*

$$\{ x \mid (\exists y) bxy \} \cup \{ y \mid (\exists x) bxy \}$$

es decir, el conjunto de los antecedentes y los consecuentes. Por ejemplo, el dominio de la relación "marido de la esposa" es el conjunto de los maridos (antecedentes), el codominio es el conjunto de las esposas (consecuentes), y el campo el conjunto de hombres y mujeres casados. El campo de la relación inversa "esposa del marido" será el mismo, pero el dominio y el codominio serán inversos.

Es preciso distinguir además el campo de una relación de lo que los lógicos llaman la extensión de una relación, y que nosotros denominaremos su *alcance*, es decir el conjunto de cuplas ordenadas (y no ya de individuos) que satisfacen la expresión $[(x, y) \mid bxy]$. Es lo que nos permitirá hablar, sin confusión posible, de dominios, codominios y campos, como diversas formas de la extensión de las relaciones. Pero, ¿en qué consisten esas extensiones?

Hay, en primer lugar, un caso particularmente simple: el de las relaciones simétricas, es decir de las relaciones b tal que para todo x e y se tenga la equivalencia $bxy \longleftrightarrow byx$. Así por ejemplo, la relación de igualdad entre clases. La proposición $A = B$ es equivalente a la proposición $B = A$: si la primera es verdadera, la segunda también lo es, y si la primera es falsa, la segunda es igualmente falsa. Las relaciones simétricas se caracterizan pues porque su dominio coincide con

su codominio y con su campo. Por consiguiente, se advierte inmediatamente que las relaciones simétricas caracterizan las clases más simples desde el punto de vista de su estructura: aquellas en que los individuos se reúnen directamente entre sí a través de sus cualidades comunes (por ejemplo, la clase de los objetos del mismo color, en oposición a las cuplas determinadas por la relación "x más rojo que y"). En ese caso, la comprensión que delimita la clase supone al menos una relación: la relación de equivalencia que expresa la coposesión de una misma cualidad ("co-rojos") y que determina la co-pertenencia a la misma clase.

En segundo lugar, tenemos las relaciones asimétricas, es decir tales que cualesquiera que sean x e y: $bxy \rightarrow \bar{b}yx$. Así, si $<$ designa la relación "más liviano que" entonces, si $x_1 < x_2$ es verdadero, $x_2 < x_1$ es falso, de modo que bxy y byx son dos funciones proposicionales diferentes. El dominio de una relación asimétrica es distinto de su codominio: para tres objetos tales que $x_1 < x_2$ y $x_2 < x_3$, el dominio es $[x_1, x_2]$ y el codominio $[x_2, x_3]$. En cuanto al campo, es decir a la clase $[x_1, x_2, x_3]$, se halla definido únicamente por la propiedad de los objetos de poder ser comparados según sus pesos, o sea por la cualidad común "ser pesado". Por el contrario, si se consideran los tres elementos x_1, x_2, x_3, se tendrá nuevamente una clase, pero estructurada por la relación asimétrica en cuestión. En este nuevo caso, resulta claro que la extensión de la relación constituye una clase, mientras que la relación misma está constituida por las relaciones en comprensión ("más o menos pesado", etc.). Podemos dar pues la siguiente definición (en primera aproximación):

Definición 9. — *Una relación es aquello que caracteriza un término por intermedio de otro.*[1]

Tal definición suscita no obstante dos problemas: En primer lugar, la relación, definida así en comprensión, es distinta o no de la operación en general (por ejemplo: $+$ o $\times$, etc.); y, en segundo lugar, abarca todo predicado en comprensión, por ejemplo, la función a en ax, o solamente los predicados de las funciones de dos o más argumentos, por ejemplo b en bxy.

1 Esto es verdadero incluso de la identidad misma, ya que en $x_1 = x_1$, el consecuente es puesto de manera distinta al antecedente, para calificarlo enseguida como sustituible por este último en toda circunstancia.

En lo que concierne al primer punto, se sostiene con frecuencia, tanto en lógica como en matemáticas, que las operaciones consideradas en sí mismas constituyen relaciones. Así, dos clases A y A' pueden ser reunidas en una sola clase total $A \cup A' = B$ y dos clases X e Y pueden tener elementos en común, su multiplicación $X \cap Y$ supondrá así la construcción de una nueva clase Z formada por los elementos que pertenecen a la vez a X y a Y. Las palabras "y" o "a la vez" que expresan las operaciones de reunión o de multiplicación, pueden concebirse entonces como relaciones que unen A a A' o X a Y. Inversamente, podrá sostenerse que toda relación es una operación que consiste en unir los términos, ya que caracteriza unos por intermedio de otros. No existiría así ninguna diferencia de naturaleza entre las operaciones y las relaciones. Pero, si bien es posible efectivamente concebir la construcción de toda relación, y más aún de toda clase, como solidaria de un sistema de operaciones, es indispensable no obstante distinguir estas relaciones (o estas clases), ya sea dadas o construidas, pero que permanecen siempre invariantes en sí mismas, de las operaciones que son precisamente las transformaciones, y modifican las estructuras en que se basan: Wittgenstein mismo, que señala el carácter tautológico de todos los nexos lógicos, define una operación como "lo que hay que hacer" para transformar una estructura en otra. Esta definición, que es la que nosotros adoptaremos completándola con la noción de reversibilidad [1], expresa claramente el carácter constructivo de la operación por oposición a la invariancia de las relaciones, en tanto no se componen entre sí a través de operaciones.

Definición. 10. — *Llamaremos "operación" la transformación reversible de una estructura (def. 5) en otra, ya sea por modificación de la "forma" o bien por sustitución en relación al "contenido".*

Queda claro pues, que las nociones de relación y de operación no podrían de ningún modo confundirse. Por el contrario, si una relación es aquello que caracteriza en compresión un término por intermedio de otro, subsiste aún el problema de saber si esta definición se aplica exclusivamente a las funciones de forma bxy o si se extiende hasta las funciones de tipo ax. Es el problema general del significado de los predicados lo que se plantea: ¿existen predicados en compren-

1 Cf. más abajo § 31.

sión que no sean relaciones? Si no se da tal caso, será evidente que toda función a, tanto de forma ax como axy, será una relación; la única diferencia estará en que en axy la relación está explícitamente planteada como relación (asimétrica o simétrica) entre x e y, mientras que en ax se trata de una relación simétrica que permanece implícita entre los argumentos x_1 y x_2, etc., sustituibles por x.

§ 5. LOS PREDICADOS EN EXTENSION Y EN COMPRENSION.

La diferencia que acabamos de admitir entre las clases y las relaciones es una diferencia de estructura: en una función proposicional cualquiera ax o axy, la clase se halla constituida por el conjunto de términos $[x \mid ax]$ o $[x \mid (\exists y)\, axy] \cup [y \mid (\exists x)\, axy]$, considerados en extensión (definición 8), mientras que la relación es lo que caracteriza unos términos por intermedio de otros (definición 9), es decir es la función misma a considerada en comprensión. Pero entonces, ¿qué es el predicado?

Recordemos en primer lugar que la distinción entre sujeto y predicado es de orden funcional y no estructural; son dos roles distintos que desempeñan los términos en la proposición, pero dos roles relativos esencialmente al orden de las inclusiones: en la proposición "este hombre es negro", "negro" desempeña el rol de predicado, y "hombre" el de sujeto, mientras que en "este negro es hombre" es a la inversa. En cada uno de los casos el lenguaje aísla una de las cualidades del individuo en cuestión para designarlo, y le atribuye otra a título de predicado. El problema que interesa no es pues saber cómo un predicado aislado es atribuido a un sujeto, sino de qué manera se relacionan lógicamente entre sí las distintas cualidades de un individuo o de una clase de individuos: ahora bien, ¿estarán estas cualidades simplemente yuxtapuestas o superpuestas según su presencia o su ausencia dada, o mantendrán entre sí ciertas relaciones susceptibles de una construcción operatoria, tales como las propiedades de un triángulo, de una clase de números, etc.?

Desde este punto de vista, importa mucho más el significado de una proposición que su forma verbal. Esto puede parecer evidente

dado que nos proponemos construir una lógica y no una gramática, no obstante dicha afirmación de principios choca con la corriente nominalista contemporánea. Los lógicos tienen a veces la ambición de llegar a una traducción algebraica fiel de las proposiciones verbales, conforme a todas las formas adoptadas por el lenguaje. De lo que se deriva naturalmente un refuerzo del atomismo lógico, ya que la lengua divide la acción y el pensamiento operatorio en elementos artificiales, mientras que el análisis de los significados pone en evidencia ciertas relaciones no explícitas en la frase, pero que desempeñan no obstante un papel igualmente fundamental [1]. Por otra parte, el lenguaje introduce a menudo, además de las relaciones efectivas, relaciones artificiales que se refieren más a la forma de las palabras que a su sentido. Es así que Russell en su teoría, tan sutil por otra parte, de los predicados de predicados, llega a construir formas lógicas que se adaptan exactamente a ciertas expresiones verbales como "Napoleón tenía todas las cualidades de un gran general". Si nos limitamos sólo al sentido de las palabras, diremos que un "gran general" es un individuo que posee cierto número de cualidades (predicados) a, b, c, etc., y que Napoleón, al haber poseído todas, era, por definición, un gran general. Pero Russell no se limita a esto, sino que quiere formular que el hecho de ser un gran general d implica la posesión de todas las cualidades de ese concepto: por lo tanto, si dx implica ax y si x_1 es un argumento que satisface la función dx, deberá satisfacer también ax. Pero, podemos continuar: "Napoleón posee todas las aptitudes que caracterizan todas las cualidades de un gran general", etc., y estas tautologías no serán ni más ni menos instructivas que la primera. La cuestión es saber si la lógica quiere ser un análisis del lenguaje como tal y limitarse a constituir una lengua universal (un esperanto para uso de los matemáticos), o si quiere alcanzar las conexiones operatorias del pensamiento. Al preferir las ideas a las palabras, es ciertamente importante saber que la posesión de la cualidad común de una clase implica la posesión de todas las demás cualidades generales de esa clase: pero, es todavía más interesante saber según qué estructura se implican una a otras dichas propiedades, y si esta estructura es la

1 Este texto fue escrito antes que se conocieran las gramáticas de Chomsky. *Cf.* Piaget, 1986, cap. V.

misma para todas las clases o si se diferencia en formas heterogéneas [1].

Dicho esto, debemos hacer justicia a Russell por haber puesto en relieve las ambigüedades de la noción gramatical de predicado. Así, no habla sino de *funciones* "siempre" verdaderas o "a veces" verdaderas, donde intervienen el "todos" o el "algunos"; y reserva el nombre de "predicados" para las propiedades que no suponen ninguna generalización. Pero el problema está en decidir si la noción de predicado conserva entonces su utilidad, y si no es preferible atenerse al análisis de las funciones proposicionales en términos de operaciones de clases y de relaciones. Como hemos visto (§ 3), no existen "hechos" individuales, sino solamente "contenidos individualizados" en relación con un conjunto sistemático de otros datos, afirmados o negados según el caso. Es pues dudoso que existan predicados sin generalización: "Esto (x_1) es rojo (a)" significa que "Esto (x_1) tiene el mismo color que otros términos (x_2, x_3, etc.) llamados rojos, pero no el mismo color que todos los objetos coloreados". En el terreno de los predicados como en el de los términos mismos, es fundamental por lo tanto ubicarse desde el punto de vista de las totalidades operatorias efectivas, y es desde este punto de vista que todo predicado se reduce, como veremos, a una relación más o menos simple o compleja.

Consideremos en primer lugar la tabla exhaustiva de los distintos tipos posibles de predicados, antes de traducirlos al lenguaje de las funciones proposicionales. En principio, pueden concebirse los predicados en términos de comprensión y de extensión. En segundo lugar, es posible atribuir los predicados a otros términos simultáneamente que al término considerado, como también atribuirlo sólo a él mismo o incluso a una parte suya. Finalmente, pueden distinguirse los predicados simples y los predicados de predicados (en diversos grados).

Los predicados en extensión fueron admitidos directamente por la lógica clásica "Todos los mamíferos son vertebrados" o "Algunos mamíferos son animales acuáticos", son ejemplos de proposiciones en

1 Es cierto que simbolizar las ideas más que las palabras arriesga limitar el simbolismo, y que es más cómodo atenerse a las expresiones verbales mismas. Pero de todos modos, son límites del simbolismo, ya que no se podría expresar en símbolos los principios del simbolismo ni las definiciones primitivas. Wittgenstein eludió la dificultad elaborando una teoría interesante del símbolo como imagen directa de los objetos. Pero la misma corresponde a la psicología y no a la lógica, y a una psicología discutible: un símbolo es siempre solidario de un sistema de conjunto de significaciones, y es, por naturaleza, refractario a todo atomismo.

las cuales los predicados en extensión se relacionan con otros términos además del término considerado. La proposición "Los animales son seres vivientes distintos de los vegetales'' relaciona el predicado sólo al término considerado. La imprecisión de estas relaciones en extensión condujo a Hamilton a su célebre idea de la cuantificación del predicado, que consiste en traducir todos los predicados en términos de extensión explícitamente determinados: "Todos los mamíferos son vertebrados'' se transforma así en ''Todos los mamíferos son algunos vertebrados''.

La idea fecunda de Hamilton pone en evidencia el hecho de que los predicados en extensión son todos reducibles a operaciones de clases. También la lógica russelliana elimina con razón de la noción de predicado toda intervención de la extensión. Para pasar de las funciones proposicionales a las proposiciones en las que entran en juego el ''todos'' o el ''algunos'', Russell agrega simplemente, como hemos visto (§ 4), un ''cuantificador'', (x), o $(\exists x)$. Estos cuantificadores cumplen el papel de determinación de la extensión, cuya necesidad había visto ya Hamilton, pero al disociar la expresión simbólica de la del predicado a permiten reservar a éste su significado propio, que es relativo a la comprensión. Ahora bien, como la extensión de toda función proposicional constituye una clase (una vez superada, gracias a las equivalencias de distintos órdenes, la dificultad expuesta en § 4), podemos volver al lenguaje de las clases: es lo que haremos en el capítulo II, llevando más lejos aún que Hamilton la cuantificación de las extensiones.

Al quedarnos así reducida la noción de predicado (o de función proposicional por oposición a sus argumentos y a la cuantificación) a la sola comprensión, se tratará entonces de examinar en qué consiste esta última. Trataremos de demostrar que todo predicado en comprensión se reduce a una relación, y que paralelamente a la traducción en operaciones de clases, de los nexos entre el sujeto y los predicados en extensión, es posible también traducir en operaciones de relaciones los nexos entre el sujeto y los predicados en comprensión. Desde este punto de vista, se pueden considerar tres casos: los predicados atribuidos a otros términos además del término considerado, los predicados atribuidos únicamente a dicho término y los que se refieren a una de sus partes.

1º El *primer caso* se presenta bajo dos formas: ax y axy ("x es

rojo" y "x es más rojo que y"). La función axy expresa explícitamente una relación (ver § 4), verifica pues la hipótesis, por lo que es inútil insistir en ello. En cuanto a las funciones de forma ax, conviene advertir en primer lugar, que el lenguaje expresa muy a menudo, por la atribución de un predicado a a un sujeto x, una cualidad esencialmente relativa, cuya significación se refiere necesariamente, aunque de manera implícita, a otros términos sobreentendidos. Cuando se dice "esta montaña es alta" o "esta colina es elevada", los predicados "alta" y "elevada" no tendrían el mismo significado para la colina y la montaña, sino que serían relativos a estos dos términos distintos; a riesgo de expresar una pura tautología, significan por otra parte, que la montaña o la colina en cuestión son más altas o más elevadas que las medidas respectivas de altura de las montañas o las colinas: los predicados o funciones serían así doblemente relativos, pese a la forma absoluta de la afirmación. Lo mismo ocurre con una serie de atributos como "nórdico", "polar", etc., que expresan relaciones complejas bajo una forma predicativa simple.

Pero comúnmente la función ax atribuye sin más a los objetos cualidades absolutas: coloreado, pesado, mentiroso, etc. No obstante, al unir el predicado a al objeto individual x_1, la función ax lo cualifica por medio de una cualidad que pertenece también a x_2, x_3, etc., en síntesis, a todos los individuos de la clase $[x \ ax]$; el predicado a constituye, en efecto, una de las cualidades que pertenecen a la "comprensión" correspondiente a la extensión, y por lo tanto, a la clase. Pero es otra vez, y necesariamente, una relación, ya que se trata de una cualidad atribuida simultáneamente a muchos individuos: de hecho, el predicado a no es otra cosa que una relación de semejanza establecida entre x_1, x_2, x_3 ..., es decir entre todos los x que constituyen una misma clase porque presentan una misma cualidad; escribir ax para designar ax_1, ax_2, ax_3, etc., es establecer entre los términos en extensión x_1, x_2, x_3, ..., una relación de equivalencia a definible por la co-posesión de la misma cualidad. Se podría responder que habría que distinguir en esa cualidad común, la cualidad como tal ("rojo") y el hecho de ser común ("co-rojo"). Pero, desde el punto de vista de la comprensión no existe nada en una cualidad que pueda ser definido, enunciado o considerado, sino en relación con otros objetos que el término cualifica: no hay nada más en el enunciado "x_1 es rojo" que la constatación de una cierta equivalencia cualitativa entre

x_1 y otros términos por medio de los cuales aquél se haya caracterizado (def. 9) [1].

2º Examinemos ahora el *segundo caso:* aquél en que el predicado a se aplica a un solo término individual x_1 y a ningún otro individuo. La cuestión es entonces saber cómo es posible describir el predicado a en tanto cualidad distinta por hipótesis a todas las otras. Hay dos posibilidades: que la cualidad de x_1 esté definida por un juego de relaciones explícitas (x_1 es el término menor de una serie ordenada, o el punto de intersección de dos rectas, etc.) o que esté designada bajo una forma absoluta. La primera posibilidad confirma lo que queremos demostrar. En cuanto a la segunda, no sería posible caracterizar una cualidad absoluta única más que en relación a la especie y a la diferencia individual, la cual consistirá entonces en una negación de las cualidades de los demás individuos de la especie. Se definirá así la cualidad a propia solamente de x_1, por un predicado compuesto tal que $a = \mathrm{d}f\ \overline{ba'}$ (= la cualidad a es una cualidad b pero no a'). Pero, esta función compuesta constituye como veremos (Cap. III, § 19) una de las relaciones del agrupamiento de relaciones simétricas: la *alteridad*, producto de la afirmación de una primera equivalencia y de la negación de una segunda incluida en la primera ("primo hermano" = nieto del mismo abuelo pero no hijo del mismo padre). Desde este punto de vista, las cualidades absolutas, incluso atribuidas a un solo término individual, son en sí mismas relaciones.

3º En cuanto al *tercer caso*, el de los predicados atribuidos a una parte del objeto cualificado, se remite a los precedentes. Si el animal x_1 es único en su género porque uno de sus miembros presenta una mal formación, será posible expresar esa cualidad de acuerdo a varias formas lógicas distintas. Se utilizará en primera instancia la relación de propiedad: tal individuo posee tal carácter (ser vertebrado

1 Se podría, por otra parte, objetarlo (y se trata de una objeción que nos han hecho en particular ciertos matemáticos, quienes al decir "esta piedra es blanca" o "el cielo es azul" no experimentan ninguna "conciencia de relación", sino sólo la impresión de atribuir una cualidad a un objeto). Pero, desde nuestro punto de vista, la lógica no tiene que tener en cuenta las ilusiones de la psicología introspectiva: así como el geómetra no se somete al veredicto de la intuición sensible (como en el caso de curvas sin tangente), sino que la corrige por un análisis más fino, del mismo modo el lógico debe remontarse hasta las operaciones efectivas del espíritu, más allá de las deformaciones de la conciencia o del lenguaje (deformaciones que son, por otra parte, en general convergentes).

significa poseer vértebras, etc.). Desde este punto de vista, toda atribución de cualidades puede reducirse a relaciones semejantes, que se refieran, ya sea a un aspecto, ya sea a una parte del individuo. Pero, es posible igualmente, según operaciones de partición, distribuir los elementos del individuo en clase: un ser vivo será así una clase de órganos, una línea, un conjunto de puntos, etc. Esta partición da lugar así a nuevas operaciones de extensión: la cualificación de dichas clases y de sus elementos se reducirá entonces a su vez, a la construcción de relaciones de distintos tipos que nos conducirá nuevamente a los casos precedentes.

Podemos concluir pues, que, en todos los casos, la atribución de predicados a términos individuales o colectivos, atribución que caracteriza su "comprensión", se reduce a la construcción de un sistema de relaciones. El problema esencial que se plantea entonces es determinar qué relaciones mantienen entre sí los predicados, en el caso de "predicados de predicados". Russell, según su punto de vista habitual, ha tratado (con pleno éxito) de extraer bajo su forma más general, la estructura de los predicados de predicados, construyendo un formulario válido tanto para los predicados matemáticos como para los no matemáticos. Pero, si todo predicado es una relación [1], el problema de los predicados de predicados se convierte así en el de las relaciones de relaciones: se hace así más interesante abordarlo, desde el punto de vista de la diversidad de tipos de organización posibles, que desde el de la generalidad más grande y más formal. Un ser vivo puede ser a la vez cuadrumano, mamífero y vertebrado: ahora bien, si cuadrumano implica mamífero, y mamífero implica vertebrado, la recíproca es sin embargo válida, y estas implicaciones no traducen sino inclusiones de clases construidas a través de funciones proposicionales. En efecto, se puede definir la cualidad mamífero sin referirse a la cualidad vertebrado, y la cualidad cuadrumano sin referirse a la cualidad mamífero: no habría ninguna contradicción lógica en construir idealmente un ser que fuese cuadrumano y no poseyera glándulas mamarias, o que poseyera tales glándulas sin poseer vértebras. Desde ya que no se encuentran empíricamente tales seres, lo que hace pensar que hay incompatibilidad entre las propiedades características de los

1 Esto se hace evidente en matemáticas, donde todo predicado es una "propiedad", y una propiedad matemática no puede ser más que una relación, en el sentido lógico del término.

invertebrados y la posesión de manos o glándulas mamarias. Pero, en tanto no sea posible deducir, por medio de operaciones definídas, las relaciones que unen estos órganos a las vértebras, semejantes correlaciones permanecerán como simples hechos constatados: no hay construcción posible de relaciones de unos a partir de otros, y las implicaciones en cuestión son por lo tanto dadas y no deducidas. Comparemos ahora un vertebrado mamífero y cuadrumano con un triángulo euclidiano cuyas propiedades son, entre otras, ser cerrado, trilátero, triangular y presentar 180º como valor total de sus ángulos; cada cupla de estas cuatro propiedades implica las otras dos, es decir que cada una de estas propiedades consiste en relaciones susceptibles de ser engendradas por operaciones definidas (a partir de nociones topológicas de cerramiento y de dimensiones, hasta la medida de los ángulos). Los predicados en juego son pues nuevamente relaciones, pero esas relaciones consisten esta vez en "estructuras" (definición 5) más elaboradas y que no se refieren ya directamente a contenidos extralógicos (definición 6) como en el caso del vertebrado cuadrumano. La cuestión esencial nos parece entonces no ya saber si el hecho de ser cuadrumano o triángulo implica por ello todas las propiedades, sino más bien determinar qué relación existe entre las cualidades (por consiguiente, entre las relaciones) que caracterizan tanto una clase cuya "comprensión" esté poco formalizada como la de los cuadrumanos, como una clase cuya "comprensión" no suponga sino relaciones esencialmente construidas y bien estructuradas como la clase de los triángulos.

Desde el punto de vista de una lógica de las totalidades, el problema esencial que suscitan las relaciones entre los predicados es pues el de las diversas "estructuras" posibles (def. 5) de las clases en extensión y de las relaciones en comprensión. Desde tal punto de vista, es ilegítimo asimilar sin más bajo el nombre de clases, estructuras tan diferentes por su grado de formalización como la clase de los invertebrados y la de los números enteros. Según una clase sea engendrada por un simple sistema de encajes o por una "ley de formación" —es decir justamente, por una construcción posible de relaciones unas a partir de otras— su estructura operatoria será distinta, y las relaciones entre los predicados que definen su comprensión, presentarán formas distintas. Para resolver tal problema, es preciso abordar entonces las relaciones entre la comprensión y la extensión en general.

§ 6. LAS RELACIONES ENTRE LA COMPRENSION Y LA EXTENSION Y LAS DIVERSAS ESTRUCTURAS DE CLASES.

Si las clases corresponden a la extensión de los conceptos y las relaciones a su comprensión, el problema de las relaciones entre la comprensión y la extensión podrá ser esclarecido por el análisis de las relaciones entre las clases y las relaciones.

La lógica clásica, que ignoraba la estructura de las relaciones, consideraba al predicado, ya fuese como una clase más general que la del sujeto, que incluía a este último, o bien como una cualidad comprendida entre las del sujeto; la extensión y la comprensión se volvían así exactamente simétricas según dos sistemas de inclusiones inversos uno respecto del otro. De ahí la famosa ley según la cual la extensión está en razón inversa a la comprensión: Dios es el único que posee todas las cualidades, tendría pues una extensión *minimum* y una comprensión *maximum*, mientras que el ser en general supone una extensión ilimitada y una comprensión mínima. Ahora bien, es muy importante constatar que esta ley, exacta en lo concerniente a las clases menos estructuradas, deja de serlo en el dominio de las clases ordenadas o cualificadas por ciertas relaciones. Así, por ejemplo, la ecuación general de las secciones cónicas corresponde a una clase de extensión mayor que la de las parábolas, ya que la parábola no es sino una de las especies correspondientes al género constituido por las secciones cónicas: no obstante, esta ecuación general supone una comprensión mayor que la de la parábola, ya que la contiene a título de caso particular que puede ser extraído de la ley general. Se trata pues de comprender por qué esta ley de la proporción inversa entre la comprensión y la extensión no es válida sino en ciertos dominios, y extraer la diferencia entre las distintas estructuras de clases según que cumplan o no la ley en cuestión. Es sorprendente comprobar lo poco que se ha interesado la lógica por el problema de la estructura interna de las clases: la tendencia atomística, por una parte, al considerar una clase independientemente de sus relaciones con las demás clases, y por el otro, la búsqueda de elementos comunes entre la lógica matemática y la lógica elemental, han concurrido a centrar el interés sobre los aspectos más generales de las clases, más que sobre sus es-

tructuras diferenciadas. No obstante, una discusión semejante había sido suscitada por las dificultades inherentes a los conjuntos infinitos y a la intervención de propiedades que se referían a la totalidad misma de los conjuntos considerados, dificultades que condujeron a cierto ostracismo respecto a las definiciones predicativas, y en base a ese paliativo surgió la teoría de los tipos de Russell: en lugar de investigar el problema, la lógica trató más bien de evitarlo.

Partamos de dos extremos. La forma más simple de clases es sin duda la que caracteriza la definición *per genus et differentiam specificam.* Tales son las clases utilizadas por la sistemática zoológica, como la de los mamíferos cuadrumanos discutidos en el § 5. Lo propio de estas clasificaciones es invocar exclusivamente propiedades que pueden ser descritas para cada clase independientemente de los predicados de las clases superiores o inferiores: el hecho de poseer glándulas mamarias puede ser enunciado, en efecto, sin hacer referencia a las vértebras ni a la presencia de cuatro manos. Poincaré llama *predicativas* tales clasificaciones y las opone a las clasificaciones *no-predicativas* en las cuales "el principio (...) se basa en alguna relación del elemento a clasificar con la colección entera". De ahí se desprenden dos categorías: "Las clasificaciones predicativas que no pueden ser modificadas por la introducción de nuevos elementos; las clasificaciones no-predicativas, en las cuales la introducción de nuevos elementos obliga a cambios continuos"[1]. Pero si bien las definiciones predicativas que, pese a Russell han seguido siendo utilizadas por los matemáticos, no conciernen sino a algunos conjuntos infinitos, es posible en mayor medida y desde un punto de vista análogo, diferenciar los distintos tipos de clases. Si comparamos, en efecto, la relación de los mamíferos con los vertebrados, con la del círculo respecto de la ecuación general de las secciones cónicas:

$$Ax^2 + A'y^2 + Bxy + Cx + C'y + D = 0$$

(ecuación en la que se tiene para el círculo $A = A'$ y $B = 0$), vemos inmediatamente que el círculo no es simplemente una sección cónica (*genus*) más cierto número de propiedades agregadas a las de las secciones cónicas, pero sin relación directa con las propiedades genéricas: mientras que las relaciones que definen las glándulas mamarias

1 Poincaré, 1913, págs. 104-105.

no podrían engendrarse por una simple transformación de las relaciones que caracterizan a los vertebrados, las propiedades del círculo resultan de transformaciones de las de la elipse, la parábola, etc., y son justamente estas transformaciones posibles, que conducen de una subclase a otra manteniendo siempre ciertas invariantes, las que caracterizan la clase general de las secciones cónicas. Las propiedades de la subclase o especie "círculo" se refieren así, en este sentido, a las de la clase general o género "sección cónica", mientras que la diferencia específica "glándulas mamarias" se agrega simplemente, sin composición constructiva a la cualidad genérica "vertebrado". Igualmente la clase de los "números pares" presenta una diferencia específica (multiplicación de n por 2) que se refiere necesariamente a las cualidades del género "números enteros", ya que la operación ($n \times 2$) implica la unidad 1 respecto de la cual la iteración $+ 1$ define la serie de los números enteros: no tenemos ya en este caso "géneros" ni "especies", al menos en el mismo sentido que antes, sino clases caracterizadas por una ley interna de construcción que engendran sus elementos unos en función de otros.

Ahora bien, entre estas dos estructuras se intercala un *tertium*. Si seriamos diferentes objetos x_1, x_2, x_3, ..., según una diferencia ordenada cualquiera (por ejemplo, de más en más pesado), resulta claro que una diferencia parcial (x_1, x_2) puede caracterizarse independientemente de las diferencias de orden superior (x_2, x_3) ó (x_1, x_3). Por el contrario, las diferencias totales constituyen la "suma" de las diferencias parciales:

$$(x_1, x_3) = (x_1, x_2) \circ (x_2, x_3)$$

y dependen así de ellas. En este caso no hay ya heterogeneidad entre la subclase $[x_1, x_2]$ y la clase superior $[x_1, x_2, x_3]$ como en el ejemplo de las clases definidas por *genus et differentiam specificam.* Y no obstante, no hay ninguna ley de transformación que me permita obtener la diferencia (x_2, x_3) a partir de (x_1, x_2). Las dos diferencias se hallan simplemente reunidas por la operación "o" de modo de construir la diferencia total (x_1, x_3).

Conviene pues distinguir por lo menos tres estructuras de clases.

Sean las clases $A = \mathrm{d}f\{ x \mid ax \}$, $B = \mathrm{d}f\{ x \mid bx \}$, $C = \mathrm{d}f\{ x \mid cx \}$, etc., en las que supondremos que $A \subseteq B \subseteq C$. Hemos visto ya (*cf.* § 4)

que si dos términos x_1 y x_2 son elementos de B, podemos escribir $x_1 \overset{B}{\longleftrightarrow} x_2$, es decir: x_1 y x_2 son equivalentes en relación a la clase B. Pero, como B se define por la propiedad característica b, resulta cómodo escribir $x_1 \overset{b}{\longleftrightarrow} x_2$ para marcar la co-posesión por x_1 y x_2 de la cualidad b.

Definición 11. — *Llamaremos "debidamente estructuradas" las clases tales que los individuos que pertenecen a una de ellas (por ejemplo B) se relacionan entre sí por la posesión de ciertas cualidades comunes b propias de esa clase, sin que ninguna operación dada permita construir, a partir de esas propiedades b, las cualidades c, etc., propias de las clases C, etc., en las cuales la clase B se halla incluida, ni tampoco las cualidades propias de la clase A incluidas en B.*

NOTA I. — Las relaciones $\overset{a}{\longleftrightarrow}$; $\overset{b}{\longleftrightarrow}$; $\overset{c}{\longleftrightarrow}$; etc., que intervienen en la definición precedente son las que constituyen la comprensión correspondiente a las clases A, B, C, etc. Por ejemplo, la relación $\overset{a}{\longleftrightarrow}$ que existe entre los individuos de la clase A, significará que poseen en común los caracteres específicos de los cuadrumanos; la relación $\overset{b}{\longleftrightarrow}$ definirá igualmente la clase B de los Mamíferos por la posesión en común de glándulas mamarias y la relación $\overset{c}{\longleftrightarrow}$ la clase C de los vertebrados por la cualidad común de poseer vértebras. Llamaremos *equivalencias cualitativas* a tales relaciones [1].

NOTA II. — La definición 11 significa pues que las relaciones $\overset{a}{\longleftrightarrow}$; $\overset{b}{\longleftrightarrow}$, etc., que cualifican las clases débilmente estructuradas constituyen propiedades *dadas* y no construidas, es decir, que no se puede transformar $\overset{b}{\longleftrightarrow}$ en $\overset{c}{\longleftrightarrow}$ o en $\overset{a}{\longleftrightarrow}$: no se puede, en efecto, engendrar las manos de los cuadrumanos (A) o las vértebras de los vertebrados (C) a partir de las glándulas mamarias de los mamíferos (B).

NOTA III. — No hay que confundir las equivalencias cualitativas $\overset{a}{\longleftrightarrow}$; $\overset{b}{\longleftrightarrow}$; $\overset{c}{\longleftrightarrow}$; etc., con otras relaciones que es posible extraer de las clases A, B, C, etc., por ejemplo la pertenencia $x \in A$ o la inclusión A $\subseteq$ B. Estas inclusiones pueden componerse mediante operaciones tales como $(A \subseteq B) \cdot (B \subseteq \cdot C) \cdot \supset (A \subseteq C)$ y se pueden extraer asimismo implicaciones como por ej.

$$(x)(x \in A \supset x \in B), \quad (x)(x \in B \supset x \in C) \quad \text{y} \quad (x)(x \in A \supset x \in C).$$

Pero estas operaciones no equivalen de ningún modo a la construcción de las relaciones $\overset{a}{\longleftrightarrow}$, $\overset{b}{\longleftrightarrow}$, $\overset{c}{\longleftrightarrow}$ unas a partir de otras: se limitan a construir los encajes entre las clases (con sus relaciones asimétricas de pertenencia e inclusión) y a extraer de estos encajes un juego de proposiciones que se encadenan necesariamente unas a otras, una vez admitidos los datos.

1 Ver más adelante § 8, defin. 16 y prop. 1-2.

Definición 12. — *Consideremos los objetos x_1, x_2, x_3, x_4, etc., seriados según sus diferencias (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), etc. Si se tiene $(x_1, x_3) = (x_1, x_2)$ o (x_2, x_3); $(x_1, x_4) = (x_1, x_3)$ o (x_3, x_4), sin que exista ninguna operación que permita componer las diferencias (x_1, x_3), (x_1, x_4) a partir de la sola diferencia (x_1, x_2), las clases*

$$A = \mathrm{d}f\{ x_1, x_2 \}, \qquad B = \mathrm{d}f\{ x_1, x_2, x_3 \}, \qquad C = \mathrm{d}f\{ x_1, x_2, x_3, x_4 \}, \qquad etc.$$

serán llamadas "semi-estructuradas".

Nota IV. — Nuevamente aquí como en el caso de las clases debilmente estructuradas, las relaciones parciales en juego son dadas y no construidas, pero las relaciones totales constituyen sin más la suma de las relaciones parciales.

Supongamos por el contrario una serie de intervalos decrecientes según una ley determinada (como los segmentos iguales de una recta, pero vistos en perspectiva a la manera de una "fuyante"). En este caso, una operación dada (en este ejemplo: una transformación proyectiva) permite construir las relaciones sucesivas (es decir, la longitud de los segmentos vistos en perspectiva y sus diferencias) a partir de una cualquiera de ellas, no estamos pues ya frente a una clase semi-estructurada, según la definición 12, sino frente a una clase "estructurada" (definición 13).

Definición 13. — *Llamaremos "clases estructuradas" aquellas clases en las que a partir de las propiedades (relaciones) que caracterizan a una sub-clase A, es posible, a través de operaciones dadas, componer las relaciones características de las demás subclases A', A", etc., así como las relaciones que definen la clase total B (o recíprocamente, componer las propiedades de A o de A', A", etc., a partir de las de B).*

Nota V. — La mayor parte de las clases matemáticas son estructuradas, pero no todas. De un "grupo fundamental" geométrico, como por ejemplo el de las "afinidades", es posible, a través de ciertas operaciones que conciernen o no a las rectas, paralelas, ángulos y distancias, deducir las propiedades de sus subgrupos (similitudes y desplazamientos) o remontarse a las de los grupos que lo engloban (proyectividades y homeomorfias). Por el contrario, los subconjuntos de un conjunto cualquiera no constituyen por sí mismos un sistema de clases estructuradas.

Introducidas estas distinciones, es fácil ver que la ley de proporcionalidad inversa entre la extensión y la comprensión se aplica a las clases débilmente estructuradas, pero no es válida en el caso de las clases semiestructuradas o estructuradas. En el primer caso, en efecto, para tres clases *A*, *B*, *C* de extensión creciente, es decir, tal que *A* esté incluida en *B* y *B* en *C*, la comprensión de la clase *A* supone, además de la cualidad *a*, los caracteres *b* y *c*; por el contrario, la comprensión de *B* posee los caracteres *b* y *c*, pero no *a*; la comprensión de *C* posee la cualidad *c*, pero no *a* ni *b*. De lo que resulta que cuanto mayor

extensión suponga una clase débilmente estructurada menos rica será en comprensión: en una palabra, la "especie" tiene una comprensión más rica que el "género", puesto que posee además de los caracteres genéricos la diferencia específica, mientras que la comprensión del género posee los primeros pero excluye la segunda.

Por el contrario, en el caso de una clase semiestructurada, la comprensión aumenta con la extensión, puesto que cuanto mayor extensión posee la clase, más numerosas son las relaciones entre los términos, y puesto que estas relaciones parciales entran en la comprensión de la relación total. Sea la serie $x_1 < x_2 < x_3$ (por ejemplo: x_1 más liviano que x_2 y x_2 más liviano que x_3): la clase $[x_1, x_2, x_3]$ presenta una extensión más grande que la clase $[x_1, x_2]$ pero tiene también una compresión más rica, ya que la relación $x_1 < x_3$ comprende las relaciones $x_1 < x_2$ y $x_2 < x_3$; la comprensión se halla pues en razón directa a la extensión. Semejante razonamiento no podría aplicarse a las inclusiones de clases débilmente estructuradas; sea por ejemplo: (Cuadrumanos) $\subseteq$ (Mamíferos) $\subseteq$ (Vertebrados) que simbolizaremos también por $A \subseteq B \subseteq C$. En efecto, en el caso de los encajes entre estas clases, intervienen, contrariamente a lo que ocurre en la seriación de términos según el orden de una sola relación asimétrica (más o menos pesado), las clases A' (Mamíferos no cuadrumanos) y B' (vertebrados no mamíferos): de lo que resulta que no se podría seriar ya el conjunto de los términos, ya que si bien se tiene $A \subseteq B \subseteq C$, no se tiene en cambio $A \subseteq A'$ ni $A \supseteq A'$ (ni $B \subseteq B'$ ni $B \supseteq B'$). Es precisamente la falta de un orden único lo que hace que el sistema sea débilmente estructurado y no semiestructurado: al derivar la comprensión necesariamente de la definición por los caracteres genéricos y las diferencias específicas, hay por lo tanto proporcionalidad inversa entre comprensión y extensión. Por el contrario, en el caso de las clases semiestructuradas la comprensión se deriva de una sola relación asimétrica aplicada a todos los términos (conexidad), hay pues orden único y proporcionalidad directa entre comprensión y extensión.

Finalmente, en las clases estructuradas resulta claro que la comprensión aumenta igualmente en razón de la extensión, ya que las propiedades de la clase total comprenden, a título de casos particulares, las de las subclases parciales.

Trataremos ahora de analizar la extensión misma, es decir, la cantidad correspondiente a las clases en tanto reunión de individuos,

en oposición a las relaciones que determinan sus cualidades en comprensión. Se encuentra entonces una diferencia fundamental, no ya entre la primera forma (débilmente estructurada) y las otras dos, sino entre las dos primeras formas (débilmente y semiestructuradas) y la tercera (clases estructuradas). Dicha diferencia es la misma que nos servirá de criterio general para la distinción entre la lógica y las matemáticas.

Comencemos por dos definiciones, en las cuales el término "relación cuantitativa" significa la igualdad o desigualdad respecto a la extensión:

Definición 14. — *Llamaremos "intensivas" las relaciones cuantitativas que comprenden exclusivamente la desigualdad de la parte respecto del todo, o la identidad, sin consideración de las relaciones cuantitativas entre una parte y las demás partes disyuntas pertenecientes al mismo todo, o entre las partes de un todo y las correspondientes a otra totalidad.*

Definición 15. — *Llamaremos "extensivas" las relaciones cuantitativas entre clases disyuntas, especialmente las relaciones entre una parte y las demás partes de un mismo todo, o entre una parte y otras partes cualesquiera pertenecientes a otras totalidades.*

Definición 15 bis. — *Distinguiremos entre las relaciones extensivas las relaciones numéricas (o métricas) que implican la iteración de una unidad y las relaciones extensivas simples que incluyen las relaciones cuantitativas entre partes disyuntas, pero sin iteración de unidades.*

NOTA VI. — Llamaremos "cantidades intensivas" a las cantidades formadas únicamente por relaciones intensivas, y "cantidades cualesquiera" las constituidas indiferentemente por relaciones intensivas o extensivas. Emplearemos, por otra parte el término "clases intensivas" para las clases cuya cuantificación permanezca exclusivamente intensiva: las clases intensivas están constituidas, como vamos a mostrar, por las clases débilmente estructuradas y las semi-estructuradas.

Se advierte inmediatamente la importancia de las distinciones precedentes: decir que las estructuras lógicas se basan en una cuantificación exclusivamente intensiva, es afirmar, en efecto, que no es posible en lógica ninguna comparación de las extensiones entre clases disyuntas; por el contrario, la cantidad matemática al ser cualquiera, abarca tanto las relaciones cuantitativas entre clases disyuntas como también entre clases incluidas.

En lo que respecta a las clases débilmente estructuradas, hemos

constatado que, salvo en el caso de la clase vacía o de las clases singulares, su extensión sólo puede ser conocida en relación a la de las clases incluyentes o a la de las clases incluidas. Sea por ejemplo *B* la clase de los mamíferos, incluida en una clase *C* (vertebrados) y que incluye una clase *A* (cuadrumanos); no conocemos más que una sola cosa de las extensiones respectivas de *A*, *B* y *C*: que $B > A$ y que $B > C$[1]. Que haya un solo mamífero no cuadrumano (clase A') o un número tan grande como se quiera, y un solo vertebrado no mamífero (clase B'), no influye para nada en la construcción de estas clases: sabemos solamente que las extensiones de *A*, *B* y *C* presentan la relación cuantitativa $A < B < C$, pero no sabemos nada de las extensiones respectivas de las clases disyuntas *A* y A', *B* y B': sabemos, por otra parte, que se cumple también $A' > B$ y $B' > C$, porque A' está incluida en *B* y B' está incluida en *C*, pero si nos atenemos a las "formas" propias de las clases débilmente estructuradas, las relaciones de extensión entre *A* y A', o entre *B* y B', permanecen indeterminadas. Solamente las clases singulares o las clases nulas poseen una extensión determinada en sí misma, ya que se reducen al individuo o al cero lógico. Pero, el "uno" lógico no equivale a la unidad aritmética, ya que ignora la iteración:

$$\{ \text{Sócrates} \} \cup \{ \text{Sócrates} \} = \{ \text{Sócrates} \}$$

y no a 2 Sócrates. Se define, en efecto, por la identidad, lo que significa que los elementos de una clase singular son todos idénticos entre sí (ya se trate de Sócrates, del maestro de Platón, del esposo de Xantipa o del filósofo condenado a beber la cicuta), sin que intervenga a su vez ninguna composición cardinal. En cuanto a las clases nulas, resultan de la sustracción lógica $A - A = 0$. Podemos concluir pues de lo que precede, que la extensión de las clases débilmente estructuradas conoce sólo las cantidades: *todos, algunos, uno* y *ninguno* (con sus negaciones). Sin prejuzgar pues sobre la naturaleza de la cantidad matemática, podemos construir una lógica de las clases débilmente estructuradas, la cual deberá construirse en primera instancia para sí misma, antes de poder decidir sus relaciones con la lógica de los conjuntos o clases matemáticas.

1 Las escrituras simbólicas $B > A$, $B < C$, etc., son abreviaciones de: la extensión de $B >$ extensión de A, la extensión de $B <$ extensión de *C*, etc.

En cuanto a las clases semiestructuradas, es preciso distinguir dos cosas: la extensión de las clases como tales, es decir las colecciones de individuos ordenados por relaciones asimétricas transitivas, y estas relaciones en tanto relaciones en comprensión. Pero, como en esas estructuras hay correlación directa entre la extensión y la comprensión, las relaciones de diferencias ordenadas que constituyen esa comprensión expresan precisamente una noción de graduación "intensiva" que corresponde bi-unívocamente a las relaciones cuantitativas de extensión (las cuales se basan también en la cantidad intensiva). Tomemos un conjunto de objetos seriados según una cualidad multivalente cualquiera (una serie de botellas de vino, por ejemplo, ordenadas según su calidad): x_1, x_2, x_3, x_4, etc. Las relaciones que unen estos objetos expresan pues las diferencias x_2 de x_1, x_3 de x_2, etc. Llamemos $\xrightarrow{a}$ la relación que une x_1 a x_2, $\xrightarrow{a'}$ la que une x_2 a x_3, $\xrightarrow{b'}$ la que une x_3 a x_4, etc., según la cualidad considerada. Es posible entonces componer estas relaciones como lo hicimos con las diferencias:

$$\xrightarrow{a} \circ \xrightarrow{a'} = \xrightarrow{b} \quad \text{como} \quad (x_1, x_2) \circ (x_2, x_3) = (x_1, x_3)$$

$$\xrightarrow{b} \circ \xrightarrow{b'} = \xrightarrow{c} \quad \text{como} \quad (x_1, x_3) \circ (x_3, x_4) = (x_1, x_4), \text{ etc.}$$

Si establecemos que $A = df\ [x_1, x_2]$, $A' = df\ [x_2, x_3]$, $B = df\ A \cup A'$, etc., constatamos entonces que existe entre las relaciones $\xrightarrow{a}$, $\xrightarrow{a'}$ y $\xrightarrow{b}$, las mismas relaciones que hemos deducido entre las clases A, A' y B: sabemos que la diferencia $\xrightarrow{a}$ es menor que la diferencia $\xrightarrow{b}$, ya que ésta engloba a aquélla; que la diferencia $\xrightarrow{b}$ es menor que la diferencia $\xrightarrow{c}$ por la misma razón, etc., dicho de otro modo, hay menos diferencia entre A y B que entre A y C; entre A y C que entre A y D, etc. Pero no sabemos nada de las relaciones entre $\xrightarrow{a}$ y $\xrightarrow{a'}$; entre $\xrightarrow{b}$ y $\xrightarrow{b'}$; etc., o entre $\xrightarrow{a'}$ y $\xrightarrow{b'}$, etc. Hay pues nuevamente cantidad intensiva y nada más (en cuanto a las relaciones de equivalencia, las mismas constituyen desde este punto de vista, relaciones de diferencia nula).

Si traducimos ahora en términos de extensión estas relaciones de diferencias ordenadas, resulta claro (dada la correlación directa observada entre comprensión y extensión) que reencontraremos nuevamente una cuantificación intensiva, pero expresada esta vez en términos de clases y no ya de relaciones. En efecto, las clases de términos ordenados que corresponden a las relaciones precedentes, son ellas mismas

de extensión creciente: a la relación $\xrightarrow{a}$ corresponde la clase $[x_1, x_2]$, a la relación $\xrightarrow{b}$ corresponde la clase $[x_1, x_2, x_3]$, etc. Se tiene entonces las siguientes inclusiones:

$$\{x_1, x_2\} \subseteq \{x_1, x_2, x_3\} \subseteq \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \text{ etc.},$$

que suponen una cuantificación exclusivamente intensiva análoga a la de las clases débilmente estructuradas. Es cierto que se podrían considerar como de extensión igual todas las clases singulares formadas por la diferencia entre cada clase y la precedente, es decir las clases $[x_3]$, $[x_4]$, etc. Pero, por una parte, los términos x_3, x_4, etc., aún cuando permanezcan singulares, no constituyen unidades iterables, ya que no tienen el mismo valor (a falta de poder determinar la diferencia entre uno cualquiera de ellos y el precedente). Por otra parte, se podrían intercalar otros términos entre x_1, x_2, x_3, etc., lo que excluiría toda comparación de la extensión entre clases sucesivas disyuntas, conservando sólo las comparaciones entre las clases parciales y las clases totales que las engloban: por ejemplo $[x_1 \ldots x_2 \ldots x_3] \subseteq [x_1 \ldots x_2 \ldots x_3 \ldots x_4]$, a condición que los términos intercalados sean los mismos en las dos clases. Ahora bien, son precisamente estas comparaciones las que corresponden en comprensión a las relaciones de diferencia ordenada.

En cuanto a las clases estructuradas, resulta claro por el contrario, que son susceptibles de una cuantificación extensiva. En efecto, su definición misma implica que una clase parcial A sea delimitada en función de otras clases parciales A' y del todo B: es posible entonces una comparación de las extensiones entre A y A'. Por ejemplo, en la noción, propia de la teoría de los conjuntos, expresada por las palabras "casi todos", es decir "todos menos un número finito", la clase B representa el conjunto total, la clase A "casi todos" y la clase A' el conjunto débilmente representado o finito que corresponde a $B - A$; se podrá conferir entonces una significación a la relación cuantitativa $A > A'$, lo que caracteriza la cantidad extensiva.

Podemos resumir esta discusión de la siguiente forma:

Lema. — *Cuando en un sistema de clases, las propiedades que caracterizan la clase total (B) no pueden deducirse, por medio de operaciones definidas, a partir de las propiedades características de una de sus subclases (A), la cuantificación del sistema permanece intensiva.*

En efecto, al constituir la cuantificación extensiva (definición 15) una comparación de las extensiones propias de una subclase A y otras subclases A' (disyuntas de A) correspondientes a la misma clase total B, se hace necesario poder delimitar las clases A, A' y B, de modo distinto a la complementariedad de A y A' respecto de B (es decir: $A = B - A'$ y $A' = B - A$), si no las relaciones cuantitativas entre A y A' permanecen indeterminadas. Ahora bien, en el caso de las clases débilmente estructuradas (definición 11), las propiedades de las clases A, A' y B, están simplemente dadas, sin que sea posible construir unas a partir de otras: sólo la presencia o ausencia de tales propiedades será lo que delimite en consecuencia esas clases; de igual modo, las extensiones respectivas de A y A' no serán determinadas sino por su complementariedad en relación al todo B. Las únicas relaciones cuantitativas determinadas serán entonces $A < B$; $A' < B$ y $B = A + A'$[1]. Igualmente, en una clase semiestructurada (definición 12) como $[x_1, x_2, x_3]$, las relaciones $\overset{a}{\rightarrow}$, $\overset{a'}{\rightarrow}$ y $\overset{b}{\rightarrow}$ están simplemente dadas, sin que $\overset{a'}{\rightarrow}$ o $\overset{b}{\rightarrow}$ puedan construirse a partir de $\overset{a}{\rightarrow}$ sola. No se conocerá pues $\overset{a}{\rightarrow}$ y $\overset{a'}{\rightarrow}$ sino por complementariedad en relación a $\overset{b}{\rightarrow}$. De lo que resulta que las únicas relaciones en comprensión que será posible conocer son entre $\overset{a}{\rightarrow}$ y $\overset{b}{\rightarrow}$, entre $\overset{a'}{\rightarrow}$ y $\overset{b}{\rightarrow}$, o entre $\overset{b}{\rightarrow}$ y $\overset{a}{\rightarrow}$ o $\overset{a'}{\rightarrow}$, sin que pueda compararse $\overset{a}{\rightarrow}$ y $\overset{a'}{\rightarrow}$. Lo mismo ocurrirá con la extensión. Se sabrá así que la extensión de $[x_1, x_2]$ es menor que la extensión de $[x_1, x_2, x_3]$ y que la extensión de $[x_2, x_3]$ es menor que la de $[x_1, x_2, x_3]$, pero nada se sabrá de las relaciones de extensión entre las clases $[x_1 \ldots x_2]$ y $[x_2 \ldots x_3]$.

§ 7. OPERACIONES LOGICAS Y OPERACIONES MATEMATICAS.

Según el punto de vista clásico, la lógica es autónoma con respecto a las matemáticas y se aplica a ellas como una forma a su contenido. Según Russell, las matemáticas en su totalidad son, en principio, reducibles a la lógica. Según Hilbert (y la mayor parte de los matemáticos actuales), es por el contrario la lógica la que forma parte de las matemáticas. Ahora bien, la distinción entre cantidad intensiva y cantidad extensiva, tal como acabamos de introducirla res-

1 Lo que significa que la extensión de B es igual a la suma de las extensiones de A y de A'.

pecto a la mayor o menor estructuración de las clases, nos permite concebir la relación entre las operaciones lógicas y las operaciones matemáticas de una cuarta manera (ver Introducción, § III): por una parte, la lógica es autónoma, ya que se basa exclusivamente en la cantidad intensiva, la cual no implica el número; por el contrario, la lógica interfiere con las matemáticas, sin aplicarse simplemente a ellas, en tanto estas suponen una estructuración superior al reunir, en una cantidad "cualquiera" (ver NOTA VI), las relaciones extensivas y las mismas relaciones intensivas. De donde se desprende que, o bien las matemáticas constituyen en sí mismas su propia lógica, o bien requieren la construcción de una lógica matemática especial, elaborada por medios matemáticos.

En efecto, todas las teorías matemáticas suponen la intervención de clases estructuradas y de cantidades extensivas, además de las clases débilmente o semiestructuradas y de la cantidad simplemente intensiva. En la teoría de los conjuntos, la introducción del infinito, de la noción de potencia e incluso del producto de dos conjuntos, requieren ya la cantidad extensiva. Lo mismo ocurre en topología con las nociones de continuo y de punto de acumulación. Por el contrario, es posible construir toda la lógica de clases, de relaciones y de proposiciones bivalentes, por medio de la sola cantidad intensiva.

Ahora bien, la diferencia esencial entre las clases débilmente o semiestructuradas, por una parte, y las clases estructuradas, por la otra, tiende a las relaciones entre sus "formas" y sus "contenidos". Como se recordará, la forma de una construcción operatoria es lo que permanece inmodificable en caso de sustitución de los datos, mientras que el contenido está constituido por el dato sustituible. Desde este punto de vista, las clases débilmente o semiestructuradas, definibles ya sea *per genus et differentiam specificam*, o bien por medio de relaciones asimétricas de diferencias ordenadas, se construyen mediante relaciones simplemente dadas, que no sobrepasan la estructura de los encajes intensivos y cuyo contenido puede ser "extralógico" (definición 6). Su forma es pues la menos rica de las formas lógicas: clases tales como la de los vertebrados, etc., o las constituidas por objetos ordenados según sus cualidades perceptivas, no suponen, en efecto, sino una forma mínima directamente aplicable a un contenido extralógico.

Por el contrario, las clases estructuradas, ya sean ordenadas o no,

presentan desde un comienzo, una forma más rica que las anteriores, ya que en lugar de las relaciones intensivas de las partes con el todo, suponen, en extensión, relaciones extensivas entre las partes mismas, y, en comprensión, una caracterización de las propiedades de las subclases en función de las del sistema total. Por ejemplo, un conjunto de potencias o una serie de intervalos incluidos unos en otros, que convergen hacia un punto límite, implican una ley de construcción respecto a la cual todas las partes son solidarias. En consecuencia, en lugar de aplicarse directamente a un contenido extralógico, las clases estructuradas o extensivas constituyen formas que tienen por contenido otras formas, las cuales consisten precisamente en construcciones lógicas previas. Así, para enumerar un conjunto de individuos es preciso antes haberlos reunido y distinguido, es decir haberlos clasificado y seriado. Los predicados de predicados o relaciones de relaciones, se presentan por consiguiente, de distinta manera según se trate de clases estructuradas o matemáticas, o de clases lógicas (débilmente o semiestructuradas): cuanto más estructurada es una clase, más las relaciones que la definen (propiedades), se determinan unas respecto a las otras; son entonces susceptibles de composición y no simplemente dadas, lo que enriquece aún más el elemento formal, que consiste así en verdaderas "leyes de formación", y no ya en simples encajes intensivos.

Es pues singularmente equívoco hablar de una "aplicación" de la lógica a las matemáticas. En realidad, éstas utilizan aquéllas a título de parte integrante, pero sin reducción completa en un sentido o en otro. La lógica conserva así una cierta autonomía en tanto teoría de las estructuras intensivas, si bien estas intervienen también en las "cantidades cualesquiera" de que se ocupan las matemáticas. Pero, en tanto subsisten aún discusiones sobre la naturaleza de las inferencias matemáticas, así como sobre la no-contradicción de la aritmética, la cuestión de las relaciones entre las estructuras lógicas y las estructuras matemáticas, debe quedar abierta.

Para avanzar en el estudio de esta cuestión fundamental, es preciso colocarse no desde el punto de vista de los elementos aislados, sino más bien y exclusivamente, desde los sistemas operatorios de conjunto. Tanto en lógica como en matemáticas las operaciones sólo existen en su solidaridad mutua, constituyendo totalidades bien definidas. Aún cuando lo propio de las relaciones que caracterizan las

clases débilmente o semiestructuradas sea el hecho de permanecer independientes de las relaciones totales, las operaciones que conducen a las clases o relaciones parciales, son en primera instancia, dependientes de las totalidades operatorias: sean cuales sean las definiciones de A, A' y de B, *la unión* $A \cup A' = B$, será siempre solidaria de la diferencia $A = B - A'$, y de otras uniones o diferencias que incluyen o se hallan incluidas en B en la serie B, C, D, etc. Se trata pues, en primer lugar, de estudiar a título de totalidad el conjunto de operaciones que es preciso efectuar para construir y transformar un sistema de clases de cuantificación puramente intensiva. En segundo lugar, se tratará de analizar los sistemas operatorios de conjunto constituidos por las relaciones intensivas. Luego de lo cual solamente será posible caracterizar las operaciones matemáticas, así como las clases y las relaciones engendradas por ellas, de modo de establecer su parentesco o sus diferencias en relación a las operaciones intensivas.

CAPITULO II

LA LOGICA DE CLASES

Se tratará exclusivamente en este capítulo lo que hemos denominado clases "débilmente estructuradas" (definición 11). En cuanto a las clases "semiestructuradas" (definición 12), las consideraremos solamente desde el punto de vista de la comprensión, es decir de las relaciones y las trataremos en consecuencia, en el capítulo III. Finalmente las "clases estructuradas" serán tratadas en el capítulo IV. No se tratará pues aquí más que la lógica de clases elementales, tal como aparecen en una clasificación cualitativa como la clasificación biológica.

§ 8. LA CONSTRUCCION DE LAS CLASES.

Sea un término individual x_1 que verifica la función ax. La proposición ax_1 significará por ejemplo que x_1 es "de madera". Podemos sustituir entonces, x_1 por otros términos individuales x_2, x_3, etc., que conservan a la función ax su valor de verdad. Hemos hecho intervenir así una primera operación, la de *sustitución simple* (simple en oposición a la "sustitución complementaria" que se tratará en el § 13). La sustitución simple (que llamaremos simplemente sustitución), no puede definirse sino por intermedio de la equivalencia. Pero preferimos definir la equivalencia, que es una relación, por la sustitución, que es una operación, a fin de respetar el orden natural de filiación, desde el punto de vista de las totalidades operatorias que nos veremos conducidos a reconocer.

Desde el punto de vista de las operaciones reales del sujeto, es decir, desde el punto de vista psicológico, la sustitución simple corresponde a un mecanismo completamente general de la acción y del pensamiento, que es el de la asimilación de los objetos a un esquema de actividad. En el ejemplo elegido, si una acción ejercida sobre un pedazo de madera x_1 es ejercida sobre otros objetos, que pueden igualmente ser cortados, tallados, etc., estos objetos x_2, x_3, etc., serán asimilados entonces al primero, desde el punto de vista del esquema de acción considerado y es la formalización de esta asimilación lo que constituye la operación lógica de sustitución. Por otra parte, el esquema en sí mismo de estas acciones o de los juicios que las expresan, corresponden al predicado *a*.

Decir que x_2 o x_3, etc., pueden ser sustituidos por x_1, permite entonces introducir una relación entre x_1; x_2; x_3; etc., y esta relación es la de equivalencia cualitativa que podemos definir por la posibilidad misma de sustitución.

Definición 16. — *Dos términos serán llamados cualitativamente equivalentes, si pueden ser sustituidos uno por otro a título de argumentos que confieren un mismo valor de verdad a una función proposicional de forma ax.*

Una equivalencia cualitativa es pues siempre relativa a cierto punto de vista, expresado por la función considerada: así x_1 y x_2 pueden ser equivalentes desde el punto de vista de una primera función, sin serlo desde el punto de vista de una segunda. Llamemos *a* la cualidad de ser "de madera" que hemos tomado como ejemplo de una función cualquiera, y designemos por $\longleftrightarrow$ la relación de equivalencia. Podremos decir entonces que "x_1 es de madera como x_2", etc.:

(1) $$x_1 \overset{a}{\longleftrightarrow} x_2 \; ; \qquad x_2 \overset{a}{\longleftrightarrow} x_3 \; ; \text{ etc.}$$

tal relación es transitiva, es decir que de (1) se puede obtener:

(1 *bis*) $$x_1 \overset{a}{\longleftrightarrow} x_3$$

Es, por otra parte, reflexiva (es decir, que existe entre el objeto considerado y sí mismo):

(1 *ter*) $$x_1 \overset{a}{\longleftrightarrow} x_1 \; ; \qquad x_2 \overset{a}{\longleftrightarrow} x_2 \; ; \text{ etc.}$$

Por el contrario, si x_1 es equivalente a x_2; x_3; etc., desde el punto de vista de la cualidad (o función) *a*, no lo es necesariamente desde

otros puntos de vista. Debemos considerar como límite inferior de la relación de equivalencia la relación de identidad, que será la equivalencia de un término exclusivamente consigo mismo. Escribiremos la identidad en el caso de objetos individuales:

(2) $$x_1 \overset{x_1}{\longleftrightarrow} x_1 ; \qquad x_2 \overset{x_2}{\longleftrightarrow} x_2 ; \qquad \text{etc.}$$

Como hemos visto (§ 4-5), una relación de equivalencia expresa, como toda relación, una cualidad en comprensión. La extensión correspondiente, es decir el campo de la relación, constituye entonces una clase (ver definición 8). Las más simples de las clases son las clases singulares, aquellas cuyos términos son idénticos entre sí. Escribiremos bajo la forma $[x_1]$ la clase formada por un sólo término x_1; $[x_2]$, la clase formada por un sólo término x_2, etc. En cuanto a las clases no singulares, estarán constituidas por la reunión de términos equivalentes desde un punto de vista distinto de la identidad. Así los términos equivalentes desde el punto de vista $\overset{a}{\longleftrightarrow}$ constituirán una clase A, que construiremos como sigue. Introduciremos primero una nueva operación.

Definición 17. – *Llamaremos unión la operación que, dadas dos*[1] *clases, determina la menor de todas las clases que contienen a ambas.*

Se tendrá pues, si designamos la unión por $\cup$:

(3) $$\{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \ldots = A = \{x_1, x_2, \ldots\}$$

La unión es conmutativa:

(3 *bis*) $$A \cup B = B \cup A$$

Esta conmutatividad resulta del hecho de que la unión traduce en extensión la relación de equivalencia dada en comprensión.

Ahora bien, si el individuo x_1 es equivalente a x_2, x_3, etc., desde el punto de vista de una cualidad determinada ($\overset{a}{\longleftrightarrow}$), puede serlo igualmente desde otro punto de vista respecto de otros individuos distintos de los x: el individuo x_1 será así equivalente a y_1, y_2, y_3, etc.,

1 La palabra "dos" es empleada como abreviación de "más de uno" o "algunos". No implica pues el número cardinal.

desde el punto de vista de una función bx que significará por ejemplo "x es combustible". Escribiremos así:

(4) $x_1 \overset{b}{\longleftrightarrow} y_1$; $x_1 \overset{b}{\longleftrightarrow} y_2$; etc ; y $x_2 \overset{b}{\longleftrightarrow} y_1$; $x_2 \overset{b}{\longleftrightarrow} y_2$; etc.

De igual modo se tiene naturalmente:

(4 *bis*) $x_1 \overset{b}{\longleftrightarrow} x_2$; $x_1 \overset{b}{\longleftrightarrow} x_3$; etc.

ya que los individuos x no son solamente equivalentes entre sí desde el punto de vista de su cualidad específica $\overset{a}{\longleftrightarrow}$, sino también desde el punto de vista de la cualidad genérica $\overset{b}{\longleftrightarrow}$, compartida con los y.

La extensión correspondiente a la relación de equivalencia $\overset{b}{\longleftrightarrow}$ constituye entonces la clase B (aquí la clase de los objetos combustibles):

(5) $\{x_1, x_2, \ldots\} \cup \{y_1, y_2, \ldots\} = B = \{x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots\}$

Ahora bien, al poseer por hipótesis todos los x las características de la clase B (todos los objetos de madera son combustibles), mientras que no todos los B son x, la clase B presenta una extensión mayor que la clase A:

(6) $A \subset B$ y extensión $A <$ extensión B

Esta desigualdad (6) significa pues, que la clase A es una parte o una subclase de B. Si no fuera este el caso, no tendríamos ningún modo de comparar las extensiones respectivas de A y de B. En efecto, las relaciones de equivalencia $\overset{a}{\longleftrightarrow}$ y $\overset{b}{\longleftrightarrow}$ nos permiten una comparación, ya que los x son equivalentes entre sí desde los puntos de vista a y b simultáneamente, mientras que los x y los y lo son solamente desde el punto de vista b; pero esto equivale precisamente a decir que la clase A (o clase de los x) forma parte de la clase B (clase de los x y de los y reunidos). La relación (6) $A \subset B$ significa pues que "la clase A está incluida en la clase B (sin que la recíproca sea verdadera)", lo que introduce la relación de *inclusión* [1].

La relación de inclusión no existe sino entre clases. Se llama

1 Cuando querramos precisar que una clase A se halla estrictamente incluida en un clase B, escribiremos $A \subset B$. En caso contrario, escribiremos $A \subseteq B$.

pertenencia $\in$, la relación entre un individuo y la clase de la cual forma parte. Estrictamente el individuo x_1 no pertenece sino a la clase singular $[x_1]$, la cual está incluida en A:

(7) $$x_1 \in \{ x_1 \}$$

y:

(7 *bis*) $$\{ x_1 \} \subset A$$

Como la inclusión es transitiva, se obtiene entonces de (7 bis) y de (6):

(7 *ter*) $$\{ x_1 \} \subset B$$

Por otra parte, si la clase A está incluida en B (6), subsiste entonces una diferencia entre B y A, es decir que existe una clase complementaria de A respecto de B que se halla co-incluida en B. Llamaremos A' esta clase complementaria de A respecto de B: comprende, en nuestro ejemplo, todos los y no-x, es decir todos los términos de los que sabemos solamente que "son B pero no A" (combustibles, distintos de los objetos de madera).

Se tiene pues:

(8) $$B = A \cup A'$$

Las clases A y A' son *disyuntas*, es decir sin elementos comunes, ya que por definición, los A' son "todos los B distintos de los A". Decir que las clases A y A' son complementarias respecto de B significa además que ambas agotan la clase B. Se tiene pues:

(9) $$A' = B - A$$

y:

(9 *bis*) $$A = B - A'$$

La operación introducida es la sustracción lógica $(-)$, operación que expresa la exclusión o la disociación y que constituye la inversa

de la unión. La sustracción es una negación parcial: la expresión $B - A = A'$ significa "los B no-A son los A'". Pero es una negación que permanece interior a la clase incluyente B. Se ha expresado a menudo la negación total con el símbolo A', es decir en relación al universo considerado, que nosotros escribiremos A, y se la ha considerado como una operación "monárica". En realidad, la negación es siempre binaria: la sustracción $B - A = A'$ es una negación (o exclusión) de A en relación a B, mientras que la negación total A es una negación (o exclusión) de A en relación al conjunto de clases del sistema considerado.

Dicho esto, el término x_1 puede ser equivalente a x_2, x_3, etc., así como a los y, desde otros puntos de vista también, que englobarían además de los x y de los y, nuevos términos individuales z_1, z_2, z_3, etc. Por ejemplo, los x, y los y y los z serían todos "pesados" además de sus caracteres específicos y genéricos ("leñosos" para los x y "combustibles" para los x y los y). Se desprende entonces una nueva relación de equivalencia $\overset{c}{\longleftrightarrow}$ que tendrá el significado, en nuestro ejemplo, de "co-pesados":

(10) $x_1 \overset{c}{\longleftrightarrow} z_1$; $x_1 \overset{c}{\longleftrightarrow} z_2$; etc. ; $x_1 \overset{c}{\longleftrightarrow} y_1$; etc. y $x_1 \overset{c}{\longleftrightarrow} x_2$; etc.

De donde resulta, por otra parte, la construcción de dos nuevas clases: la clase C correspondiente a $\overset{c}{\longleftrightarrow}$ y la clase B' incluida en C, pero que no comprende los B (= los individuos pesados, pero no combustibles):

(11) $$C \supset B$$

(12) $$C - B = B'; \quad C - B' = B \quad \text{y} \quad B \cup B' = C$$

Y se puede continuar así sucesivamente agregando a las equivalencias precedentes equivalencias más generales, que conducirán a la construcción de clases de extensión cada vez mayor.

Notemos, antes de continuar, que es sólo en función de tales equivalencias y de tales clases, cómo puede individualizarse un hecho singular, tal como hemos ya visto en el § 3 (sin referirnos a las relaciones que serán objeto del capítulo III). En efecto, caracterizar un objeto individual significa simultáneamente hacerlo entrar en ciertas clases A, B, C, etc., otorgándole las cualidades a, b, c, que lo hacen equivalente a otros términos individuales contenidos en esas clases, y

distinguirlo de ciertas subclases *A'*, *B'*, *C'*, etc., por negación de las equivalencias correspondientes. Es así que se desciende hasta las clases singulares y las identidades individuales, siempre relativas al sistema de conjunto.

§ 9. EL PROBLEMA DE LAS TOTALIDADES: LA CLASIFICACION

Estas consideraciones elementales muestran de entrada que toda clase es siempre solidaria de un sistema total (incluso en el caso de las clases "débilmente estructuradas"). ¿En qué consiste entonces dicho sistema de conjunto? Si nos atenemos sólo a las operaciones de clases descritas anteriormente (unión y sustracción), así como a las relaciones que caracterizan las "comprensiones" correspondientes a dichas clases, es posible ya caracterizar en términos precisos una primera estructura operatoria de conjunto: la *clasificación*, es decir el sistema formado por un encaje jerárquico de clases elementales disyuntas [1]. Toda clase es, en efecto, solidaria de una clasificación. Ya se trate de clases utilizadas por el pensamiento común (como las clases *A*, *B* y *C* tomadas como ejemplo en el § 8) o de clases utilizadas por las distintas ciencias (la especie química o biológica, etc.), una clase no existe lógicamente sino relacionada con otras clases de las cuales ella se distingue o con las que se halla emparentada según relaciones de equivalencia negativas o positivas. No se podría pues concebir la clasificación como una simple yuxtaposición de clases elementales dadas independientemente de ella; sino que implica, por el contrario, en tanto que totalidad, una estructura formal propia y leyes de composición de conjunto.

Pero, para poder extraer estas últimas, conviene analizar el modo de clasificación más simple posible, desde el punto de vista lógico, pero que permanezca no obstante, lo suficientemente preciso. Las clasificaciones del sentido común no satisfacen esta segunda condición. En cuanto a las clasificaciones químicas, físicas o matemáticas, introducen en grados diversos cantidades o métricas (definición 15 y 15 *bis*), recurriendo en consecuencia a clases más o menos fuertemente "estruc-

1 Se trata, en el caso más simple, del *árbol de Porfirio*.

turadas" (definición 13): así por ejemplo, en la tabla de elementos químicos, etc. Tomaremos pues como ejemplo la clasificación biológica, que presenta el gran interés de constituir un edificio formal perfectamente coherente sin por ello sobrepasar las puras relaciones "intensivas" de la parte al todo (definición 14), es decir sin salir del dominio de las clases "débilmente estructuradas" (definición 11):

I. – El *primer principio* de una clasificación formalmente elaborada es que toda clase se presenta siempre incluida en otra clase de orden superior e incluyendo simultáneamente alguna otra clase de orden inferior, con la única excepción de la clase considerada como total (la clase referencial Z, que contiene a todas las otras) y de las clases elegidas como elementales.

Consideremos como elementales (rango α) las clases correspondientes a la "especie": sea la especie *pomatia* de los *Helix* (el caracol vulgar). Nos podríamos remontar a las subespecies, a las variedades, a la descendencia hasta llegar a las clases singulares $[x_1]$. Pero partiremos de la especie y escribiremos indiferentemente, para referirnos a un individuo o a su clase singular $x_1 \in A$ ó $[x_1] \subset A$. La especie *pomatia* forma parte de un "género" B (el género *Helix*, sin hablar del subgénero). El género B forma parte de una "familia" C (la de los "*Helicidas*"), la cual se halla incluida en un "orden" D (los "*Pulmonares*"); este orden D está él mismo incluido en una "clase" E, (la "clase" en el sentido zoológico de la palabra, de los "*Gastrópodos*"), la cual forma parte de la "rama" F (los "*Moluscos*"); esta rama pertenece finalmente a un "reino" animal G. Estas distintas inclusiones $A \ldots G$ forman la serie de base:

(13) $$\{x_1\} \subseteq A \subseteq B \subseteq C \subseteq D \subseteq E \subseteq F \subseteq G$$

Se hubiera podido elegir otra serie. La de los primeros clasificadores no comprendía todos esos niveles jerárquicos. La de los clasificadores actuales comprende en general subgéneros, subfamilias, subórdenes, etc., lo que conduciría a una serie $A \subseteq H \subseteq \ldots \subseteq K$. Pero poco importa el número de encajes. La sola existencia de algunos encajes definidos es lo único necesario.

II. – *Segundo principio*: las distintas clases pertenecientes a un

mismo nivel jerárquico son disyuntas. Dicho de otro modo, un mismo individuo x_1 no puede pertenecer a la vez a dos especies (A_1 y A_2), a dos géneros (B_1 y B_2), etc.; una misma especie A_1 no puede pertenecer a dos familias (C_1 y C_2) o a dos órdenes (D_1 y D_2) a la vez, etc. Si simbolizamos por $\cap$ la operación que determina la parte común de dos clases, tenemos pues, para A_1 y A_2 (= dos especies cualesquiera), B_1 y B_2 (= dos géneros cualesquiera), etc.:

(14) $$A_1 \cap A_2 = \emptyset; \quad B_1 \cap B_2 = \emptyset; \quad C_1 \cap C_2 = \emptyset; \text{ etc.}$$

Por el contrario, cada clase constituye la parte común entre ella misma y las clases de rango superior:

(15) $$A_1 \cap B_1 = A_1; \quad B_1 \cap C_1 = B_1;$$
$$A_1 \cap B_1 \cap C_1 = A_1; \text{ etc.}$$

III. – Del hecho de ser las clases de un mismo nivel jerárquico necesariamente disyuntas, se desprende un *tercer principio:* las clases de un mismo rango no pueden caracterizarse más que de manera dicotómica, es decir, por la presencia o ausencia de los caracteres dados.

Si consideramos las especies de un mismo género tales, como las especies *pomatia*, *aspersa*, *lucorum*, etc., del género Helix, o las diversas especies de currucas o de cuervos, etc.; se constata, en efecto, de una manera general que no podrían seriarse estas especies según un orden simple, ni *a fortiori* proporcionar una ley de construcción extensiva o métrica que permita engendrar unos a partir de otros (como es el caso de la tabla de Mendeleiev para los elementos químicos). Tal especie, por ejemplo, está caracterizada por un complejo de caracteres *a, b, c,* ... (talla, forma, color, disposición de ciertos órganos, etc.), otra por un complejo $\bar{a}$, *d, e,* ..., etc. No se podría tampoco someter estos caracteres a una combinatoria de modo que las especies de un género realizasen todas las combinaciones posibles: algunas de estas combinaciones están presentes, otras ausentes, sin ninguna regla fija de construcción. Es por este motivo, que una clasificación biológica comprende exclusivamente clases "débilmente estructuradas" (definición 11).

De donde resulta que en un género B_1, la especie considerada A_1 está caracterizada simplemente por el complejo de cualidades a_1 que

faltan en otras especies de B_1. Si llamamos A'_1 estas otras especies, el género B_1 se halla pues dicotómicamente repartido en $B_1 = A_1 \cup A'_1$. Estas otras especies A'_1 comprenden por su parte una especie A_2, caracterizada por el complejo de cualidades a_2, que faltan en otras especies A'_2 del género B_1 (esta subclase A'_2 comprende pues A_1). Lo mismo ocurrirá con una especie A_3 disyunta a la vez de A_1 y de A_2 y que divide a su vez el género B_1 según la dicotomía $A_3 \cup A'_3$, etc. (A_3 formará parte pues a la vez de A'_1 y de A'_2.) Y así sucesivamente.

Si quisiéramos construir la tabla correspondiente al género B_1, tendríamos que elegir entre dos procedimientos de exposición (ambos utilizados por los sistemáticos), y que se reducen ambos, desde el punto de vista formal, a una serie de distinciones dicotómicas:

1º Se describirán sucesivamente las especies (por ejemplo las tres especies A_1, A_2 y A_3) oponiendo cada una a las otras, lo que equivale a dividir B_1 en las distintas subclases complementarias:

la especie A_1 opuesta a las otras especies A'_1 $(= A_2 \cup A_3)$
— A_2 — — — A'_2 $(= A_1 \cup A_3)$
— A_3 — — — A'_3 $(= A_1 \cup A_2)$

Se tiene entonces (ver figura 2):

$$B_1 = (A_1 \cup A'_1) = (A_2 \cup A'_2) = (A_3 \cup A'_3) \qquad (16)$$

2º O bien se construye una tabla dicotómica explícita (como se hace a menudo en los manuales escritos con la intención de lograr determinaciones rápidas). Se tiene en este caso la siguiente disposición:

$$B_1 = \begin{cases} A_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_1 \\ A'_1 = \begin{cases} A_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_2 \\ (A'_2 - A_1)\begin{cases} A_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_3 \\ (A'_3 - A_1 - A_2)\begin{cases} A_4 \ldots\ldots\ldots\ldots A_4 \\ (A'_4 - A_1 - A_2 - A_3)\begin{cases} A_5 \ldots A_5 \\ (A'_5 - \text{etc.}) \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \qquad (17)$$

En ambos casos se constata que el principio de la repartición del género B en especies A; o de familia C en géneros B, etc., no podría ser sino dicotómico, a falta de una seriación posible o de una

cuantificación extensiva de los caracteres en juego. Se comprende desde ya, que la enumeración A_1, A_2, etc., es una simple diferenciación cualitativa. El número de las especies no interviene para nada, ni siquiera en sí mismo: un género B puede tener un número cualquiera de especies A, incluso una sola. Esto nos conduce al IV principio:

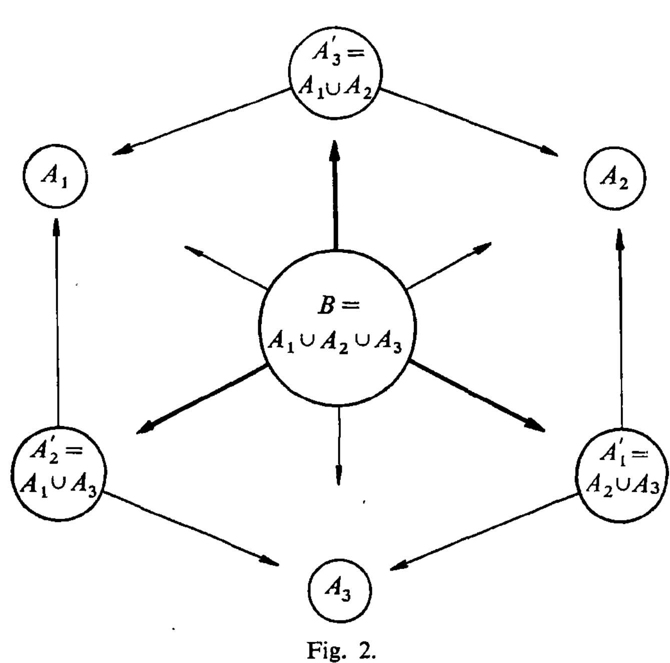


Fig. 2.

IV. — El *cuarto principio* esencial de la clasificación es que todo término individual se halla incluido en una serie de clases, las cuales pertenecen respectivamente a cada uno de los niveles de la jerarquía. En efecto, si la serie fundamental es, por una parte:

$$A \subseteq B \subseteq \ldots \subseteq G \text{ (prop. 13)}$$

todo individuo que pertenezca a una cualquiera de las clases B a G, debe necesariamente pertenecer a las precedentes. Por otra parte, ningún individuo podría ser clasificado en una de las especies A de la clasificación, sin serlo igualmente en un género B, etc., hasta llegar a G. Supongamos, por ejemplo, que se descubre un sólo individuo de una especie nueva A_x y que esta especie no presenta ninguna de las

características de las "clases" conocidas del rango E, pero que entra simplemente en una de las "ramas" dadas del rango F. En este caso, habrá que construir para ese sólo individuo nuevo, no solamente la especie A_x, sino también un "género" nuevo B_x, compuesto por esta única especie A_x, una "familia" nueva C_x, que no contiene sino ese único género B_x, un "orden" nuevo D_x compuesto de esa sola "familia" C_x; y una "clase" nueva E_x, compuesta por ese único "orden". Un único individuo no clasificable en las clases de rango E, no necesitará así la construcción de la serie de encajes nuevos: $[x] \subseteq A_x \subseteq B_x \subseteq C_x \subseteq D_x \subseteq E_x$ antes de poder reunirlo con la rama F. Y, no obstante, tendremos también en este caso, una serie de clases complementarias; en relación a B_x, C_x, D_x y E_x:

$$A'_x = 0 \; ; \qquad B'_x = 0 \; ; \qquad C'_x = 0 \qquad \text{et} \qquad D'_x = 0$$

Semejante eventualidad, que el descubrimiento de una forma fósil desconocida y única puede en cualquier momento ejemplificar, muestra por sí sola el carácter de necesidad formal que relaciona una serie de encajes de clases, incluso "débilmente estructuradas", una vez admitida la serie inicial (13).

V. — Y finalmente, según el *quinto principio*: la clasificación supone un cierto principio de orden, que se trata ahora de precisar. Llamemos "clases primarias" a las clases de partida $A \subseteq B \subseteq C \subseteq D \subseteq \ldots$ en las cuales cada una está incluida en la siguiente. Llamemos "clases secundarias" a las complementarias: $A' (= B - A)$; $B' (= C - B)$; $C' (= D - C)$; $D' (= E - D)$; etc. (proposiciones 9 y 12). Ahora bien, resulta claro que cada una de estas clases secundarías, si no es vacía, contiene a su vez un número indeterminado de clases primarias. Por ejemplo, la clase B' incluye una o varias clases de rango B que contienen ellas mismas clases de rango A. De donde se desprende que si quisiéramos explicitar todas las clases primarias posibles, la clasificación tomaría la forma de una pirámide o de un árbol genealógico (fig. 3). Desde el punto de vista del orden, cada clase primaria de rango A estaría incluida en una clase primaria de rango B, etc., y encontraríamos siempre el mismo orden (vertical) $A \subseteq B \subseteq C \subseteq \ldots$ Pero, cada rango de la jerarquía (es decir, cada nivel horizontal de la pirámide), estará ocupado por el contrario, por un número indeterminado de clases primarias, no ordenadas entre ellas:

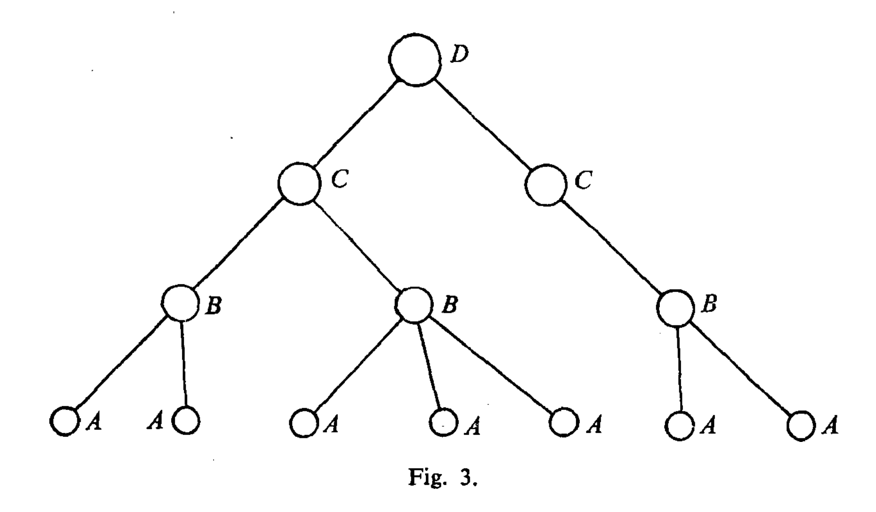


Fig. 3.

ningún orden general de sucesión me permite, en efecto, considerar una especie *A* como anterior a otra en un género *B* dado, o un género *B* como anterior a otro en una familia *C* dada, etc. La clasificación no constituye pues, sino un conjunto "parcialmente ordenado".

Tales son los cinco principios que caracterizan la estructura de conjunto de una clasificación, cuando la misma se basa en las solas nociones de las clases "débilmente estructuradas" (definición 11) y en la cantidad intensiva (definición 14), es decir cuando la clasificación se presenta en su forma lógica más simple.

§ 10. LAS ESTRUCTURAS OPERATORIAS DE CONJUNTO: GRUPOS, RETICULADOS Y AGRUPAMIENTOS

Trataremos ahora de deducir las leyes de composición formal de la estructura de la clasificación que acabamos de describir y que hemos considerado a título de estructura total. Se pueden concebir a este respecto, tres estructuras posibles: el sistema de composiciones reversibles constituidos por los "grupos", el sistema de encajes semiordenados y no reversibles que define a los "reticulados", y los sistemas mixtos de encajes reversibles que hemos llamado "agrupamientos".

I. **El "grupo".** — El "grupo" representa sin duda alguna la más fundamental de las estructuras matemáticas. El sistema de números enteros Z proporciona un ejemplo. Interpretemos los elementos de Z como operadores. Así, $+3$ significará "agregar 3", -4 significará "sustraer 4" y 0 significará "no agregar ni quitar nada". Sea entonces $\circ$ la operación que consiste en componer entre sí dos elementos de Z, interpretados según las leyes ordinarias de la aritmética. Se tendrá, por ejemplo:

$$(-4) \circ (+3) = -1.$$

Decir que Z forma un grupo en relación a la operación $\circ$ equivale a decir que:

1. A toda cupla de elementos de Z, $\circ$ hace corresponder un elemento de Z.
2. La operación $\circ$ es asociativa.
3. Existe en Z un elemento neutro 0, tal que cualquiera sea $x \in$ Z se tiene: $x \circ 0 = x$.
4. A todo elemento x de Z corresponde un elemento inverso y, que es $-x$, y tal que $x \circ y = x \circ (-x) = 0$. Este grupo es además abeliano, es decir que:
5. Sean cuales sean x, $y \in$ Z, se tiene $x \circ y = y \circ x$.

Ahora bien, existen ciertos grupos elementales que interesan a la teoría de conjuntos. Son los grupos que B. — A. Bernstein extrajo del álgebra de las clases de Boole: el grupo de la adición de las partes disyuntas y el de las equivalencias [1]. Volveremos sobre esto más adelante a propósito del cálculo de proposiciones (Cap. VI, § 36), pero conviene antes investigar si pueden ser aplicados a la clasificación.

Sea un conjunto E y $\mathcal{P}(E)$ el conjunto de sus partes. Si A y B son dos partes cualesquiera de E (dos elementos de $\mathcal{P}(E)$), definiremos la operación w de la manera siguiente:

A w B es la parte de E que contiene los elementos de A que no figuran en B y los elementos de B que no figuran en A, sea pues:

$$A \mathbin{\text{w}} B = \text{d}f(A \cup B) - (A \cap B).$$

1 BERNSTEIN, 1924-1925.

En esas condiciones, $\mathcal{P}(E)$ forma un grupo abeliano relativo a la operación w:

1. A toda cupla de elementos de $\mathcal{P}(E)$, w hace corresponder un elemento de $\mathcal{P}(E)$.
2. La operación w es asociativa, como se verifica fácilmente.
3. El elemento neutro es la parte vacía θ.
4. Cada parte es su propio elemento inverso, ya que $A \text{ w } A = \theta$ (A no contiene ningún elemento que no figure en A).
5. La operación w es evidentemente conmutativa.

Pero, si bien tal sistema constituye en efecto un grupo, no basta para dar cuenta de la clasificación, puesto que la vacía de su contenido cualitativo: al no considerar más que las partes disyuntas, por oposición a los encajes como tales, representa las clases como conjuntos de unidades en los que no se precisa la "potencia" o el número, y que se limita a adicionar o a sustraer a título de colecciones indeterminadas. De ahí dos diferencias con una clasificación intensiva:

1º En una clasificación intensiva, sólo las partes contiguas constituyen, por su reunión, clases provistas de atributos positivos. Así las "especies" A_1 y A'_1 constituyen un "género" B_1; los "géneros" B_1 y B'_1 constituyen una "familia" C_1, etc. Pero, la reunión de dos clases cualesquiera y separadas no da por resultado una clase definida por caracteres positivos (dos "especies" pertenecientes a "familias" distintas, no constituyen entre las dos un "género", etc.): la clase resultante de dicha reunión de elementos no contiguos, no puede caracterizarse, por el contrario, más que por exclusiones o negaciones. Si se reúne en una sola clase la especie "trucha de río" y la especie "zorro gris", no se obtiene un género que pertenezca a la clasificación; no se podría definir el agregado "Trucha de río + zorro gris", más que del siguiente modo: "Los vertebrados, menos los peces distintos de las truchas, menos las truchas distintas de la especie considerada, menos los batracios, los reptiles, los pájaros y menos los mamíferos distintos del zorro gris". Incluso si nos atenemos a dos clases tales como A y E', su unión no puede dar otra cosa que $A \cup E' = F - A' - B' - C' - D'$. No son pues solamente las partes disyuntas las que interesan a la clasificación; son también, y principalmente, los encajes y los "desencajes" en tanto tales. Ahora bien, un cálculo que con-

duzca a estas operaciones debe tener en cuenta la contigüidad de las clases en juego (según sus distintas equivalencias: proposición 1, 4 y 10), lo que restringe necesariamente la movilidad del grupo de las partes disyuntas.

2º Hay dos operaciones fundamentales desde el punto de vista lógico[1], que este grupo no podría incorporar: es la reunión de una clase consigo misma y respecto de las clases que la incluyen:

$$A \cup A = A \quad \text{y} \quad \text{si } A \subseteq B \quad A \cup B = B$$

En efecto, si se quiere constituir una lógica de inclusiones, no se podría pasar de la auto-inclusión de $A \cup A = A$, que distingue el elemento (lógico), idéntico a sí mismo, de la unidad (matemática) iterable $1 + 1 = 2$. Por otra parte, si $A \cup A = A$, se tiene también si $A \subseteq B$, $A \cup B = B$, puesto que $B = A \cup A'$. Así, $A \cup B = A \cup (A \cup A')$, por lo tanto:

$$A \cup B = A \cup A' = B.$$

Así, un sistema de clasificación, como el que hemos descrito en el § 9, no podría formar un grupo, y esto por dos razones. En primer lugar, la operación $\cup$ no hace corresponder un elemento de la clasificación a *toda* cupla de elementos. En segundo lugar, el carácter idempotente de la operación de unión impide considerar a cada elemento como su inverso.

Pero, el conjunto $\mathcal{P}(E)$ forma también un grupo, como lo ha indicado igualmente Bernstein, en relación a la operación $\equiv$ definida del siguiente modo:

$A \equiv B$ es la parte de E que contiene los elementos comunes a A y a B, y los comunes a sus complementos en relación a E, sea

$$A \equiv B = \text{d}f \quad (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}).$$

Semejante grupo es, no obstante, demasiado general para traducir la naturaleza propia de la clasificación. Es simplemente dual del grupo relativo a la operación w.

1 Estas operaciones corresponden como veremos más adelante (cap. VI, § 34) al primero de los axiomas de la lógica proposicional: $(p \vee p) \supset p$.

II. **El "reticulado".** — Una segunda noción matemática, cuya importancia es considerable en la teoría de las estructuras, podría ser aplicada a la clasificación: el reticulado.

De un modo general, un reticulado es un conjunto parcialmente ordenado por una relación que escribiremos $\leqslant$ y tal que, para toda cupia de elementos de E, se pueda definir el más pequeño de los "mayorantes"[1] común a ambos o *supremum* y el mayor de los "minorantes"[2] común a ambos o *infimum.* En el caso de un sistema de clases, la relación de orden sería la inclusión en sentido amplio $\subseteq$ y se tendría:

$$\textit{supremum} \text{ de } A \text{ y } B = \mathrm{d}f \quad A \cup B$$
$$\textit{infimum} \text{ de } A \text{ y } B = \mathrm{d}f \quad A \cap B.$$

Dicho esto, se podría considerar una clasificación (fig. 4) como un reticulado, en el cual todo par de clases posee un supremum: así, B para A y A', C para A y B' y para A' y B', B para A y B, C para A y C', para C y C', etc. En cuanto al ínfimo (1") existe para todo par de clases donde una está incluida en la otra: A es el ínfimo de A y B, de A y C, etc. Por el contrario, el ínfimo no se puede definir entre dos clases disyuntas como A y A', A y B', etcétera.

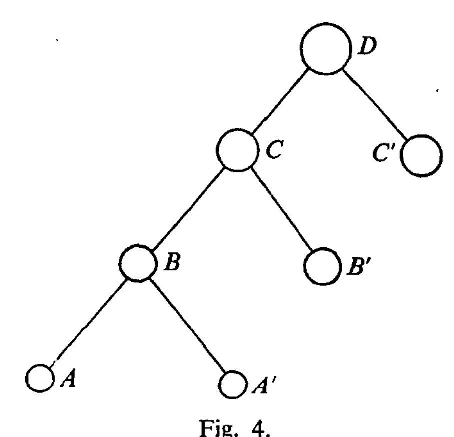


Fig. 4.

Pero, si esta asimilación de la clasificación a un reticulado es más aceptable que a un grupo, ya que el reticulado es esencialmente una estructura de encajes, tres circunstancias limitan no obstante dicha asimilación:

1 En francés "majorant" corresponde al mínimo elemento que contiene simultáneamente a ambos, es decir, el mínimo entre los que les suceden.

2 En francés "minorant" corresponde al mayor elemento contenido a la vez en ambos, es decir, el máximo entre los que les preceden.

(1") en latín en el original "infimum", hemos preferido continuar con la traducción castellana "ínfimo".

a. Una clasificación, definida como en el § 9, no constituye sino un semi-reticulado, ya que el ínfimo no es definible en todos los casos.

b. Varios pares de clases poseen el mismo supremo (1") y el mismo ínfimo, siempre que exista. Por ejemplo (fig. 4), D es el supremo a la vez de C y C', de B' y C', de A y C' y de A' y C'.

c. Y sobre todo, no hay reversibilidad completa: si a un par de clases corresponde un solo supremo (el *genus proximum*), la operación inversa, que consistiría en volver a encontrar dos clases cualesquiera a partir de su supremo, no siempre es posible (en virtud a *b*): para A, A' y B, se tiene si $A = B - A'$ y $A' = B - A$; pero para A y C', no se tiene $A = D - C'$; sino que se tiene en efecto: $A = D - C' - B' - A'$ (puesto que $D - C' = C$; $C - B' = B$ y $B - A' = A$).

Ahora bien, la reversibilidad es la condición de toda racionalidad, como veremos siempre cada vez más a lo largo de este estudio, especialmente en lo que concierne a la lógica proposicional (Cap. VI) y al principio de contradicción (§ 40). La reversibilidad juega, en efecto, en una lógica operatoria, el rol que asumía la identidad en la lógica clásica de los conceptos. Importa pues esencialmente, si se quiere construir la estructura de conjunto que corresponda a una clasificación, incorporar en ella la reversibilidad estricta: se trata, dicho de otro modo, de poder reencontrar una especie a partir de las clases de orden superior así como también poder remontarse de la especie al género, etc.

III. **El "agrupamiento"** [1]. — El problema es pues caracterizar una estructura que concilie la reversibilidad propia del grupo con el sistema de encajes limitados, propia del reticulado. Es esta doble exigencia la que satisface la noción de "agrupamiento". Se puede, en

1 La estructura de agrupamiento, que Jean Piaget introdujo en 1941, resultó difícil de formalizar de manera completa. Todas las tentativas hechas hasta el momento son todavía poco satisfactorias, en el sentido que traicionan todas, de un modo u otro, el pensamiento de Piaget. Por esa razón, doy en este parágrafo una versión algebraica, pero desde el 11, reproduzco, en todo lo relativo al agrupamiento, el texto del *Tratado de Lógica* sin modificaciones esenciales. Por otra parte, el lector encontrará otras presentaciones de los agrupamientos en Piaget, 1941 y Piaget, 1942. Los ensayos de formalización que he aludido se hallan en Grize, 1960, Granger, 1965, Grize, 1967 y Witz, 1969.

(1") en latín en el original "supremum" hemos adoptado igual criterio que con el ínfimo, empleando en adelante la traducción castellana "supremo".

efecto, concebir el "agrupamiento", ya sea como un reticulado que se ha vuelto reversible gracias a un juego de dicotomías o complementaridades jerárquicas (A y A', B y B', etc.), ya sea como un grupo cuya movilidad se halla restringida por la intervención de encajes que implican las operaciones idénticas especiales $A \cup A = A$ y $A \cup B = B$, así como por un principio de contigüidad. El "agrupamiento" es pues una estructura intermediaria entre el grupo y el reticulado y, como tal, expresa la naturaleza propia de las totalidades lógicas (como veremos en los capítulos III y IV) y especialmente el conjunto de operaciones que intervienen en una clasificación.

Esta noción no presenta sin duda ningún interés matemático, ya que atañe sólo a los sistemas de clases "débilmente estructuradas". Puede pues considerársela con justicia como "en realidad, sin interés desde el punto de vista de la lógica" [1], por los autores que tienen la ambición de reducir las matemáticas al sorprendente papel de "inmensa prolongación de la logística" [2]. Basta, por el contrario, que traduzca fielmente las estructuras de conjunto basadas en las solas relaciones intensivas de la parte al todo, e igualmente bien definidas como en la clasificación biológica, para que interese a una lógica deseosa de expresar el mecanismo de las operaciones más elementales del espíritu. Esto es tanto más verdadero cuanto que, como trataremos de demostrar (Cap. VI, § 39), toda la lógica de proposiciones puede reducirse a un solo y único agrupamiento que comprende la totalidad de sus operaciones.

Por otra parte, para poder utilizar esta noción fructíferamente, importa ante todo definirla de manera precisa conservando siempre su significación de estructura de conjunto.

Ahora bien, Ch. Serrus, que ha adoptado la hipótesis del agrupamiento, ha tomado de nosotros todo el detalle del cálculo de los agrupamientos de clases y de relaciones [3], terminando por perder de vista la caracterización, al punto de llamar agrupamiento a cualquier agregado de clases o de relaciones. Conviene pues reaccionar contra este doble exceso: *el agrupamiento es una noción intensiva y no extensiva, pero es una noción bien definida y destinada a expresar una*

1 Boll, 1948, pág. 523.
2 Boll, 1948, pág. IX.
3 Las páginas 246 a 313 (salvo las págs. 283-384) del *Tratado de Lógica* de Ch. Serrus, están casi completamente extraídas de nuestra obra, *Clases, relaciones y números.*

estructura de conjunto como tal, por oposición a las operaciones particulares que esta totalidad relaciona.

Definiremos ahora la noción general de agrupamiento, pero para facilitar su comprensión, nos referiremos a un ejemplo concreto. Lo propio de un agrupamiento es en efecto, el hecho de constituir una serie simple o múltiplo de encajes dicotómicos, de manera que la clasificación, cuya representación aparece en la figura 4, podrá servirnos de ejemplo.

Sea pues un conjunto U. Elijamos un número finito de partes de U, en este caso las clases A, A', B, B', C, etc. Llamemos $\mathcal{C}(U)$ al conjunto de partes de U elegidas, y convengamos por otra parte en que la parte vacía θ y U forman siempre parte de $\mathcal{C}(U)$. En estas condiciones, a todo $X \in (U)$ le asociaremos dos operadores, uno que escribiremos $\top X$ y que llamaremos *operador directo* y otro que escribiremos $\perp X$ que llamaremos *operador inverso.* Estableceremos por otra parte que $\top\theta$ y $\perp\theta$ son uno y el mismo operador que escribiremos simplemente θ.

Si en el ejemplo elegido, se escribe $+X$ en lugar de $\top X$ y $-X$ en lugar de $\perp X$, se podrá leer:

$+X$: poner los elementos de la clase **X**.
$-X$: privarse de los elementos de la clase X.

Sea luego una ley de composición conmutativa entre los operadores $\top X$ y $\perp X$, designada por o y una relación de equivalencia que escribiremos $=$. En la clasificación de la figura 4, a la expresión

$$(\top X) \circ (\top Y) = \top Z$$

corresponderá por ejemplo la equivalencia

$$(+A) \circ (+A') = +B$$

que significará: poner los elementos de la clase A y poner los de la clase A' equivale a poner los elementos de la clase B.

Observemos que toda la clasificación puede caracterizarse por una serie finita de tales equivalencias:

$$(+A) \circ (+A') = +B, \qquad (+B) \circ (+B') = +C,$$
$$(+C) \circ (+C') = +D, \qquad \ldots, \qquad (+T) \circ (+T') = +U.$$

De un modo general, designaremos por $\mathcal{E}(U)$ una serie finita de expresiones de la forma:

$$(\top X) \circ (\top Y) = \top Z \quad \text{ó} \quad X, Y, Z \in \mathcal{C}(U)$$

y definiremos un agrupamiento en U, sea $\mathcal{G}(U)$ de la manera siguiente,

(G 1) Si $(\top X) \circ (\top Y) = (\top Z) \in \mathcal{E}(U)$, entonces
$(\top X) \circ (\top Y) = (\top Z) \in \mathcal{G}(U)$.

Todo elemento de $\mathcal{E}(U)$ es elemento de $\mathcal{G}(U)$.

(G 2) Si $(\top X) \circ (\top Y) = (\top Z) \in \mathcal{E}(U)$, entonces
$(\perp X) \circ (\perp Y) = (\perp Z) \in \mathcal{G}(U)$.

La equivalencia obtenida al reemplazar en un elemento de $\mathcal{E}(U)$ los operadores directos por los inversos es elemento de $\mathcal{G}(U)$.

(G 3) Si $(\top X) \circ (\top Y) = (\top Z) \in \mathcal{E}(U)$, entonces
$(\top X) \circ (\top Z) = (\top Z) \in \mathcal{G}(U)$ y:
$(\top Y) \circ (\top Z) = (\top Z) \in \mathcal{G}(U)$.

Así, por ejemplo, dado que $(+A) \circ (+A') = (+B)$ es un elemento de $\mathcal{E}(U)$, $(+A) \circ (+B) = (+B)$ es elemento de $\mathcal{G}(U)$. La clase A se absorbe en la clase B. Por ello hablaremos de *leyes de absorción* para designar esos elementos de $\mathcal{G}(U)$.

(G 4) Si $(\top X) \circ (\top Y) = (\top Z) \in \mathcal{E}(U)$, entonces
$(\top X) = (\top Z) \circ (\perp Y) \in \mathcal{G}(U)$ y:
$(\top Y) = (\top Z) \circ (\perp X) \in \mathcal{G}(U)$.

Partiendo nuevamente del hecho que $(+A) \circ (+A') = (+B)$ es elemento de $\mathcal{E}(U)$, se tendrá por ejemplo que $+A = (+B) \circ (-A')$ es elemento de $\mathcal{G}(U)$: poner los elementos de la clase A equivale a poner los de la clase B y a privarse de los de A'.

(G 5) $(\top X) \circ (\top X) = (\top X) \in \mathcal{G}(U)$.

Se tendrá pues, por ejemplo, $(+A) \circ (+A) = (+A) \in \mathcal{G}(U)$: poner los elementos de A y volver a poner los elementos de A equivale a poner los elementos de A. Hablaremos de *leyes tautológicas* para designar esos elementos del $\mathcal{G}(U)$. Las leyes tautológicas y las leyes de absorción constituyen juntas las *idénticas especiales.*

(G 6) $(\top X) \circ (\bot X) = \theta \in \mathcal{G}(U)$ y $(\top X) \circ \theta = (\top X) \in \mathcal{G}(U)$.

θ aparece así como el *operador idéntico* del agrupamiento. En el ejemplo, poner los elementos de una clase y no poner nada (no privarse de nada) equivale a poner los elementos de esa clase.

(G 7) Si $\alpha = \beta$ y $\gamma = \delta$ son elementos de $\mathcal{G}(U)$, entonces
$$\alpha \circ \gamma = \beta \circ \delta \in \mathcal{G}(U).$$

La composición miembro a miembro de los elementos de $\mathcal{G}(U)$ es elemento de $\mathcal{G}(U)$.

(Rp) Demos finalmente una regla de reemplazo que nos autorizará a reemplazar en toda expresión de $\mathcal{G}(U)$ un operador cualquiera por una composición que le sea equivalente.

Veamos ahora tres ejemplos de cálculos en el agrupamiento extraído de la clasificación de la figura 4. Para simplificar la escritura y para preparar a la lectura de las aplicaciones que siguen, no escribiremos $\in \mathcal{G}(U)$, y pondremos **X** en lugar de $(+X)$ y $\mathbf{X - Y}$ en lugar de $X \circ (-Y)$.

Ejemplo 1 : $B \circ C = (D - C') \circ (A \circ A')$.

1 $C \circ C' = D$	G 1
2 $B = A \circ A'$	G 1 y sim. =
3 $C = D - C'$	1, G 4
4 $B \circ C = (D - C') \circ (A \circ A')$	2, 3, G 7 y conm. o

Ejemplo 2 : $A \circ (A - A) = A$

1 $A \circ \theta = A$	G 6
2 $A - A = \theta$	G 6
3 $A \circ (A - A) = A$	1, 2, Rp

Ejemplo 3: $(B - A) \circ A = A' \circ A$

1	$B = A \circ A'$	G 1 y sim. =
2	$B - A = A'$	1, G 4
3	$A = A$	Refl. =
4	$(B - A) \circ A = A' \circ A$	2, 3, G 7

No hemos postulado que la ley de composición sea asociativa, y hacerlo conduce a dificultades. Retomemos, en efecto, el ejemplo 2 que puede escribirse:

$$A \circ (A \circ (-A)) = A$$

Si hubiera asociatividad, tendríamos:

4	$(A \circ A) \circ (-A) = A$	3, asoc.
5	$A \circ A = A$	G 5
6	$A \circ (-A) = A$	4, 5, Rp
7	$A \circ (-A) = \emptyset$	G 6
8	$A = \emptyset$	6, 7, Rp

Todas las clases de nuestra clasificación serían entonces vacías, lo que es absurdo.

Igualmente, el ejemplo 3 puede escribirse:

$$(B \circ (-A)) \circ A = A' \circ A$$

tendríamos entonces:

5	$B \circ ((-A) \circ A) = A' \circ A$	4, asoc.
6	$B \circ (A \circ (-A)) = A' \circ A$	5, conm. o
7	$(B \circ A) \circ (-A) = A' \circ A$	6, asoc.
8	$B \circ A = B$	1, G 3
9	$B \circ (-A) = A' \circ A$	7, 8, Rp
10	$B \circ (-A) = A'$	1, G 4
11	$A' = A' \circ A$	9, 10, Rp

lo que es nuevamente absurdo.

Se deriva de lo anterior que, o bien es preciso renunciar a la asociatividad como hemos hecho, o, en caso de postularla, limitarla desde un comienzo mediante reglas restrictivas [1].

1 Tal es la solución del *Tratado de Lógica*, que permitía escribir en los agrupamientos las equivalencias que se hallan excluidas en nuestra presentación. Contenía por lo tanto, tres definiciones:

Definición 18. — Llamaremos "ecuación tautológica" una ecuación de forma $(A + A = A)$ ó $(A + B = B)$.

Definición 19. — Llamaremos "serie homogénea" toda serie que no contenga ecuaciones tautológicas.

Definición 20. — Llamaremos "series heterogéneas" las series resultantes de la adición miembro a miembro de ecuaciones en las cuales, al menos una, sea tautológica.

Dada enseguida las cuatro reglas siguientes:

Regla I. — *Las series homogéneas (de signos cualesquiera) admiten la absorción* $(A + B = B)$ *y su caso límite la tautificación* $(A + A = A)$, *cualquiera sea el orden en que se efectúen unas en relación a las otras, siempre que los términos reabsorbidos sean cada vez de valor equivalente en los dos miembros de la serie.*

Regla II. — *Las series homogéneas del mismo signo (todos +, o todos —) admiten la absorción y la tautificación, a condición que estas sean impulsadas al maximun, antes o después de todas las simplificaciones.*

Regla III. — *En las series homogéneas de signos cualesquiera, basta para evitar las contradicciones efectuar al principio todas las simplificaciones posibles en cada uno de los dos miembros de la serie separadamente (como* $B - A$ *simplificado en* A', *ó* $- B + A$ *en* $- A'$*): el residuo así obtenido puede someterse entonces a las absorciones, pero al maximun, antes o después de las simplificaciones de un miembro al otro.*

Regla IV. — *Las series heterogéneas no pueden ser reducidas siempre sin contradicción ni por absorciones ni por simplificaciones, cuando son de signos contrarios. En cambio, cuando se han cambiado los términos de miembro, hasta uniformar todos los signos (en + ó en —), hasta efectuar absorciones al maximun para transformar tales series en series homogéneas (lo que se desprende de las reglas I y II).*

Notemos aún, que las definiciones y las reglas utilizan los signos + y —. Pero, debe recordarse que las operaciones de agrupamiento aceptan diversas interpretaciones, en la medida exacta en que estas estructuras están a mitad de camino entre lo pre-operatorio y lo hipotético-deductivo (ver *Introducción a la segunda edición*).

§ 11. NATURALEZA Y NUMERO DE LOS "AGRUPAMIENTOS" DE CLASES Y DE RELACIONES.

Al ser el "agrupamiento" una estructura intermedia entre el grupo y el reticulado, la primera cuestión que se plantea, es la de saber si constituye un sistema natural y homogéneo o simplemente una mezcla de elementos tomados de dos estructuras distintas. Ahora bien, el examen de las reglas procedentes del cálculo sugeriría precisamente, a primera vista, esta segunda interpretación. Si verdaderamente la tautificación $A + A = A$ y la absorción $A + B = B$, no intervienen a título de operaciones formalmente diferentes de la simplificación, sino en las series heterogéneas, toda serie transformada en homogénea, se derivaría sólo de las operaciones de álgebra de los grupos, y el agrupamiento aparecería entonces como una simple amalgama de las dos estructuras siguientes: por una parte, la adición de clases disyuntas (A_1; A_2; A_3;, etc.; por lo tanto, A y A', B y B', etc.) que se derivaría del grupo de Bernstein; por otra parte, las tautologías y absorciones, que constituirían una excepción dentro de la estructura de los reticulados. La "clasificación" no podría pués en último análisis, limitarse a una serie de encajes de forma:

$$A_1 + A_2 + A_3 \ldots = B_1;\ A_n + A_{n+1} + \ldots = B_2;\ B_1 + B_2 + \ldots = C_1;\ \text{etc.?}$$

El álgebra de Boole bastaría entonces para todos los cálculos.

Tal es el verdadero problema que suscita la estructura de la clasificación: o bien es reductible a un grupo matemático y conduce a los conjuntos pero sin precisar el número y las potencias, o bien el agrupamiento constituye una realidad más elemental que el grupo y de estructura *sui géneris*.

Ahora bien, tres argumentos decisivos militan en favor de la especificidad del agrupamiento en tanto sucesión de encajes dicotómicos. Los tres se basan en el paralelismo necesario (que no hay que perder jamás de vista en lógica intraproposicional) entre las estructuras en comprensión (relaciones en tanto tales) y las estructuras en extensión (clases propiamente dichas). Desde este punto de vista, es fácil mostrar entonces: 1º el carácter natural y no artificial de las clases secundarias (A'; B'; C'; etc., en oposición a la enumeración de las clases primarias disyuntas); 2º la necesidad de las operaciones de absorción;

3º la posibilidad de reducir la lógica elemental de clases y relaciones a ocho agrupamientos simples, de los cuales cuatro se refieren a las relaciones y son isomorfos a cuatro agrupamientos de clases.

1. — Dada una serie de clases "primarias" A; B: C; etc., de las cuales cada una está incluida en la siguiente, llamaremos "secundarias" las clases A'; B'; C'; etc., tales que $A' = B - A$; $B' = C - B$; $C' = D - C$; etc. Ahora bien, resulta claro que si la clase A' no es vacía, contendrá un número indeterminado de clases del mismo rango que ella: si A es una "especie" del "género" B, la clase A' representa pues simplemente "las especies A_2; A_3; etc., distintas de A misma". Del mismo modo B' contiene las clases de rango B, etc. La noción de clase secundaria, cuyo rol es simplemente extender la complementariedad a todos los encajes, o dicho de otro modo, generalizar la partición dicotómica, ¿no es pues esencialmente artificial?

Como se recuerda, toda clase débilmente estructurada está determinada por una relación de equivalencia cualitativa (definición 16) dada entre los elementos (proposiciones 1, 4 y 10). Ahora bien, si esto ocurre en las clases primarias A, B, C, etc., las clases secundarias A', B', C', etc., estarán recíprocamente determinadas por relaciones particulares de no-equivalencia, que llamaremos en este caso "alteridades". Para comprender mejor la cuestión, conviene remontarse hasta

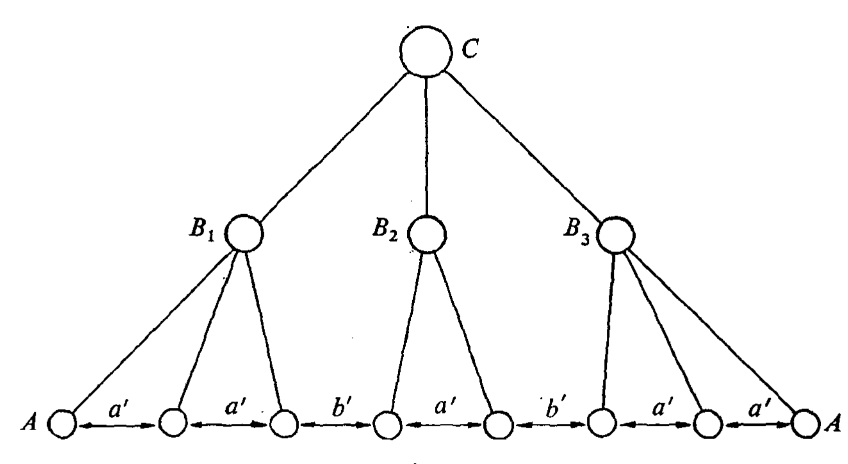


Fig. 5.

las formas más simples de clasificación, es decir, a los árboles genealógicos, cuyas clases corresponden, en comprensión, a las diversas relaciones de parentesco.

Sean las clases $A_{1(1)}$: los hijos de un mismo padre; $A_{1(2)}$: *ídem* (pero de otro padre); $A_{1(3)}$: *ídem* (pero de otro padre distinto); etc. Estas diversas clases $A_{1(1)}$; $A_{1(2)}$; $A_{1(3)}$; etc., se hallan incluidas en B_1: los nietos de un mismo abuelo. Sea igualmente B_2: los nietos de otro abuelo, la clase B_2 comprende ahora las subclases $A_{2(1)}$; $A_{2(2)}$; $A_{2(3)}$; etc., definidas como los $A_{1(1)}$; etc. Sea enseguida B_3, definida como B_2 (y que comprende $A_{3(1)}$; $A_{3(2)}$; etc.). Sea, en fin, la clase C: los bisnietos de un mismo bisabuelo (ver fig. 5), esta clase C comprende B_1; B_2; B_3; etc., así como las clases de rango A. Se ve que tales clases constituyen la extensión de las siguientes relaciones, que existen entre los individuos de cada clase: para cada clase A existirá una relación $a =$ ser hijo del mismo padre; para cada clase B existirá una relación $b =$ ser nieto del mismo abuelo; y para cada clase C existirá una relación $c =$ ser bisnieto del mismo bisabuelo. Pero, se ve igualmente que, si bien estas relaciones a, b, c, bastan para caracterizar las relaciones internas entre los individuos que pertenecen a una clase determinada de rango A, de rango B, o de rango C, no expresan por el contrario, las relaciones dadas entre dos individuos que pertenezcan respectivamente a dos clases de rango A distintas una de la otra: por ejemplo, entre un individuo de $A_{1(1)}$ y un individuo de $A_{1(2)}$ o de $A_{2(1)}$ o de $A_{3(1)}$.

Es pues necesario, introducir relaciones nuevas: la relación a' que unirá un individuo de la clase $A_{1(1)}$ por ejemplo, a un individuo de las clases $A_{1(2)}$ o $A_{1(3)}$ (o un individuo de la clase $A_{2(1)}$ a un individuo de las clases $A_{2(2)}$, etc.) y la relación b' que unirá un individuo de una de las clases A_1 a un individuo de una de las clases A_2 o A_3. Dicho de otro modo, existirá una relación de "alteridad" a' definible como $b - a$, por lo tanto "nieto de un mismo abuelo, pero no hijo de un mismo padre" = "primo hermano"; y una relación de alteridad b' definible como $c - b$, es decir, "bisnieto de un bisabuelo pero no nieto de un mismo abuelo" = "primo segundo", etc. Las relaciones de parentesco entre primos a', b', etc., tienen pues una significación a la vez unívoca e indispensable para la construcción de las relaciones de parentesco en general. Son relaciones simétricas (como las equivalencias a, b, etc.), pero no transitivas, que se derivan pues de una composición distinta a la de las equivalencias simples. Ahora bien, se advierte enseguida que son ellas las que determinan la existencia de las clases secundarias A' *y* B': si la clase $A_{1(1)}$ significa "los hijos de un mismo padre"; la clase B_1 "los nietos de un mismo abuelo", etc., entonces las clases $A_{1(2)}$; $A_{1(3)}$; etc., se reúnen bajo el símbolo $A'_{1(1)}$ y esta clase secundaria de rango A'_1 comprenderá todos los primos de $A_{1(1)}$; igualmente para B_1 en general, todos los B_2; B_3; etc., constituirán una clase secundaria B'_1 que serán los primos en segundo grado de los B_1. Recíprocamente, para la clase B_2 ó B_3, etc., se tendrán las clases secundarias B'_2 ó B'_3 que comprenderán los primos en segundo grado de los B_2; B_3; etc.

Este ejemplo de las relaciones de parentesco muestra bien la significación de las clases secundarias, que están determinadas por las

relaciones de "alteridad" a', b', etc. De manera general, si una clase A_1 está determinada por una equivalencia a y una clase B_1 por una equivalencia b, las clases A comprendidas en B_1, pero distintas de A_1, contendrán todas individuos relacionados a los miembros de la clase A_1 por la relación $a' = b - a$. En el caso de las relaciones de parentesco, estas alteridades llevan un nombre: son los *primazgos de diversos grados o rangos.* En el caso de las especies y de los géneros, no llevan ningún nombre, pero las relaciones son las mismas: si la relación a significa "de la misma especie" y b "del mismo género", entonces la alteridad significará "del mismo género, pero no de la misma especie"; igualmente b' significará "de la misma familia, pero no del mismo género". El papel de tales "alteridades" es indispensable para la teoría de las relaciones simétricas. Paralelamente, resulta de ello que las clases A y A' que dividen dicotómicamente una clase B (o B y B' que dividen dicotómicamente C, etc.), revisten una significación lógica general, en lugar de ser introducidas por las solas necesidades del cálculo. Ahora bien, las clases secundarias A', B', C'; y las relaciones a', b', etc., que las determinan, no podrían dar lugar a una formulación simple en el grupo de Boole-Bernstein mientras que caracterizan perfectamente la estructura del agrupamiento.

2. – En cuanto a las tautificaciones $A + A = A$ y a las absorciones $A + B = B$, que salen completamente del dominio de las operaciones que pertenecen a dicho grupo de Bernstein, su papel es tan indispensable para la construcción lógica de las clases y las relaciones, como el que desempeñan los términos secundarios. Es lo que demuestra con evidencia la composición de las relaciones simétricas, sobre las que volveremos en el capítulo III (§ 19).

Para continuar con el ejemplo de las relaciones de parentesco, evocadas hace un momento, resulta claro, en efecto, que la composición de las relaciones a, a', b, etc., definidas como acabamos de hacerlo (hijos de un mismo padre, primos hermanos y nietos de un mismo abuelo), se basa, en su mayor parte, en simples tautificaciones y absorciones.

$axy \cdot ayz \cdot \supset axz$	Si x es hermano de y e y hermano de z, entonces x es hermano de z.
$axy \cdot a'yz \cdot \supset a'xz$	Si x es hermano de y e y primo de z, entonces x es primo de z.
$axy \cdot byz \cdot \supset bxz$	Si x es hermano de y e y tiene el mismo abuelo que z, entonces x tiene el mismo abuelo que z.

. . .etc.

Ahora bien, cada una de estas composiciones de relaciones simétricas se basa en una adición tautológica de clases: $A + A = A$; $A_1 + A'_2 = A'_2$, puesto que A_1 está comprendida en A'_2 (por oposición a $A_1 + A'_1 = B_1$); $A + B = B$; etc. Si bien las tautologías y absorciones parecen constituir, a primera vista, un aparato superficial en el solo dominio de las clases, su utilización en el cálculo de relaciones simétricas es, por el contrario, indispensable, y no forma sino uno, en este caso, con el sistema de los encajes mismos.

3. — Finalmente, y sobre todo, los encajes dicotómicos según el esquema de los términos primarios A, B, C, . . . y secundarios A', B', C', . . ., permiten agrupar de la manera más simple y más simétrica el conjunto de las operaciones de clases y de relaciones. En efecto, las operaciones intraproposicionales pueden llevar ya sea a las clases, ya sea a las relaciones, lo que constituye desde ya dos posibilidades. Estas mismas operaciones pueden ser aditivas o multiplicativas, lo que nos da nuevamente dos posibilidades; de allí resultan cuatro agrupamientos posibles: la adición de clases, la de relaciones asimétricas (seriación), la multiplicación de clases y la de relaciones. Pero a esto se añade el hecho fundamental de que, en lugar de limitarse a los solos encajes de los términos secundarios en los primarios (A' en B, etc.), como ocurre en los agrupamientos anteriores, el agrupamiento puede llevar a las relaciones de los términos secundarios entre sí, lo que duplica nuevamente el número de agrupamientos. A la adición simple de clases corresponderá entonces un agrupamiento que lleve sobre las reciprocidades de las clases secundarias entre sí: $A_1 + A'_1 = A_2 + A'_2$; etc. (por ejemplo los hermanos A_1 y sus primos A'_1 = los hermanos A_2 y sus primos A'_2, si $A_2 \subseteq A'_1$ y $A'_2 \supseteq A_1$). A este agrupamiento aditivo de "vicariancias", como lo llamaremos, corresponderá por otra parte, en el dominio de las relaciones, el agrupamiento de relaciones simétricas, basado esencialmente en el mecanismo de los elementos secundarios. En cuanto a los agrupamientos multiplicativos, el desarrollo de los encajes secundarios conduce a un esquema de multiplicación counívoca como la multiplicación simple: es el esquema de los árboles genealógicos, traducidos ya sea en términos de clases, ya sea en términos de relaciones.

Se tendrá pues, la siguiente tabla exhaustiva, que corresponde a las ocho combinaciones precedentes:

		Agrupamientos de clases:	Agrupamientos de relaciones:
ADITIVOS	*Primarios*	1. Adición de clases.	5. Adición de relaciones asimétricas.
	Secundarios	2. Vicariancias.	6. Adición de relaciones simétricas.
MULTIPLICATIVOS	*Secundarios*	3. Multiplicación counívoca de clases.	7. Multiplicación counívoca de relaciones.
	Primarios	4. Multiplicación biunívoca de clases.	8. Multiplicación biunívoca de relaciones.

Es evidente que esta tabla que abarca todas las relaciones de clases y de relaciones, no podría ser un producto del azar. Ahora bien, la simetría que introduce entre los cuatro agrupamientos de clases y los cuatro agrupamientos de relaciones se basa esencialmente en el mismo principio de partición dicotómica que caracteriza al agrupamiento, es decir, sobre la división de los elementos en términos primarios y secundarios.

Indiquemos aún, para terminar, que esta noción de agrupamiento, con su carácter específico de dicotomía, se reencontrará necesariamente en el terreno de la lógica interproposicional. En efecto, a la inclusión $A \subseteq B$, que constituye la relación fundamental de encaje, corresponde, en la lógica proposicional, la relación de implicación $p \rightarrow q$. Ahora bien, si p implica q sin que la recíproca sea válida (por ejemplo, Mamífero implica Vertebrado, pero Vertebrado no implica Mamífero), entonces q está también implicada por otra proposición distinta de p y complementaria en relación a q (por ejemplo, "Vertebrado, pero no Mamífero": $\bar{p} \cdot q$). La noción de clase secundaria $A' = B - A$ está pues contenida en la misma relación de implicación, como volveremos a insistir sobre ello más adelante (cap. VI, § 39).

§ 12. EL AGRUPAMIENTO I: AGRUPAMIENTO ADITIVO DE CLASES.

Vamos a proceder ahora a una exposición sistemática de los cuatro agrupamientos de clases, comenzando por el de la adición simple (o inclusiva), ya descrito en parte en el curso de las notas precedentes.

Sea pues una serie de clases $A \subset B \subset C \subset \ldots$ llamadas "pri-

marias"en las que cada una está incluida en la siguiente. Al no ser estas clases equivalentes, si no ordenadas según la relación de inclusión, es posible hacer corresponder a cada una de ellas su complementaria en relación a la que le sigue: $A' = B - A$; $B' = C - B$; $C' = D - C$; etc. Tales clases complementarias en relación a la clase incluyente más próxima, se denominan "secundarias". La clase A y las clases secundarias A', B' C', ..., serán denominadas en conjunto las "clases elementales" del sistema. El agrupamiento aditivo de clases, está pues constituido por la serie de encajes dicotómicos:

(18) $A + A' = B$; $B + B' = C$; $C + C' = D$; etc. (ver fig. 4).

Las clases elementales del sistema pueden ser singulares. Pero no lo son necesariamente, en cuyo caso el agrupamiento se aplicará también al caso ya descrito (§ 9) donde una "especie" A está situada directamente en relación a otras especies (A') en un "género" B, etc. Pero, si nos atenemos a las solas operaciones del agrupamiento I, las clases secundarias no se consideran como descomponibles (su descomposición concierne a los agrupamientos II y III).

Dicho esto, dos operaciones cualesquiera del agrupamiento dan, por su composición, una nueva operación del agrupamiento. Estas composiciones son cinco:

1. La *operación directa* consiste en una adición miembro a miembro de ecuaciones de forma $A + A' = B$; $B + B' = C$; etc., o de identidades $A = A$ y $A - A = 0$[1]. Pero, si se permanece en las series homogéneas (definición 19) y se aplican las reglas del cálculo I-III (§ 10), se puede llamar, por extensión, operación directa, la adición de una clase cualquiera del sistema: $+ A$; $+ B$; $+ A'$; etc.

2. La *operación idéntica general*, es aquella que satisface simultáneamente las dos condiciones siguientes: (a) compuesta con una operación cualquiera deja a esta invariante; (b) constituye el producto de la operación directa y su inversa (ver 4). Ahora bien, el agrupamiento I posee una y sólo una idéntica general: es la operación $0 = 0$ ($ó + 0 = - 0$) ó por extensión ± 0. En efecto, se tiene:

[1] 0 designa la clase vacía, que habíamos simbolizado θ en el § 10.

(19) $A + 0 = A$ (condición *a*)

y:

(19 *bis*) $A - A = 0$ (condición *b*)

3. Las *idénticas especiales* (tautología y absorción) desempeñan el rol (*a*) de la idéntica general, pero disociado del rol (*b*). En efecto, toda clase adicionada a ella misma y a una clase de rango superior y del mismo signo, deja esta invariante:

(20) $A + A = A$; $A + B = B$; $A + C = C$; etc.

y:

(20 *bis*) $-A - A = -A$; $-A - B = -B$; etc.

Pero $+A$ pierde el rol de idéntica con su propia inversa y con las clases de rango superior de signo contrario:

$$A - A = 0; \quad A - B = -A'; \text{ etc.}$$

Hay pues, además de la idéntica general, las idénticas especiales (es decir, ni generales, ni singulares). Es preciso notar que estas operaciones de tautificación y de absorción no podrían reducirse a operaciones de simplificación, si bien en las series homogéneas el cálculo aparezca como semejante en virtud de la regla I: la simplificación es, en efecto, una operación inversa, que consiste en suprimir un mismo término en los dos miembros de la ecuación, mientras que una absorción no es una inversión, sino una operación que asegura la inclusión, y en consecuencia, que está sometida a un orden (*A* se absorbe en *B* y no *B* en *A*).

4. La *operación inversa* ($-A$) es aquella que anula la operación directa ($+A$). La operación inversa es única, pese a la dualidad de las idénticas, pues sólo la idéntica general determina la inversa, en virtud de su rol (*b*):

(21) $A - A = 0$; $B - B = 0$; $A' - A' = 0$; etc.

Por el contrario, las idénticas especiales que sólo satisfacen el rol (a), no determinan ninguna inversa.

5. La *asociatividad* $(x + y) + z = x + (y + z)$ es general entre términos de signos iguales o entre términos de distintos signos, pero que no contengan idénticas especiales:

$$(A + A) + A' = A + (A + A') \tag{22}$$

puesto que:

$$(A) + A' = A + (B)$$

y:

$$A + A' = B \text{ y } A + B = B \tag{22 bis}$$

Por el contrario, en las series de signos diversos, no hay asociatividad puesto que un mismo término desempeña alternativamente el rol de idéntica especial y un rol diferente. Por ejemplo:

$$(-A - A) + B = -A + (-A + B)$$

daría $(-A + B) = (-A + A')$, es decir $(A' = -A + A')$, lo que es absurdo.

La operación elemental del agrupamiento aditivo de clases es pues la adición no disyuntiva [1] (definición 17) por oposición a la adición disyuntiva del grupo de Bernstein. En el caso de $A + A' = B$, las clases A y A' son disyuntas por definición, mientras que en el caso de $A + B = B$, las clases adicionales no lo son. La inversa es la sustracción no disyuntiva [2]:

$$-A - A' = -B \text{ ó } -A - B = -B$$

Es importante advertir que este agrupamiento I es el único agrupamiento de clases en el cual todas las operaciones son posibles en

1 En lógica proposicional será pues la operación v (trilema) y no w (dilema). Ver § 39.

2 En lógica proposicional, será la negación conjunta $\bar{p} . \bar{q}$ (ver § 39).

el caso particular de que las clases elementales sean singulares. En el caso de los agrupamientos II al IV, por el contrario, algunas operaciones dejan de ser distintas cuando las clases elementales son singulares. Cuando las clases elementales del agrupamiento I son singulares, puede considerarse a este agrupamiento como una *enumeración*. Una enumeración no constituye una operación de enumeración: ella no implica ningún número y se limita sólo a designar cada individuo por una al menos de sus cualidades propias, es decir, por una de las características de la clase singular que constituye. Esta característica puede reducirse a su nombre: la serie Pedro, Pablo, Santiago y Juan constituye así una enumeración simplemente lógica, siempre que no haga referencia más que al carácter distintivo de esos individuos, sin referirse al número 4. Pero supone necesariamente, ya sea una simple relación de orden (*cf.* agrupamiento V), o bien una serie de encajes dicotómicos, aún cuando estos puedan permanecer implícitos. En el caso de cuatro nombres, estos encajes son arbitrarios. Por el contrario, en la siguiente enumeración, la adición de clases elementales singulares, corresponde en cambio a una real jerarquía de encajes: las ciencias exactas y naturales son las matemáticas (A), la mecánica (A'), la física (B'), la química (C'), la biología (D') y la psicología (E'); en efecto, las clases $A + A' = B$ (matemáticas y mecánica), $B + B' = C$ (matemáticas, mecánica y física), $C + C' = D$, etc., corresponden a encajes que no podrían cambiarse sin modificar el sentido y el alcance de la enumeración. No obstante, otra enumeración de las mismas clases singulares conduciría a la misma clase primaria total F (ver agrupamiento II).

Dicho esto, el principal interés teórico que presenta este agrupamiento I, es el de poner en evidencia la diferencia entre la enumeración y la numeración, es decir, entre una serie de clases incluidas $A \subset B \subset C \subset D \ldots$ y la serie de números enteros $1 < 2 < 3 < 4 \ldots$ Se sabe que la escuela logística (Russell) ha considerado el número cardinal como un simple derivado de las clases (ver § 25). Si se reducen las clases elementales A, A', B', ..., a las clases singulares correspondientes a la adición $+ 1$, se tiene, en efecto, la siguiente tabla:

$$0 + A = A;\; A + A' = B;\; B + B' = C;\; C + C' = D;\; \text{etc.}$$
$$0 + 1 = 1;\; 1 + 1 = 2;\; 2 + 1 = 3;\; 3 + 1 = 4;\; \text{etc.}$$

Pero entre estas dos series existen las siguientes diferencias, que las leyes del agrupamiento manifiestan de manera explícita:

1º El elemento lógico cualificado no puede ser adicionado a sí mismo más que de manera tautológica: $A + A = A$. Por el contrario, la adición de la unidad aritmética es iterable: $1 + 1 = 2$. De ahí la presencia de las idénticas especiales en el agrupamiento de clases y su ausencia en el grupo aditivo de números enteros.

2º Las clases elementales A; A'; B'; etc., no son lógicamente equivalentes entre sí más que relativamente a las clases primarias que las incluyen:

$A \overset{A}{\longleftrightarrow} A$ es verdadero, pero $A \overset{A}{\longleftrightarrow} A'$; $A \overset{A}{\longleftrightarrow} B'$; etc.; son falsas.
$A \overset{B}{\longleftrightarrow} A'$ es verdadero, pero $A \overset{B}{\longleftrightarrow} B'$; $A \overset{B}{\longleftrightarrow} C'$; etc.; son falsas.
$A \overset{C}{\longleftrightarrow} B'$ y $A' \overset{C}{\longleftrightarrow} B'$ son verdaderas, pero $A \overset{C}{\longleftrightarrow} C'$; $A' \overset{C}{\longleftrightarrow} D'$; etc.; son falsas.

Por el contrario, la operación aritmética $+ 1$ expresa una equivalencia generalizada entre todas las clases elementales:

$$A = A' = B' = C' = \ldots = 1$$

3º En tercer lugar, las operaciones del agrupamiento sólo pueden efectuarse de manera *contigua*, es decir, relativamente a las complementariedades dicotómicas de la cual constituyen la estructura (ver § 10 capítulo III), mientras que la composición de los números enteros es indefinidamente móvil e independiente de los encajes. Esta tercera diferencia, que implica las otras dos, expresa de la manera más general la diferencia que separa los agrupamientos de los grupos numéricos: los primeros conducen únicamente a las relaciones de parte a todo, con la sola excepción de las relaciones directas entre las partes de un mismo todo.

§ 13. EL AGRUPAMIENTO II: LAS VICARIANCIAS.

El agrupamiento aditivo de clases conoce sólo las operaciones $A + A' = B$ y $A + B = B$, sin descomponer las clases secundarias A'; B'; C'; ..., en sus elementos, ni las clases primarias B; C; D; ..., según las diversas dicotomías posibles para cada una. Ahora bien, estas operaciones pueden efectuarse y aparecen incluso como indispensables en las composiciones aditivas de la lógica cualitativa corriente.

Sea la clase de los "extranjeros a Francia" y la clase de los "extranjeros a China". La adición de ambas clases da "todos los hombres", puesto que la primera comprende los chinos y la segunda comprende los franceses. Sea además el conjunto de los "hijos de z_1" que comprende entre otros los individuos x_1 y x_2: la clase de los "hermanos de x_1" y la de los "hermanos de x_2", darán pues por su reunión "todos los hijos de z_1", puesto que los "hermanos de x_1" comprende a x_2 y los "hermanos de x_2" comprende a x_1. Si tratamos ahora de formalizar estas adiciones, constatamos que ni una ni otra entran en los esquemas $A + A' = B$ y $A + B = B$, puesto que las clases a adicionar interfieren

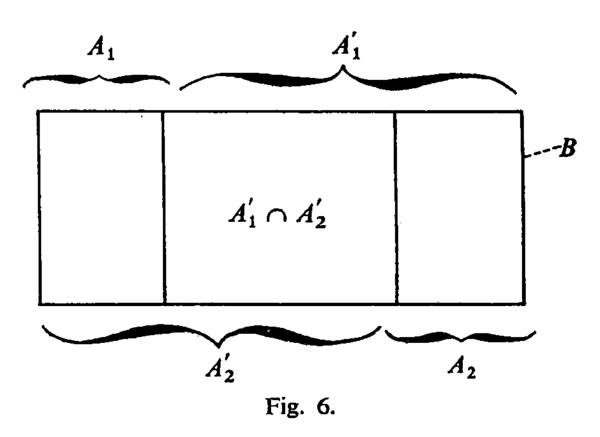


Fig. 6.

una con otra en lugar de ser disyuntas o de estar incluida una en otra. Conviene pues considerar la clase "todos los hombres" como una clase de rango B, pero dividida según dos dicotomías distintas: A_1 = los franceses y A'_1 = los extranjeros a Francia, así como A_2 = los chinos y A'_2 = los extranjeros a China. De igual modo, "los hijos de z_1" $= B$, el individuo $x_1 = A_1$, sus hermanos $= A'_1$, el individuo $x_2 = A_2$, sus hermanos $= A'_2$. Se tiene entonces, en ambos casos:

(23) $$(A_1 + A'_1) = (A_2 + A'_2) = B$$

(23 *bis*) $$A'_1 + A'_2 = B$$

y:

$$A_1 \subseteq A'_2 \quad \text{y} \quad A_2 \subseteq A'_1$$

La proposición (23 *ter*) significa que A_1 forma parte de A'_2 y que A_2 forma parte de A'_1 (ver figura 6). Hay pues una doble dicotomía de la clase B, pero hay sobre todo reciprocidad [1] entre los encajes $A_1 \subseteq A'_2$ y $A_2 \subseteq A'_1$.

Designaremos la operación (23) con el nombre de "sustitución complementaria" o "vicariancia". Estas expresiones significan que si en una ecuación de la forma $A_1 + A'_1 = B$, se sustituye A_1 por A_2, es preciso igualmente sustituir A'_1, clase complementaria de A_1, por A'_2, clase complementaria de A_2.

Naturalmente que la vicariancia no se limita sólo a las clases secundarias de rango A', sino que atañe a todas las clases secundarias, sea cual sea su rango. Notemos en primer lugar, en lo que concierne a las clases A', que una clase A' puede contener varias clases de rango A, lo que significa que la clase B puede dividirse dicotómicamente (fig. 2) en:

(24) $$B = A_1 + A'_1 = A_2 + A'_2 = A_3 + A'_3 = \ldots, \text{ etc.}$$

Por ejemplo, además de los franceses y los extranjeros a Francia, los chinos y los extranjeros a China, existen los turcos y los extranjeros a Turquía, etc.

Si A' no contiene más que una clase de rango A, se tiene entonces [2]:

(25) $$A'_1 = A_2 \quad \text{y} \quad A'_2 = A_1$$

1 *Cf.* en lógica proposicional $p_1 \vee p_2 \leftrightarrow p_1 p_2 \vee p_1 \overline{p_2} \vee \overline{p_1} p_2$, es decir, la disyunción no exclusiva (ver § 28, en III).

2 *Cf.* en lógica proposicional; $p_1 \mathbin{w} p_2$ opuesto a $p_1 \vee p_2$; de donde $\overline{p_1} \equiv p_2$ y $\overline{p_2} \equiv p_4$, opuestos a $\overline{p_1} \supset p_2$ y $\overline{p_2} \supset p_1$. *Cf.* § 30 en XII.

Sino, se tiene:

$$(25\ bis)\quad A'_1 = A_2 + A_3 + A_4 + \ldots;\ A'_2 = A_1 + A_3 + A_4 + \ldots;$$
$$A'_3 = A_1 + A_2 + A_4 + \ldots;\ \text{etc.}$$

Una clase secundaria de rango B' contiene por otra parte, si no es nula, una o varias clases de rango B, que contiene a su vez clases A y A':

$$(26)\qquad B_1 + B'_1 = B_2 + B'_2 = \ldots,\ \text{etc.} = C$$

Una clase C' secundaria contiene a su vez, si no es nula, una o varias clases de rango C, de las cuales cada una se reparte en B y B', etc.

Las vicariancias constituyen por lo tanto un agrupamiento, de modo que la reunión de dos vicariancias de por resultado siempre otra vicariancia:

1. *Operación directa:*

$$(27)\qquad [(A_1 + A'_1 = A_2 + A'_2) + (B_1 + B'_1 = B_2 + B'_2)]$$
$$= [A_1 + A'_1 + B'_1 = B_2 + B'_2]$$

donde $B_1 = A_1 + A'_1$ y donde B'_1 engloba a B_2, mientras que B'_2 engloba a A_1 y A'_1.

2. *Operación idéntica general:* $0 + 0 = 0 + 0$.

3. *Idénticas especiales:* reuniones de una vicariancia a sí misma.

4. La *operación inversa* es la sustracción de una vicariancia. Si esta sustracción recae sobre la ecuación positiva correspondiente, la anula:

$$(B_1 + B'_1 = B_2 + B'_2) - (B_1 + B'_1 = B_2 + B'_2) = 0$$

Si, por el contrario, una vicariancia menos extendida es sustraída a una vicariancia de mayor extensión, la sustracción se limita a separar

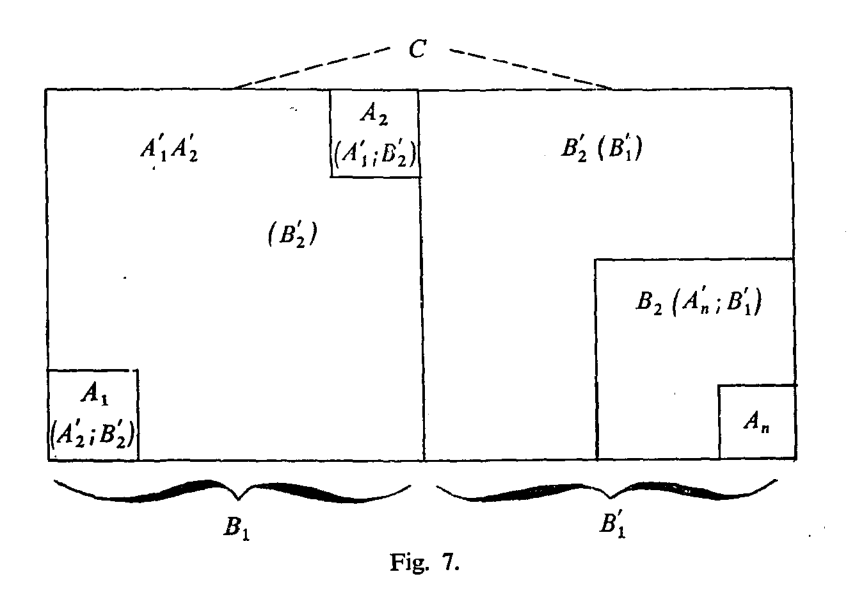


Fig. 7.

los encajes de orden inferior dejando subsistir los encajes superiores. Se tiene, en efecto, por sustracción miembro a miembro:

$$(28) \qquad (A_1 + A'_1 + B'_1 = B_2 + B'_2) - (A_1 + A'_1 = A_2 + A'_2)$$
$$= (B'_1 = B_2 + B'_2 - B_1)$$

(ver fig. 7)

de donde, por transferencia de B_1 al otro miembro:

$$(B_1 + B'_1 = B_2 + B'_2)$$

El interés práctico de este agrupamiento de vicariancias es probablemente nulo, puesto que todo problema de composición que lleve sobre los encajes recíprocos de clases complementarias da lugar a una intuición inmediata de la reciprocidad (ya se trate de parentescos, de la noción de "extranjero", etc., en lógica cualitativa, o de vecindades, de exterioridades, etc., en la de los conjuntos de puntos). Pero el interés teórico es sumamente grande, puesto que son estas operaciones

las que corresponden, en el dominio de la lógica de clases, a la lógica de relaciones simétricas.

En efecto, como hemos comenzado a ver en el § 11, las composiciones de relaciones simétricas corresponden, ya sea a tautologías simples

$$A + A = A \quad \text{y} \quad A + B = B.$$

ya sea a inclusiones tautológicas de clases primarias en clases secundarias: $A + A' = A'$ (por ejemplo, el hermano de mi primo hermano es mi primo hermano: $a + a = a'$). Pero, en este caso, se trata de una clase primaria A y de una clase secundaria A' no complementaria, por ejemplo $A_1 + A'_2 = A'_2$ (pues $A_1 \subseteq A'_2$) ó $A_2 + A'_1 = A'_1$ (pues $A'_1 \supseteq A_2$): se trata pues precisamente de composiciones que corresponden a las del presente agrupamiento, por oposición a las del agrupamiento I $(A + A' = B)$.

§ 14. EL AGRUPAMIENTO III

LA MULTIPLICACION CO-UNIVOCA DE CLASES.

La adición no es sino una de las dos operaciones que son posibles efectuar sobre las clases. Estas admiten igualmente operaciones de multiplicación, de las cuales distinguiremos la forma elemental o intersección y los dos agrupamientos posibles, co-unívoco y bi-unívoco.

Definición 21. — *Llamaremos "multiplicación simple", o intersección, la operación que, estando dadas dos clases A y B, determina la más grande de las clases incluida simultáneamente en A y en B, es decir su "parte común".*

Si AB es la clase de los individuos que pertenecen "a la vez" a A y a B (fig. 8), se tendrá entonces, si designamos por $(\times)$ la multiplicación:

(29) $$A \times B = A \cap B = AB$$

y:

(29 *bis*) $AB \subseteq A$ y $AB \subseteq B$

En el caso que la clase (A) esté incluida (es decir enteramente comprendida) en (B), sin que la recíproca sea válida, el producto (AB) será equivalente entonces a la clase (A) misma, pero el símbolo multiplicativo $\times$ expresará, a diferencia del símbolo aditivo $+$ que todos los miembros de (A) son "al mismo tiempo" miembros de (B):

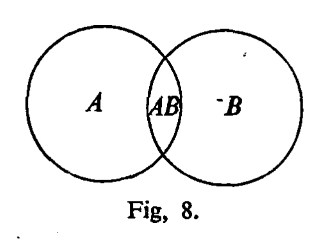
(30) Si $(A \subseteq B)$ entonces $(A \times B) = AB = A$

Por otra parte, si dos clases B_1 y B_2 están incluidas una en la otra, es decir si cada una de las dos comprende todos los términos de la otra, se tiene:

(31) Si $(B_1 \subseteq B_2)$ y $(B_2 \subseteq B_1)$

entonces $(B_1 \times B_2) = B_1 B_2 = B_1 = B_2$

Pero la identidad de los elementos contenidos en B_1 y en B_2, por lo tanto, de B_1 y B_2, no supone la de las subclases mismas: puede no haber entre ellas más que una "equivalencia multiplicativa" (ver § 21) puesto que B_1 y B_2 pueden repartir los mismos elementos según dos tipos de encajes distintos. Es lo que se produce en el caso de las tablas de doble (o triple, etc.) entrada, que constituirá el principio del agrupamiento de las "multiplicaciones bi-unívocas" (agrupamiento IV).



Fig, 8.

De manera general, para agrupar las operaciones multiplicativas, se trata precisamente de no componer entre sí más que las clases que se recubran íntegramente según el principio de la proposición (31). Existe pues, desde este punto de vista, una primera forma de agrupamiento, más simple que el de las tablas de doble entrada, y que consiste simplemente en multiplicar la serie de clases primarias del agrupamiento I, sea $A, B, C, \ldots$, por todas las formas de clases elementales encajadas respectivamente en ellas. Llamaremos "multiplicación co-

unívoca'' esta operación, puesto que se basa en un modo de composición de ''uno a muchos'' que se puede designar con el término de correspondencia co-unívoca:

Definición 22. — *Sea A_1; B_1; C_1; etc., una serie de clases primarias de las cuales cada una está incluida en la siguiente y sea A_2; A'_2; B'_2; etc., la serie de clases elementales suceptibles de estar incluidas en cada una respectivamente de las clases de la serie A_1; B_1; C_1; etc.; llamaremos "multiplicación co-unívoca" la operación que determina la parte común entre una cualquiera de las clases de la primer serie K_1 y todas las clases de la segunda serie comprendidas entre A_2 y la clase de rango K_2 (correspondiente al rango de K_1).*

Por ejemplo, A_1 serán los ''hijos de un mismo padre'', B_1 ''los nietos de un mismo abuelo'', C_1 ''los bisnietos de un mismo bisabuelo'', etc. En este caso los A_2 serán los ''hermanos'', los A'_2 los ''primos hermanos'', los B'_2 ''los primos segundos'', etc. Se tendrá entonces la tabla [1]:

(32)
$$A_1 \times A_2 = A_1A_2$$
$$B_1 \times B_2 = B_1A_2 + B_1A'_2 = (B_1B_2)$$
$$C_1 \times C_2 = C_1A_2 + C_1A'_2 + C_1B'_2 = (C_1C_2)$$
$$D_1 \times D_2 = D_1A_2 + D_1A'_2 + D_1B'_2 + D_1C'_2 = (D_1D_2)$$
Etc...

La operación así caracterizada significa pues que a una clase incluyente cualquiera, por ejemplo B_1, corresponden como partes comunes, las clases incluidas comprendidas entre A_2 y B_2, sea A_2 y A'_2 (es decir, las clases de los hermanos y la de los primos hermanos, estas clases son naturalmente vicariantes una respecto de la otra).

Son estas composiciones las que determinan de manera completa una clasificación. Por ejemplo, si A_1; B_1; C_1; etc., representan las especies, los género, las familias, etc., en el sentido del § 9 y A_2; A'_2; B'_2; etc., las diversas especies, géneros, familias que pudieran estar comprendidas en las clases A_1; B_1; C_1; etc., la multiplicación co-unívoca (32) significa que una especie A no contiene nada más que a sí misma, que un género B puede contener una especie (A), otras especies (A')

1 Es preciso comprender que conforme a la proposición 31, los individuos comprendidos en las clases A_1 y A_2, o B_1 y B_2, o C_1 y C_2, etc., son, para cada una de las cuplas respectivas de esta tabla, los mismos individuos.

y a sí mismo, que una familia C puede contener especies y géneros ($C_1A_2 + C_1A'_2 = C_1B_2$), pero que no contiene ningún término de rango superior a sí misma, etc.

Las operaciones del agrupamiento son así las siguientes:

1. *Operación directa:*

$$K_1 \times K_2 = A_1A_2 + B_1(A_2 + A_2') + C_1(A_2 + A_2' + B_2') \ldots$$

(ver proposición 32)

2. La *operación inversa* de una multiplicación lógica consiste en lo que se puede llamar una *división* lógica (:). El significado de esta operación es el de la *abstracción*, en el sentido ordinario del término: "abstracción hecha de K_2 el producto K_1K_2 se resuelve en K_1":

(33) $$A_1A_2 : A_2 = A_1 \quad \text{y} \quad A_1A_2 : A_1 = A_2$$

Es importante comprender bien la diferencia entre la adición lógica (+) que tiene por inversa la sustracción (–) y la multiplicación lógica (×) cuya inversa (:) presenta un significado muy distinto al de la sustracción o negación. Reunir dos clases $A + A'$, es en efecto, determinar una clase de extensión superior a cada una de ellas (B) y que contiene los individuos de A' además de los de A: los vertebrados (A) y los invertebrados (A') son todos los animales (B). La operación $B - A' = A$ consistirá pues en quitar de la extensión de B la de A' para reencontrar la de A (los animales menos los invertebrados son los vertebrados). Por el contrario, una operación como la multiplicación lógica $A \times B = AB$ (ó $B_1 \times B_2 = B_1A_2 + B_1A'_2 = B_1B_2$) no aumenta la extensión de las clases multiplicadas entre ellas, pero llega a un producto cuya extensión es igual a la de las mismas, siempre que ambas sean de la misma extensión (B_1 y B_2) o igual a la de la más pequeña de las clases multiplicadas si ésta se halla incluida en la otra. Lo que aumenta la multiplicación lógica es simplemente el número de los encajes: esta operación significa que los individuos de A pertenecen *a la vez* a A y a B, sea AB (al igual que la operación $B_1 \times B_2$ significa que los B_1 serán a la vez B_1 y A_2 ó B_1 y A'_2, por lo tanto $B_1A_2 + B_1A'_2$). La operación inversa no consiste pues en suprimir los individuos del producto AB, sino simplemente en suprimir

un encaje; luego, $AB : B = A$. Ahora bien, como no se puede suprimir la existencia de un encaje, el cual está dado además en virtud de la construcción aditiva de las clases $A + A' = B$ (agrupamiento I), suprimir un encaje consiste pues en hacer abstracción del mismo. Así, por ejemplo, la clase A (los vertebrados) pertenece a la clase B (los animales), a la clase C (los seres vivos), etc. Pero, al formular la clase A bajo la forma A, en lugar de formularla bajo la forma AB o ABC, etc., se establece el derecho de hacer abstracción de sus encajes AB, o ABC, etc., para no considerar más que la clase A en sí misma. Tal es la significación de la operación inversa de la multiplicación ($\times$): la división lógica (:) es pues una abstracción y no tiene nada de sustracción.

3. Las *idénticas especiales* propias de los agrupamientos multiplicativos serán también distintas de las de la adición. Se reencuentra la *tautología* $A \times A = A$; $B \times B = B$; etc. Pero, el mismo hecho de que la multiplicación aumenta sólo el número de encajes y no la extensión de las clases multiplicadas, la multiplicación de una clase de menor extensión por una clase de mayor extensión, es decir, la multiplicación de la parte por el todo, da un producto que no equivale, en extensión, al todo mismo, sino a la parte sola. Mientras que la adición admite la reabsorción de la parte en el todo ($A + B = B$), la multiplicación no admite en cambio, sino la *absorción* del todo en la parte: si $A \subseteq B$, entonces $A \times B = AB$, donde $AB \subseteq B$, puesto que AB equivale a A misma.

(34) $$B_1A_2 \times B_1B_2 = B_1A_2;\ \text{etc.}$$

4. La *operación idéntica general* no es 0 como en los agrupamientos aditivos. La clase nula (0) es por el contrario, el producto de la multiplicación de clases, sin elementos comunes: $A_1 \times A_1 = 0$. Más precisamente, la clase nula (0) es conforme a la definición general de la multiplicación lógica (definición 21), la más grande de las clases simultáneamente contenida en dos clases que no tienen individuos comunes.

La idéntica general está constituida por lo que resta cuando se hace abstracción de todos los encajes, ya que representa, por definición, el producto de la operación directa por su inversa y ya que la

inversa no es otra que la abstracción. Luego, si $B_1 \times B_2 = B_1B_2$, la idéntica general será $B_1B_2 : B_1B_2$; igualmente, si $A \times B = AB$, la idéntica general será $AB : AB$. Ahora bien, si se divide AB por B (sea $AB : B = A$), se encuentra una clase A de extensión igual a AB, pero si se hace abstracción de A (sea $AB : A = B$), se obtiene la clase B, independientemente de A, sea una clase B de extensión superior a AB (ya que $AB \subseteq B$). Si se continúa así, dividiendo B por sí misma, $B : B$ (ó AB por sí *misma* $AB : AB$, etc.), se obtiene no la clase nula (ya que no se sustraen los individuos, sino que se suprimen sólo los encajes): se obtiene la clase total U, la clase más general del sistema considerado (y que le sirve de referencial), ya que se hace abstracción de todo encaje particular. Dicho de otro modo, una clase cualquiera (tal como $B =$ los animales), abstracción hecha de sí misma ($B : B$) significa que los individuos de los cuales está compuesta, no se diferencian de los individuos de cualquier otra clase, y que son simplemente considerados como pertenecientes a la clase más general del sistema en cuestión: los Animales, abstracción hecha de los Animales, son seres cualquiera. De donde:

(35) $$A : A = U; \quad B : B = U; \quad AB : AB = U; \text{ etc.}$$

Se llega entonces a la siguiente contradicción aparente: por una parte, la clase U es aquella de la cual se hace abstracción al establecer una clase diferenciada cualquiera, A o B, etc.:

(36) $$AU : U = A; \quad BU : U = B$$

por otra parte, es la clase que reaparece cuando se divide una clase por sí misma (proposición 35). Pero lo que ocurre es que, en realidad, toda clase que pertenece a un sistema cuya clase más general es U, es siempre un producto de U y de sí misma:

(37) $$A \times U = A; \quad B \times U = B; \text{ etc.}$$

De lo que resulta que al dividir A por sí misma, se efectúa en realidad la siguiente operación:

(38) $$AU : A = U; \quad BU : B = U; \text{ etc.}$$

En efecto, no se puede hacer abstracción de "todo" a la vez, y al ser siempre una clase cualquiera parte del "todo" *U* al mismo tiempo que ella misma, la operación que consiste en hacer abstracción de sí misma ($A : A$) la relaciona al todo *U* como si se tratase de la operación (38). La clase *U* desempeña pues el mismo rol que la unidad 1 en la multiplicación de los números:

$$4 \times 1 = 4; \qquad 4 : 1 = 4; \text{ etc.}$$

5. La *asociatividad* propia de los sistemas multiplicativos es similar a la de los agrupamientos aditivos: general en las series de operaciones todas directas ($\times$) o inversas (:), fracasa en las series mixtas, por la combinación de idénticas especiales y otras operaciones.

§ 15. EL AGRUPAMIENTO IV: LA MULTIPLICACION BI-UNIVOCA DE LAS CLASES.

La multiplicación co-unívoca consiste en poner en correspondencia un todo con sus partes según el principio de "uno a muchos". Pero es también posible multiplicar dos series de clases según el principio de la correspondencia bi-unívoca como es el caso de las tablas de doble (o triple, etc.) entrada.

Supongamos dos clases B_1 y C_2, tales que todos los individuos de B_1 formen parte de C_2 y recíprocamente. Por ejemplo B_1 serán los Animales divididos en A_1: los Vertebrados y en A'_1: los Invertebrados. En cuanto a C_2 serán nuevamente los Animales, pero distribuidos según una partición diferente (según su hábitat: A_2: terrestres; A'_2: acuáticos y B'_2: aptos para volar, designando estas tres clases según definición adecuadas). Podemos introducir entonces la siguiente operación:

Definición 23. — *Estando dadas dos series de clases elementales A_1; A'_1; B'_1; ... y A_2; A'_2; B'_2; ..., llamaremos multiplicación bi-unívoca la operación consistente en determinar la parte común entre cada clase de la primera serie y cada clase de la segunda.*

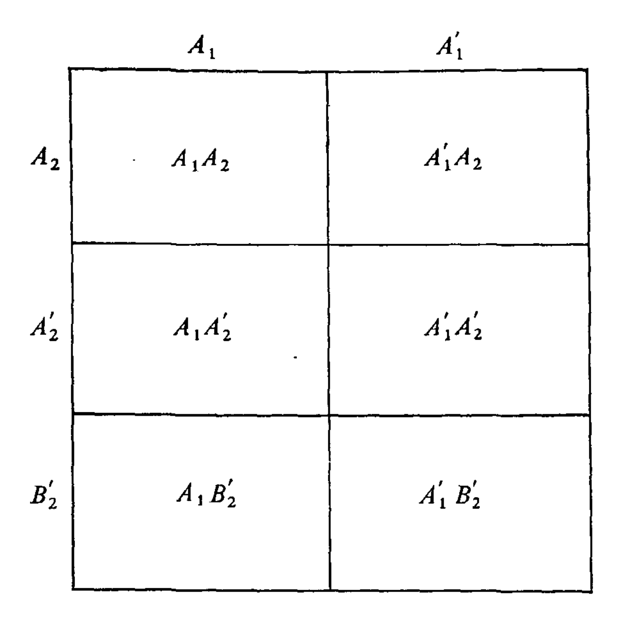


Fig. 9. — La clase B_1 está constituida por la reunión de las dos columnas verticales A_1 y A'_1; la clase C_2 por la reunión de las tres líneas horizontales superpuestas A_2, A'_2 y B'_2.

(39) $$B_1 \times C_2 = A_1A_2 + A_1A'_2 + A_1B'_2 + A'_1A_2 + A'_1A'_2 + A'_1B'_2$$

Se tendrá pues (ver la figura 9), si ninguna de las asociaciones es nula:

La clase A_1A_2 constituye así la parte común entre la clase A_1 y la clase A_2 (en nuestro ejemplo, la clase A_1A_2 será la de los vertebrados terrestres); la clase $A_1A'_2$ representa igualmente el producto de la intersección de las clases A_1 (vertebrados) y A'_2 (animales acuáticos), etc. Semejante operación generaliza pues la de la intersección (definición 21) al establecer todas las intersecciones posibles entre dos series de clases. En cuanto a la tabla de doble entrada que resulta así construida, presentará una correspondencia bi-unívoca entre las diversas subclases de A_1 (primera columna) y las diversas subclases de A_2 (se-

gunda columna) o aún entre las diversas subclases de A_2; A'_2 y B'_2 (líneas horizontales).

Si los agrupamientos I al III constituyen el fundamento de las clasificaciones simples, el agrupamiento IV expresa en cambio las clasificaciones múltiples o comparativas: por ejemplo, las tablas de doble entrada puramente cualitativas que intervienen en anatomía comparada.

Las operaciones del agrupamiento son las siguientes:

1. *Operaciones directas:*

$$A_1 \times A_2 = A_1A_2$$

$B_1 \times B_2 = (B_1B_2) = A_1A_2 + A_1A'_2 + A'_1A_2 + A_1'A_2'$; etc.
$B_1B_2 \times B_3 = (B_1B_2B_3) = A_1A_2A_3 + A_1A_2A'_3 + A'_1A_2A_3 + A'_1A_2A'_3 + A_1A'_2A_3 + A_1A'_2A'_3 + A'_1A'_2A_3 + A'_1A'_2A'_3$; etc. (ver prop. 39).

2. *Operaciones inversas:* $B_1B_2 : B_2 = B_1$; $B_1 : B_1 = U$ (cf. props. 33 y 35).

3. *Idéntica general:* U, porque $B_1 \times U = B_1$; $B_1 : U = B_1$ y $B_1 : B_1 = U$ (cf. props. 35 a 38).

4. *Idénticas especiales:* tautología ($B \times B = B$) y absorción ($A \times B = A$). Por lo tanto, cada clase desempeña el papel de idéntica en relación a sí misma y a las clases de rango inferior incluidas en ella (cf. proposición 34).

5. *Asociatividad*: como en el agrupamiento III.

Las reglas del cálculo son las mismas que en los agrupamientos aditivos (cf. las reglas I a IV del § 11), con substitución de la absorción en lugar de la reabsorción. Esto por lo demás es natural, ya que el agrupamiento de multiplicaciones bi-unívocas puede ser concebido como un doble o múltiple agrupamiento aditivo.

Tres observaciones precisarán la importancia de este agrupamiento IV:

1º Es el más general de los agrupamientos de clases, en el sentido de que cada uno de los precedentes puede ser derivado del mismo,

sin que la recíproca sea válida. Así, el agrupamiento aditivo simple (I) constituye una de las series de los encajes A, B, C, ..., que intervienen en la multiplicación bi-unívoca. El agrupamiento de las vicariancias (II) interviene en la equivalencia inicial $A_1 + A'_1 = A_2 + A_2$ que permite la multiplicación completa B_1B_2. El agrupamiento de las multiplicaciones co-unívocas constituye, finalmente, una simple limitación del presente agrupamiento.

2º El conjunto multiplicativo $A_1A_2 + A_1A'_2 + A'_2A_2 + A'_1A'_2$ corresponde a lo que se denomina la afirmación tautológica en lógica proposicional $(p \cdot q \vee p \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q})$: se halla pues en el punto de partida de las 16 composiciones binarias propias de las operaciones bi-proposicionales; el conjunto multiplicativo $B_1 \times B_2 \times B_3$ (ver su desarrollo en las "operaciones directas") corresponde a la afirmación tautológica ternaria y se encuentra así en el punto de partida de las 256 combinaciones ternarias propias de las operaciones tri-proposicionales, etc. Es lo que veremos en el § 28.

3º Finalmente, el agrupamiento IV se une a la teoría de conjunto. En efecto, las estructuras B_1B_2; $B_1B_2B_3$; etc., constituyen por sus combinaciones 2^{2^n}, los 16, 256, etc. subconjuntos que constituyen los "conjuntos de las partes" de un sistema de dos, tres, etc. conjuntos (lo que va paralelo a la relación indicada anteriormente entre esta estructura y la de la lógica proposicional). Por otra parte, las estructuras tales como B_1B_2, etc., constituyen reticulados propiamente dichos: el supremo de A_1 y de A_2 es $(A_1 + A_2)$ y el ínfimo es (A_1A_2). Cada cupla de las partes del conjunto se halla pues limitada inferior y superiormente.

En síntesis, este agrupamiento IV marca al mismo tiempo el fin de la lógica de clases y el punto de partida de la lógica proposicional y de la de los conjuntos –esta última consiste en una lógica de clases desprovista de su contenido cualitativo y que admite, por este mismo hecho, una serie de operaciones nuevas.

CAPITULO III

LA LOGICA DE RELACIONES

Como hemos visto en el capítulo primero (§ 4), las relaciones constituyen la comprensión de los conceptos, cuya extensión está representada por las clases. Debemos esperar pues un isoformismo sistemático entre los agrupamientos de clases y de relaciones. Pero, cosa curiosa, este paralelismo que simplifica singularmente tanto el estudio de unas como de otras, escapa por lo general a la atención de los lógicos, y choca incluso a veces con las objeciones de algunos de ellos que quisieran relacionar todo con la extensión pura. Como ejemplo de la primera categoría, podemos citar a Ch. Serrus, quien, si bien ha tomado de nosotros el método de los agrupamientos, ha omitido completamente el de las relaciones simétricas, tan esencial no obstante para la comprensión del mecanismo conjunto de las clases y las relaciones. Por otra parte, M. Boll, quien ha tratado de identificar lo más posible la lógica y la teoría de los conjuntos, expone las relaciones en el lenguaje casi exclusivo de las matrices, tomado de la concepción que se han hecho los matemáticos, de las relaciones en extensión. Importa pues, en primer lugar, justificar el punto de vista que adoptaremos aquí.

§ 16. LA ESTRUCTURA DE LAS RELACIONES.

Luego de haber alabado a Morgan por haber liberado las proposiciones de la forma exclusivamente predicativa que les había atribuido Aristóteles –lo que equivale a decir que el gran lógico inglés tuvo razón en disociar la lógica de relaciones de la de clases– M. Boll pregoniza para la exposición de esta otra lógica, el empleo de matrices

"que pone nuevamente el acento sobre el punto de vista extensionalista de la lógica científica"[1]. Ahora bien, este recurso de las matrices equivale ni más ni menos, a expresar una vez más las relaciones dentro de la perspectiva de la lógica de clases. Esta nueva reducción de la relación a la clase es, por supuesto, perfectamente legítima en la teoría de los conjuntos, ya que un conjunto es una colección en extensión. Pero, si la lógica quiere ser una teoría de las operaciones del pensamiento, no representa ninguna ganancia ni para sí, ni para las matemáticas, que copie tan servilmente a estas últimas. Ahora bien, desde el punto de vista de la lógica elemental, resulta de dicha concepción extensionalista de la lógica, que la teoría de las relaciones, en lugar de constituir uno de los pilares de la lógica entera, al igual que la lógica de las clases, se transforma en un pequeño compartimiento de esta última.

La posición de Russell es más satisfactoria, ya que considera una función proposicional, saturada por un solo argumento ax, como denotando una clase, y una función saturada por dos o más argumentos axy como denotando una relación. Sólo que, como hemos visto ya (§ 4), la función ax supone ya una relación propiamente dicha: la relación de equivalencia (positiva o negativa), en nombre de la cual calificamos x con una propiedad a que pertenece (o no) a otros argumentos. Es por ello, que consideramos que toda relación expresa la comprensión de un concepto cuya extensión es una clase, así como toda clase expresa la extensión de un concepto cuya comprensión se reduce a una o varias relaciones.

Desde este punto de vista, la única diferencia entre lo que hemos llamado clases débilmente estructuradas y las clases semi-estructuradas (definiciones 11 y 12) se refiere a la naturaleza de las relaciones que unen los individuos de la clase, y por lo tanto, a las relaciones entre la extensión y la comprensión (ver § 5). De este modo, no haremos aquí una teoría de las clases semi-estructuradas en tanto que clases, sino que nos limitaremos, a este respecto, a agrupar las relaciones asimétricas que las caracterizan.

Pero, examinemos antes la concepción extensionalista de la lógica, tal como se desprende del método de las matrices. Una matriz de dos dimensiones representa el *producto cartesiano* de dos conjuntos E y F, es decir el conjunto de cuplas ordenadas (x, y) donde $x \in E$ e $y \in F$.

1 BOLL, 1948, pág. 256.

Nada impide por otra parte, que se de $E = F$, pero en todos los casos dos cuplas (x, y) e (x', y') no serán consideradas como idénticas más que si $x = x'$ e $y = y'$.

En estas condiciones, toda parte de una matriz representa una relación del dominio E y del codominio F. Sea por ejemplo, $E = F = [0, 1, 2, 3]$. El conjunto de cuplas [(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)], sea el conjunto de casos rayados (fig. 10), que represente la relación $\leqslant$, en el conjunto E. En particular, la diagonal será el conjunto [(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)], que representará la relación de igualdad entre los elementos de E.

E \ F	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

Fig. 10.

Ahora bien, dos cosas llaman la atención en esta representación matricial de las relaciones: la primera es que la operación de la construcción misma de las matrices consiste en una multiplicación de clases; la segunda es la que la relación como tal no da lugar a ningún cálculo, sino que está reemplazada por la disposición de los elementos x e y entre los cuales se dan las relaciones.

En primer lugar, la operación de construcción de la matriz no es otra que la multiplicación bi-unívoca de clases descrita a propósito del agrupamiento IV. En el caso de los conjuntos, esta operación consiste en una asociación entre un elemento cualquiera del conjunto E y un elemento cualquiera del conjunto F. Tal operación sale, en prin-

cipio, de la lógica de clases, ya que esta no considera términos "cualesquiera" sino individuos calificados. Se puede, no obstante, extender la operación a las clases mismas y considerar los términos x e y de las relaciones como clases singulares cualificadas. Esto reducirá entonces la construcción de la matriz a un agrupamiento IV, con auto-multiplicación. Ahora bien, este agrupamiento IV comprende a los tres primeros. Por otra parte, toda relación constituye la comprensión de una clase. De lo que resulta que los agrupamientos de relaciones cualitativas elementales (intensivas) se reducirían, en el cálculo matricial, a los mismos agrupamientos de clases.

Pero entonces, ¿qué sería la relación en sí misma? Esta es traducida en forma de cocientes, pero dichos cocientes no son otra cosa que cierto producto lógico entre los mismos términos, es decir nuevamente una composición multiplicativa de clases. Al estar las clases ordenadas de cierta manera, expresan naturalmente, por su misma disposición, las relaciones consideradas. Pero el cálculo no lleva sino sobre las clases, es decir sobre la extensión, y no sobre las relaciones, en tanto que comprensión.

Así, si r es una relación, se tendrá:

$$\text{Dom } (r) = \text{d}f \text{ dominio de } r = \text{d}f\, [x \mid (\exists\, y)\, rxy]$$
$$\text{Codom } (r) = \text{d}f \text{ codominio de } r = \text{d}f\, [y \mid (\exists\, x)\, rxy]$$
$$\text{C } (r) = \text{d}f \text{ campo de } r = \text{d}f \text{ Dom } (r) \cup \text{Codom } (r)$$

El dominio es el *conjunto* de los x para los cuales existe un y tal que rxy, el codominio es el *conjunto* de los y para los cuales existe un x tal que rxy y en el campo es la unión de esos dos *conjuntos*.

Pero subsisten dos tipos de dificultades. La primera es que, desde el punto de vista de la lógica pura, por oposición a la teoría de los conjuntos, es indispensable hacer un análisis de la comprensión como tal, aunque más no fuese para establecer el isoformismo de estas formas con las de la extensión. Cuando se describe una relación por la disposición de sus términos en una tabla multiplicativa, no se da, en efecto, más que el resultado de la puesta en relación, y no la relación como tal. Decir que la relación de equivalencia es aquella que caracteriza los términos que ocupan la diagonal de una matriz, mientras que los términos relacionados por una relación de orden son exteriores a la diagonal, traduce de manera unívoca seguramente, el producto de las

operaciones de puesta en relación, pero se anuncia una verdad mucho menos inmediata que cuando se atribuye a la relación de equivalencia el significado de una diferencia nula y a las relaciones asimétricas transitivas que constituyen el orden, el significado de una diferencia creciente. Sin duda, el matemático no experimenta ninguna necesidad de expresar estas relaciones de comprensión por medio de operaciones especiales, ya que se interesa esencialmente en las extensiones que determinan esas relaciones. Pero, si el lógico imita en este punto al matemático, invierte el orden natural de la construcción, y obliga al espíritu a reconstruir, por una inferencia propiamente dicha, la relación en comprensión a partir de la disposición en extensión, en lugar de reconocer en esa disposición un resultado del establecimiento de relaciones y tratar de alcanzar estas en el plano de la comprensión.

La segunda dificultad es más grave y refuerza la primera: existen operaciones que conducen a relaciones en tanto tales, por oposición a sus términos considerados en extensión, y estas difieren de las operaciones de clases, pese a presentar agrupamientos isomorfos. En efecto, si una relación asimétrica transitiva expresa una diferencia entre los términos que relaciona, por ejemplo $x < y$ e $y < z$, una cosa será adicionar dos diferencias $(x \xrightarrow{a} y) + (y \xrightarrow{a'} z) = (x \xrightarrow{b} z)$ y otra cosa será someter los términos x, y, z, a operaciones de clase (por ejemplo $[x, y, z]$), incluso si se construyen con su empleo clases ordenadas o conjuntos determinados en función de una matriz y de su diagonal. Del mismo modo, si una relación de equivalencia expresa una diferencia nula dará lugar a operaciones tautológicas como $(x \overset{o}{\rightleftarrows} y) + (y \overset{o}{\rightleftarrows} z) = (x \overset{o}{\rightleftarrows} z)$, distintas de las operaciones correspondientes que se pueden hacer sobre los términos o sus clases:

$$[x, y, z] \times [x, y, z]; \text{ etc.}$$

Ahora bien, es tanto más interesante tratar de deducir así la estructura de las relaciones en sí mismas, puesto que los agrupamientos de estas operaciones en comprensión son isomorfos a los agrupamientos de las operaciones de clases que llevan sobre los términos ligados por las relaciones consideradas, sin que se trate de las mismas operaciones. Se ve así inmediatamente que, si a la adición de dos diferencias $(\xrightarrow{a} + \xrightarrow{a'} = \xrightarrow{b})$ corresponde la adición de dos clases distintas $(A + A' = A)$, por lo tanto a la idéntica especial de los agru-

pamientos aditivos o a la idéntica general $(0 + 0 = 0)$. Y sin embargo (y esto justifica por sí solo un estudio separado de las operaciones en comprensión), la operación inversa de la adición de una diferencia $+ (x \xrightarrow{a} y)$, que es la sustracción de esa misma diferencia, es decir $- (x \xrightarrow{a} y)$, equivale a la adición de la relación conversa:

$$(x \xrightarrow{a} y) + (y \xrightarrow{a} x) = (x \xrightarrow{o} x)$$

A la complementariedad de las operaciones de clases $(+ A$ y $- A)$ corresponde pues la "reciprocidad" en los agrupamientos de relaciones, ¡sin que esto excluya un isoformismo completo entre ambos tipos de agrupamientos!

Se plantea así un problema de estructura de conjunto a propósito de las relaciones como a propósito de las clases, y este problema merece un examen atento, aún cuando el mismo no interese en nada a la teoría de los conjuntos. No es pues copiando los procedimientos matemáticos como se podrá hacer la mejor lógica: sino considerando en primer lugar para sí misma el problema específico de las operaciones más elementales del espíritu. Desde este punto de vista, las relaciones merecen un estudio aparte, que las considere en y para sí mismas.

Naturalmente, por otra parte, que esta búsqueda de las operaciones propias de las relaciones en comprensión no quita nada del interés de las matrices y de los análisis extensionalistas de la relación. Por el contrario, una vez desentrañado el mecanismo propio de las relaciones, puede captarse mejor por una puesta en correspondencia de la comprensión y la extensión, la correspondencia entre las clases y las relaciones.

Resta finalmente, otro método clásico de exposición de las relaciones fundado sobre la comprensión: es la representación sagital, que consiste en representar los términos de las relaciones por símbolos de individuos o de clases, y las relaciones mismas por flechas que expresan el sentido de la relación: $x \rightarrow y$ significará "x padre de y" (ó $x < y$; etc.); $x \rightleftarrows y$, representará $x = y$; etc. En cuanto al método de enumeración de las cuplas, puede dar lugar tanto a una disposición en matriz como a una disposición sagital.

Emplearemos aquí la representación sagital. Esta no presenta en

realidad mayor interés aparte del hecho de ser un simbolismo cómodo. Pero al referirse el símbolo a la comprensión, es decir a la relación en tanto que propiedad relativa, y no solamente a los términos relacionados, su uso permite, al agrupar las flechas como tales, construir agrupamientos específicamente relacionales, sin que se esté tentado ya de confundir las operaciones que llevan sobre las relaciones con las operaciones que llevan sobre los términos en tanto que elementos de clases.

§ 17. CLASIFICACION Y AGRUPAMIENTOS DE RELACIONES.

Por el hecho de expresar las relaciones la comprensión de los conceptos y las clases su extensión, la lógica de relaciones encuentra un problema de formalización, de disociación entre la "forma" y el "contenido", mucho más delicado que la lógica de clases (ver § 2). Existen además, diferentes niveles de formalización en el seno de las clases mismas: un "conjunto abstracto" cuyos elementos están, por definición, desprovistos de propiedades salvo la identidad $x = x$, su negación $x \neq y$ y la pertenencia al conjunto $x \in E$, constituye por ejemplo una clase formalizada de manera muy distinta a la clase de los hombres, en la cual cada individuo constituye una sub-clase singular distinta de las otras por sus cualidades propias. Pero es fácil disociar una clase de su contenido extralógico, formalizando los encajes de las extensiones independientemente de la comprensión. Con la relación en cambio, que expresa precisamente la comprensión como tal, el problema estriba en saber cómo extraer la "forma" de las relaciones en comprensión, de su "contenido", es decir de la variedad ilimitada de relaciones dadas.

Se podría estar tentado de resolver el problema considerando simplemente como formales los caracteres más generales de las relaciones (las propiedades de simetría o asimetría, de transitividad, etc.). Pero sería un criterio muy insuficiente, ya que las transiciones entre lo general y lo especial son insensibles, lo que borraría toda frontera estable entre la forma y el contenido: al no saber donde detener el análisis de los caracteres generales, se llegaría a una descripción pura y simple de las diversas relaciones posibles, las que constituyen un número indefinido. La distinción entre relaciones continuas o discontinuas ¿es, por ejemplo, de orden general o especial?

Un segundo criterio es mucho más sólido: es "formal" toda propiedad de las relaciones que da lugar a una composición posible; no concierne, por el contrario, al contenido más que lo que no puede componerse. Por ejemplo, los caracteres asimétrico y transitivo de una relación dan lugar a composiciones de orden que constituyen, sin duda alguna, "formas" lógicas al igual que los encajes de clases (tanto más cuanto que estas son parcialmente ordenadas). Por el contrario, las relaciones intransitivas, tales como "x comió a y", "x mató a y", etc., representan un residuo no analizable desde el punto de vista formal, salvo que se las relacione de algún modo a las relaciones transitivas.

Pero este criterio de composición posible no resuelve todo el problema de la lógica de relaciones, puesto que si bien toda composición pura es formal, no toda composición formal es exclusivamente lógica: si definimos la lógica de relaciones sólo por la capacidad de composición, englobaría todas las matemáticas. Conviene pues, a propósito de las relaciones, como a propósito de las clases, limitar la lógica no específicamente matemática al dominio de la cantidad intensiva. Las relaciones $(x < y) = a$ y $(y < b) = a'$ son, desde este punto de vista, simplemente lógicas, pues si $(x < z) = b$, la composición $a + a' = b$ permite solamente juzgar que la diferencia es más grande entre x y z $(= b)$ que entre x e y ó entre y e z (o sea $a < b$ y $a' < b$), pero no puede deducirse nada de las relaciones entre a y a'.

Nos limitaremos pues, en este capítulo, al estudio de las *relaciones intensivas*, es decir de aquellas que, por definición, no conocen otra cuantificación más que la relación de desigualdad entre la parte y el todo, ni otra equivalencia más que la co-posesión de la misma cualidad. Ahora bien, el primer punto a tener en cuenta es que estas expresiones, cuya significación aparece en primera instancia como interesando sólo a la extensión, conciernen igualmente a la comprensión misma. En efecto, bajo su forma más general, una relación no podría expresar sino una semejanza o una diferencia. Y dado que toda diferencia es ordinariamente susceptible de más o de menos, esta graduación puede admitir ella misma una cuantificación, sea intensiva, extensiva o numérica (como acabamos de verlo). Lo mismo ocurre con la semejanza, comprendida también la equivalencia o diferencia nula: existen equivalencias numéricas, extensivas e intensivas, estas últimas expresan la simple posesión en común de una misma cualidad. En este

caso, la relación $x \overset{a}{\longleftrightarrow} y$ que atribuye a x e y el mismo color, la misma virtud, etc., es a la vez una equivalencia intensiva desde el punto de vista de la comprensión y la expresión de una co-pertenencia o una co-inclusión en relación a una misma clase (no ordenada) desde el punto de vista de la extensión.

Dicho esto, la primer división que introduciremos en las relaciones es la de relaciones *asimétricas:*

$$(x)\ (y)\ (rxy \supset \overline{ryx})$$

y las relaciones *simétricas:*

$$(x)\ (y)\ rxy \supset ryx),$$

puesto que corresponde precisamente a cierta repartición en relaciones de diferencias y relaciones de semejanzas. Toda relación simétrica expresa una equivalencia [1] positiva o negativa, esta última constituye entonces una diferencia no ordenada: por ejemplo x "es de la misma especie" o "no es de la misma especie" que y. Las relaciones asimétricas son siempre, por el contrario, relaciones de diferencia ordenada. Conviene insistir en esto pues no resulta siempre evidente para todos; por otra parte, las relaciones "difieren" y, en algunos casos, como la relación de "asimetría" ¡es ella misma una relación simétrica!

Existen en primer lugar, relaciones asimétricas que implican el más o el menos: ± grande, virtuoso, etc. Resulta claro que dichas relaciones expresan una diferencia ordenada entre los términos que unen. Pero hay relaciones asimétricas que suponen sólo una cupla de valores: derecha e izquierda, exterior e interior, etc. (con un *tertium:* ni derecha ni izquierda, sobre la frontera, etc.). En tales casos la relación es asimétrica, ya que no se podrían permutar los términos (x está a la izquierda de y es contradictorio con y está a la izquierda de x), pero expresan en su contenido una especie de simetría que corresponde a menudo, en particular al sentido geométrico del término. No obstante está claro que la relación traduce por su composición asimétrica, como tal, una diferencia orientada cuyo carácter es sim-

1 En el sentido psicológico del término y no en el sentido matemático, en el cual una relación de equivalencia es, no solamente simétrica, sino también transitiva y reflexiva.

plemente el de proceder por cuplas componibles entre sí según un orden.

Pero, ¿por qué la relación "diferente" es ella misma simétrica? En efecto, "x es diferente de y" equivale a "y es diferente de x". Se puede convenir igualmente que, en el orden de sucesión x, y, "x es asimétrico respecto de y": esta relación equivale a "y es asimétrico respecto de x". Las relaciones "diferente" y, en un sentido definido, "asimétrico" son por lo tanto relaciones simétricas que expresan además ciertas equivalencias: "x es diferente de y" significa que existe "la misma diferencia" entre x e y que entre y y x; "x es asimétrico en relación a y", ¡significa que existe una "misma asimetría" entre ambos! Ahora bien, la cosa es simple de explicar y no contradice la regla general: al expresar la diferencia o la asimetría bajo una forma indeterminada, es decir no orientada, permanece precisamente como una diferencia no ordenada, por lo tanto como una simple equivalencia negativa. Más precisamente, en un orden de sucesión cualquiera $x < y < z < \ldots$, conviene distinguir la diferencia asimétrica que separa x de y, y de z, etc., y el intervalo, es decir la relación "entre" que es simétrica, ya que este intervalo es el mismo "entre" x e y, que "entre" y y x, constituyendo así una equivalencia dentro de la diferencia, es decir una diferencia no ordenada. Ahora bien, decir que existe la misma diferencia entre x e y que entre y y x, es precisamente referirse al intervalo que separa simétricamente ambos términos y no a la diferencia ordenada u orientada que los supone. Del mismo modo, si se conviene en decir que la asimetría es la misma "entre" x e y que "entre" y y x, se quita a esta asimetría su orientación y se la asimila a una diferencia indeterminada, es decir nuevamente a un intervalo.

Una división de igual importancia a la de las relaciones simétricas y asimétricas, es la de las relaciones transitivas e intransitivas. Una relación *transitiva* presenta la propiedad:

$$(x)\ (y)\ (z)\ (rxy \cdot ryz \supset rxz)$$

es decir que la relación que une x a y e y a z, une también x a z. Pero es preciso distinguir dos casos: aquel en que la transitividad significa un aumento o una disminución de la diferencia ordenada, es decir, un cambio de intensidad de la misma relación cualitativa; y aquel en que la transitividad es tautológica, porque expresa la co-pertenencia a una misma clase. En cuanto a las relaciones intransitivas,

no son todas imposibles de componer como podría parecer. Existe en efecto, lo que se llama las relaciones "alintransitivas" que dan lugar a una composición que implica diversas posibilidades simultáneas; el hermano de mi hermano no es necesariamente mi hermano, sino que puede ser mi hermano o yo mismo; el primo hermano de mi primo hermano puede ser mi primo hermano, mi hermano o yo mismo, etc. Sólo la intervención de las clases secundarias propias de los "agrupamientos", da cuenta (como hemos visto ya en el § 11) de este tipo de composición. En efecto, si se designa por A los hijos de un mismo padre, por B los nietos de un mismo abuelo, etc., tendremos las relaciones: $\overset{o}{\longleftrightarrow}$: la identidad de un individuo; $\overset{a}{\longleftrightarrow}$: hijo de un mismo padre; $\overset{b}{\longleftrightarrow}$: nieto de un mismo abuelo; pero también $\overset{o'}{\longleftrightarrow}$: hermano, es decir hijo de mi padre($\overset{a}{\longleftrightarrow}$),pero no yo mismo ($\overset{\bar{o}}{\longleftrightarrow}$); $\overset{a'}{\longleftrightarrow}$: primo hermano, es decir nieto del mismo abuelo ($\overset{b}{\longleftrightarrow}$), pero no hijo del mismo padre ($\overset{\bar{a}}{\longleftrightarrow}$); etc. En ese caso, se tendrá la composición $\overset{a'}{\longleftrightarrow} + \overset{a'}{\longleftrightarrow} = \overset{b}{\longleftrightarrow}$, ya que $A'_1 + A'_2 = B$ (proposición 23 bis); el primo hermano de mi primo hermano ($\overset{a'}{\longleftrightarrow} + \overset{a'}{\longleftrightarrow}$) no puede ser más que nieto del mismo abuelo que yo ($\overset{b}{\longleftrightarrow}$), dicho de otro modo, puede ser mi primo hermano ($\overset{a'}{\longleftrightarrow}$), mi hermano ($\overset{o'}{\longleftrightarrow}$) o yo mismo ($\overset{o}{\longleftrightarrow}$); en efecto, $\overset{b}{\longleftrightarrow}$ supone las posibilidades $\overset{o}{\longleftrightarrow}$; $\overset{o'}{\longleftrightarrow}$; $\overset{a}{\longleftrightarrow}$ y $\overset{a'}{\longleftrightarrow}$, ya que la clase ($B$) contiene las sub-clases: A', A, $[x']$ y $[x]$.

En el caso de las relaciones francamente intransitivas, al menos en apariencia, como "el lobo come a la oveja, la oveja come la hierba, pero el lobo no come la hierba", importa por lo tanto buscar en cada caso si la relación no es comparable a una aliotransitividad. Ante todo, conviene desconfiar del lenguaje corriente, que no es necesariamente lógico: así, en el ejemplo elegido, el lenguaje no permite continuar la serie diciendo "la hierba come las sales minerales del suelo", pese a que se trata evidentemente de la misma relación. Enseguida, conviene buscar la relación transitiva más próxima, en el sentido análogo al *genus proximum* pero en términos de relaciones. En el caso particular, es la relación "asimila las sustancias extraídas de" o "se nutre de", pero, tanto directa como indirectamente: el lobo se nutre de la oveja, y, a través de la oveja, de la hierba, y, a través de la hierba, de las sales minerales. Resulta fácil entonces construir un sistema de relaciones asimétricas transitivas tales como: las sales minerales son asimiladas por la hierba, etc. y situar en el mismo las relaciones iniciales "el lobo come a la oveja" a título de relaciones aliotransitivas.

Este proceso de transformación de las relaciones intransitivas en relaciones transitivas o aliotransitivas, no es otra cosa que el trabajo realizado por las ciencias al reemplazar los conceptos vulgares por leyes, introduciendo así entre las relaciones legales esa transitividad deductiva que constituye la causalidad. Así "el fuego quema la madera" es una relación intransitiva ligada a conceptos vulgares, respecto de la cual la química comenzó a engañarse (la flogística), mientras que el análisis de la oxidación lo sustituyó por un sistema de relaciones causales transitivas. La mayoría de las leyes y de las deducciones causales son de carácter métrico, pero existen (en biología) algunas de carácter simplemente intensivo que ilustran este género de formalización lógica. En síntesis, una relación intransitiva es, en general, o una relación aliotransitiva más o menos bien formulada, o una forma con contenido extralógico todavía mal elaborado, o un puro agregado verbal. Pero queda todavía una última eventualidad, que caracteriza precisamente las relaciones intransitivas auténticas: es la intransitividad a falta de composición reversible posible del contenido extralógico de las relaciones: por ejemplo "x mató a y" en que y ya no es apto para ninguna acción.

La lógica de relaciones distingue igualmente las relaciones *reflexivas:*

$$(x)\ (x \in \mathrm{Ch}(r) \supset rxx)$$

y las relaciones *irreflexivas*:

$$(x)\ \overline{rxx}$$

las primeras son aquellas que relacionan un término consigo mismo: yo soy un "hijo del mismo padre" que yo mismo ($\xleftrightarrow{a}$ es pues una relación reflexiva), pero yo no soy mi propio hermano ($\xleftrightarrow{o'}$ es pues una relación irreflexiva). Se habla también de relaciones conexas, cuando para dos términos distintos y cualesquiera de su campo se da la relación entre el primero y el segundo, o entre el segundo y el primero o en los dos casos a la vez. Así, una serie $x_1 < x_2 < x_3 < < \ldots$ está constituida por relaciones asimétricas, transitivas y conexas.

Nos parece útil introducir además una distinción entre relaciones

bivalentes, trivalentes y multivalentes [1]. Una relación será "bivalente" cuando no pueda ser más que afirmada o negada, sin grandes intermediarios: x_1 es hermano de x_2 o no lo es. Una relación será "trivalente" si admite la relación considerada, su recíproca o la ausencia o presencia de ambas. Por ejemplo, "x_1 está a la izquierda de x_2", "x_2 está a la derecha de x_1", pero x_3 puede no estar ni a la derecha ni a la izquierda de x_2 (si está arriba, etc.). Otro ejemplo: "x_1 es exterior a una frontera", "x_2 es interior a la frontera", pero x_3 puede estar "sobre la frontera", es decir, a la vez exterior o interior (si se trata de un conjunto de puntos) o ni lo uno ni lo otro (si es un punto). Algunas relaciones pueden definirse según se quiera como bivalentes o trivalentes. Finalmente, una relación será "multivalente" si conoce el más y el menos: "más pesado que", etc.

Estas nociones nos bastarán para construir los "agrupamientos" de relaciones. La diferencia esencial entre estos agrupamientos y los de clases es que, en lugar de referirse a la adición o sustracción de las clases, es decir a la presencia o ausencia de los *términos* considerados (individuos o colecciones), no admiten sino la adición o sustracción de las *diferencias* dadas entre esos términos. El interés de las clasificaciones precedentes de relaciones es, en efecto, el de mostrar que la estructura de las relaciones concierne sólo a la diferencia (o semejanza) entre los términos, por oposición a la reunión de los mismos (o de sus encajes) que se deriva de la lógica de clases. Una relación asimétrica expresa, en efecto, una diferencia ordenada no nula, mientras que una relación simétrica traduce una diferencia nula (equivalencia) o una diferencia no ordenada (equivalencia negativa). Las relaciones transitivas son aquellas que admiten la adición acumulativa de diferencias no nulas o la adición tautológica de equivalencias. Las relaciones reflexivas se refieren a esta misma tautología, mientras que las conexas se refieren a la adición de diferencias distintas. Finalmente, las relaciones bivalentes, trivalentes o multivalentes connotan los distintos modos de distribución de las diferencias mismas. Todo el mecanismo de los "agrupamientos" de relaciones, conducirá así a la composición de las diferencias intensivas, y esto sólo basta para justificar

1 No hay que confundir las relaciones bivalentes, trivalentes, etc., con las relaciones binarias, ternarias, etc. Así "estar a la izquierda de" es una relación binaria: relaciona dos términos. Pero, "estar situado entre" es una relación ternaria: relaciona tres términos. La multivalencia se basa en el análisis del contenido de las relaciones y no en su sola forma.

la legitimidad de una lógica de relaciones fundada sobre la comprensión, por oposición a la lógica de clases fundada sobre la extensión.

Pero, a esto se agrega una circunstancia capital, a la que ya hemos hecho alusión en el § 16. Por el hecho mismo de que la adición de clases consiste en añadir términos (individuales o colectivos) a otros, la operación inversa consistirá en privarse de ellos, y la operación idéntica general consistirá en no considerar ninguno (clase nula). Las operaciones multiplicativas de las clases conducirán, es cierto, sobre los encajes como tales y el hecho de privarse de los mismos conducirá, a título de operación idéntica, a la clase más general, pero el principio permanece, desde este punto de vista, el mismo. Por el contrario, la adición de relaciones consiste en añadir diferencias (y no los términos o encajes como tales), la operación inversa consistirá en quitar estas mismas diferencias y la idéntica general se reducirá entonces a la diferencia nula. Ahora bien, mientras que la clase nula es sinónimo de cero, ¡la diferencia nula no es otra que la equivalencia! Las operaciones inversa e idéntica (general) de clases se basan pues, en el caso de la adición, en un principio de negación simple, o sea de complementariedad en relación al conjunto total considerado: la negación de una clase A es, en efecto, su complementaria en relación al todo considerado: $B - A = A'$; $C - A = A' + B'$, etc. por lo tanto, de una manera general $\overline{A}$ en relación a la clase total U, sea $\overline{A} = U - A$, ya que $\overline{A} + B' + C' + \ldots = U - A$; de donde $A - A = 0$ y $A + \overline{A} = U$. Por el contrario, las operaciones inversa e idéntica (general) de relaciones se basan en un principio de reciprocidad, si se llama operación recíproca la complementaria en relación, no al todo U, sino a la equivalencia $A = A$.

Así, la inversa de una relación simétrica será su recíproca. Del mismo modo, la inversa de una diferencia ordenada será la misma diferencia recorrida en sentido opuesto. La inversa es pues la sustracción de una diferencia o lo que equivale lo mismo, la adición de la relación conversa, es decir de la diferencia recorrida en sentido opuesto.

En síntesis, la inversa de una operación aditiva de relaciones es la operación recíproca [1] y no la complementaria como en la adición de clases. De lo que se deduce que los agrupamientos de relaciones desempeñan un rol a la vez muy distinto y estrechamente correlativo de los de clases: al desarrollar las estructuras de reciprocidad, consti-

1 De ahí el papel de la diagonal en la representación por matrices.

tuyen una de las dos bases de la lógica proposicional, la cual como veremos, se funda tanto sobre esta misma reciprocidad como sobre la complementariedad simple.

Es pues mucho más interesante, por el hecho de darse este dualismo entre las estructuras de clases y de relaciones, constatar el isomorfismo de los dos tipos de agrupamientos. Esto en un sentido natural, ya que las relaciones expresan las relaciones de comprensión cuya extensión está representada por las clases. Pero, la profunda oposición que distingue la adición de diferencias de la de los términos mismos, así como la inversa fundada sobre la reciprocidad (conversa) de la inversa fundada sobre la complementariedad simple (negación) hubiera podido hacer pensar en la heterogeneidad de los dos tipos de agrupamientos. En realidad, se reencuentran dos agrupamientos aditivos y dos multiplicativos. Estos últimos son co-unívoeos o bi-unívocos como los agrupamientos correspondientes de clases. Los primeros llevan sobre la seriación simple de las relaciones asimétricas transitivas en correspondencia con el agrupamiento de la adición simple de clases (I) o sobre las simetrías que corresponden a las tautologías y a las vicariancias del agrupamiento II de clases. Semejante isomorfismo está pleno de enseñanzas, tanto en lo que concierne a las relaciones entre la extensión y la comprensión, como también en lo relativo al carácter natural, así como elemental de la estructura de "agrupamiento".

§ 18. EL AGRUPAMIENTO V: LA ADICION DE RELACIONES ASIMETRICAS TRANSITIVAS (SERIACION INTENSIVA).

Sea una colección de términos *A*, *B*, *C*, etc. [1], diferentes entre sí pero comparables desde un punto de vista común (por ejemplo, objetos más o menos altos, pesados, etc., tonalidades más o menos sombreadas, valores tales como una serie de vinos clasificados según su aroma, o acciones según su utilidad, su virtud, etc.). Estos términos pueden ser indistintamente elementos individuales o clases (singulares o no). Ordenemos ahora estos términos según sus diferencias crecientes. Obte-

1 Escribiremos aquí mayúsculas latinas para indicar que los términos considerados no son necesariamente individuos.

nemos así una serie de relaciones asimétricas, transitivas y conexas, que expresan la serie de diferencias consideradas:

$$O \xrightarrow{a} A;\ A \xrightarrow{a'} B;\ B \xrightarrow{b'} C;\ C \xrightarrow{c'} D, \text{ etc.}$$

La flechas $\rightarrow$ traducen la diferencia asimétrica misma, por oposición a los términos ordenados O, A, B, etc. y la dirección de la flecha marca una desigualdad a favor del término señalado: "$A \xrightarrow{a'} B$" significa así "B es más (grande, etc.) que A". Las conversas serán:

$$A \xleftarrow{a} O;\ B \xleftarrow{a'} A;\ C \xleftarrow{b'} B, \text{ etc.}$$

con la significación: "O es menos (grande, etc.) que A", etc.

Definición 24. – *Escribiremos* $(O \xrightarrow{a} A) + (A \xrightarrow{a'} B) = (O \xrightarrow{b} B)$, *atribuyendo a esta operación el siguiente significado: "Si se añade la diferencia (a') existente entre A y B, a la diferencia (a) existente entre O y A, se obtiene la diferencia* $(b = a + a')$ *existente entre O y B". Esta operación se llamará adición serial.*

Se constata que esta adición serial $(a + a' = b)$ implica $a < b$ y $a' < b$, pero ignora toda comparación entre las partes a y a' (cantidad intensiva).

Una vez establecidas estas relaciones, es fácil entonces construir el siguiente agrupamiento:

1. La *operación directa* será la adición de diefrencias, sea $+ \xrightarrow{x}$:

(40) $(O \xrightarrow{a} A) + (A \xrightarrow{a'} B) = (O \xrightarrow{b} B)$ y $(A \xrightarrow{a'} B) + (B \xrightarrow{b'} C) = (A \xrightarrow{a'b'} C)$
$(O \xrightarrow{b} B) + (B \xrightarrow{b'} C) = (O \xrightarrow{c} C)$ $\quad (A \xrightarrow{a'b'} C) + (C \xrightarrow{c'} D) = (A \xrightarrow{a'b'c'} D)$.
$(O \xrightarrow{c} C) + (C \xrightarrow{c'} D) = (O \xrightarrow{d} D)$ $\quad (A \xrightarrow{a' \ldots c'} D) + (D \xrightarrow{d'} E) = (A \xrightarrow{a' \ldots d'} E)$
etc. $\quad$ etc.

2. La *operación inversa* será la sustracción de una diferencia $- \xrightarrow{d}$:

(41) $$(O \xrightarrow{b} B) - (A \xrightarrow{a'} B) = (O \xrightarrow{a} A);\ \text{etc.}$$

Conferiremos un sentido a la expresión siguiente:

(41 *bis*) $$-(O \xrightarrow{a} A) - (A \xrightarrow{a'} B) = -(O \xrightarrow{b} B)$$

que representa la composición de dos sustracciones de diferencias, es decir la inversión completa de las composiciones precedentes de senti-

do $+$ (proposición 40); esta composición simboliza por lo tanto una sustracción posible a partir de diferencias de orden superior.

Es legítimo, por otra parte, sustraer una diferencia de sí misma, y por consiguiente anularla: $(A \xrightarrow{a'} B) - (A \xrightarrow{a'} B)$. Pero esta operación supone dos significados posibles, bien distintos uno de otros, entre los que es preciso elegir: 1º la anulación de la diferencia entre A y B podría significar que se modifica A o B de modo de igualarlos; el producto de la operación sería entonces $A \overset{o}{\rightleftarrows} B$, es decir $A = B$; pero 2º la anulación de la diferencia puede también concebirse como una puesta en relación según el sentido del recorrido $A \xrightarrow{a'} B$ seguido de una puesta en relación según el sentido del recorrido opuesto $B \xrightarrow{-a'} A$, es decir $B \xleftarrow{a'} A$, el producto de estas dos relaciones consistiría entonces en volver a unir A con A bajo la forma $A = A$. Ahora bien, la primera de estas dos operaciones no es una operación de relaciones, sino de clases: consiste, en efecto, en modificar los términos mismos A o B, por adición de elementos nuevos o sustracción de elementos dados. Es pues sólo en el sentido (2) como conviene concebir la sustracción de una diferencia en relación a sí misma. Se tiene entonces:

(42) $(A \xrightarrow{a'} B) - (A \xrightarrow{a'} B) = (A \xrightarrow{a'} B) + (B \xrightarrow{-a'} A) = (A \xrightarrow{a'} B) + (B \xleftarrow{a'} A)$

Se llega así a este resultado esencial, que no se debe a una convención, sino que expresa por el contrario, el mecanismo propio de las operaciones de relaciones, que la sustracción de una relación asimétrica positiva (= de una diferencia ordenada) equivale a la adición de su conversa. Dicho de otro modo, adicionar una relación consiste en pasar de A a B, por lo tanto, en establecer una diferencia, mientras que sustraerla equivale a volver de B a A, es decir a recorrer el mismo camino en sentido opuesto (reciprocidad). Se tiene pues, si *se conviene en escribir desde el principio el fin de una serie de operaciones, los términos a relacionar entre sí, por medio de la relación final* (por el producto de la composición transitiva).

(42 *bis*) $(A \xrightarrow{a'} B) - (A \xrightarrow{a'} B) = (A \xrightarrow{a'} B) + (B \xleftarrow{a'} A) = A \overset{o}{\underset{o}{\leftrightarrows}} A,$

sea $(A = A)$

Se tiene igualmente:

(42 *ter*) $(O \overset{b}{\rightarrow} B) - (A \underset{a'}{\ } B) = (O \underset{b}{\ } B) + (B \overset{a'}{\leftarrow} A) = (O \overset{a}{\rightarrow} A)$; etc.

3. La ***operación idéntica general*** es pues la diferencia nula $(A \overset{o}{\rightarrow} A)$ ó $A = A$. La diferencia nula no puede significar, en efecto, en este agrupamiento, más que la identidad, ya que los términos seriados son, por definición, todos diferentes. Se tiene pues:

(43) $(A \overset{a'}{\rightarrow} B) + (B \overset{a'}{\leftarrow} A) = (A \overset{o}{\rightarrow} A)$ **y** $(A \overset{o}{\rightarrow} A) + (A \overset{a'}{\rightarrow} B) = (A \overset{a'}{\rightarrow} B)$

La idéntica general representa pues como siempre: *a*) el producto de la operación directa por su inversa; y *b*) la operación que no modifica aquellas con que es compuesta.

4. Las ***idénticas especiales*** son la tautología y la absorción:

(44) $(A \overset{a'}{\rightarrow} B) + (A \overset{a'}{\rightarrow} B) = (A \overset{a'}{\rightarrow} B)$ **y** $(A \overset{a'}{\rightarrow} B) + (A \xrightarrow{a'b'} C) = (A \xrightarrow{a'b'} C)$

5. La ***asociatividad*** sigue las mismas leyes que en los agrupamientos de clases.

Este agrupamiento, en el cual se constata el isomorfismo[1] con el de la adición simple de clases (agrupamiento I), suscita una serie de problemas interesantes en lo referente a la comparación entre las estructuras de clases y las de relaciones.

La seriación de las inclusiones. — Un primer punto a destacar es que la inclusión de una clase en otra constituye una relación asimétrica transitiva. Si se considera una serie conexa de inclusiones, tales como dos cualesquiera de las clases que hemos visto que presenten la relación de inclusión, se tendrá pues una seriación que obedece a las leyes del agrupamiento V. Tal es la serie de clases primarias $A \subset$

1 Este isomorfismo supone que se tiene aquí el derecho de escribir

$$(O \overset{a}{\rightarrow} A) + (A \overset{a'}{\rightarrow} B) = (A \overset{a'}{\rightarrow} B) + (O \overset{a}{\rightarrow} A),$$

como se escribía $A + A' = A' + A$ en el agrupamiento I. Este derecho de *escritura* puede ser acordado, aunque no traduzca fielmente la significación del agrupamiento V de relaciones, *cf.* pág. 178 y siguientes. Se deduce de ello que el "isomorfismo" psicológico se reduce más comúnmente a una simple correspondencia.

$\subset B \subset C \ldots$ que intervienen en el agrupamiento I (por el contrario, la intervención de las clases secundarias sería opuesta a la condición de conexidad, ya que A no está incluida en A' ni a la inversa, y ya que A' no está incluida en B', etc.).

Se tendrá pues $(O \xrightarrow{a} A) + (A \xrightarrow{a'} B) = (O \xrightarrow{b} B)$; etc., en el caso de las clases primarias del agrupamiento I. Pero, ¿cuál es ahora el significado de las relaciones $\xrightarrow{a}$; $\xrightarrow{a'}$; $\xrightarrow{b}$; etc., que expresan, en este agrupamiento, la diferencia ordenada entre tales clases? No se tratará de cualidades que las distinguen y que definen su comprensión, ya que estas cualidades pueden ser cualesquiera, por lo tanto seriables o no, y ya que son múltiples, puesto que no dan necesariamente lugar, a causa de sus interferencias, a una seriación simple, aún cuando cada una sea seriable considerada aparte. La relación $\xrightarrow{a'}$, que simboliza la diferencia entre una clase A y una clase B, no presentará en particular ninguna relación con la clase secundaria A' (sea $A' = B - A$), ya que ésta no interviene en la serie. La diferencia en juego en la serie $\xrightarrow{a}$; $\xrightarrow{a'}$; $\xrightarrow{b'}$; etc., consistirá pues exclusivamente en una diferencia de extensión, es decir en una relación de parte (extensión inferior) a todo (extensión superior) : $(O \xrightarrow{a} A)$ significará también que A es de extensión superior de O; $(A \xrightarrow{a'} B)$ significará que B es de extensión superior a A (superior de un valor $\xrightarrow{a'}$) por lo tanto superior a O (de $a + a' = b$), etc.

Se ve entonces la paradoja: la "extensión" que caracteriza las clases por oposición a las relaciones, se traduce pues ella misma por una relación de "diferencia de extensión", por lo tanto, ¡por una relación en comprensión que puede dar lugar a una seriación análoga a la de las diferencias cualesquiera! Pero esta paradoja no equivale a una contradicción: en efecto, la "extensión" es una noción definible, que supone en consecuencia, como toda noción, una comprensión. Esta comprensión tiene el significado de "contener más o menos individuos" (sin que se sepa cuántos) y se traduce en consecuencia, por relaciones de diferencias más o menos grandes. Esto no significa que la extensión de una clase sea una de las propiedades de su comprensión, sino que la comparación de las extensiones propias de las clases constituye así una relación como cualquier otra, definida en comprensión, y cuyos términos son las diversas extensiones mismas, es decir, las clases como tales. Esto no es más contradictorio que hacer de la palabra "adjetivo" un sustantivo análogo a todos los otros.

Se puede además conferir a la serie de clases primarias

$$O \xrightarrow{a} A \xrightarrow{a'} B \xrightarrow{b'} C \ldots$$

el significado de un simple orden de sucesión: "A después de O; B después de A; etc.". En este caso, se puede construir una serie semejante con las clases secundarias $A' \rightarrow B' \rightarrow C' \rightarrow \ldots$ pero no con las dos a la vez, ya que si A viene antes de B y A' antes de B', las clases A y A' no están ordenadas una en relación a la otra (salvo arbitrariamente), ni B y B', etc. Por otra parte, la serie $A' \rightarrow B' \rightarrow C' \ldots$, no podría presentar naturalmente el significado de diferencias de extensión, ya que se trata de clases disyuntas y no incluidas.

No-conmutatividad de la adición serial. — Si bien una serie de inclusiones conexas de clases constituye una seriación de relaciones, interviene no obstante una primera diferencia entre la adición de clases y las relaciones asimétricas (es decir, de diferencias; ver definición 24), que la primera es conmutativa, mientras que la segunda no lo es. Se tiene, en efecto, $A + A' = A' + A$ (los Vertebrados y los Invertebrados = los Invertebrados y los Vertebrados). Por el contrario, las diferencias $\xrightarrow{a}$ y $\xrightarrow{a'}$ suponen un orden: no se podría, por ejemplo, hablar de la diferencia entre dos términos A y B ($\xrightarrow{a'}$) antes de saber que A está comprendido entre O y B ($O \xrightarrow{a} A$). En realidad, la adición $\xrightarrow{o} + + \xrightarrow{a'}$ no es conmutativa, aún cuando, de hecho, sea indiferente poner adelante $\xrightarrow{a'}$ ó $\xrightarrow{a}$. Esta no conmutatividad de derecho se traduce por una diferencia esencial entre el agrupamiento I; no hablamos solamente de las clases primarias, sino de todo el agrupamiento de la adición de clases ($A + A' = B$; $B + B' = C$; etc.) y el agrupamiento V ($\xrightarrow{a} + + \xrightarrow{a'} = \xrightarrow{b}$; etc.): es la ausencia de vicariancia de este segundo agrupamiento.

Ausencia de vicariancia. — En efecto, en el agrupamiento I, la clase secundaria A' contiene por derecho (si no es vacía) una o varias clases primarias A_2, A_3, etc. Es pues posible establecer que: $A_2 + + A'_2 = A_1 + A'_1$ (agrupamiento II: "la especie A_1 y las demás especies del género B = la especie A_2 y las demás especies del género B distintas de A_2"). Por el contrario, las relaciones secundarias $\xrightarrow{a'}$, existentes entre A y B, $\xrightarrow{b'}$ entre B y C', etc., no contienen relaciones primarias de tipo inferior a ellas ($\xrightarrow{a}$ para $\xrightarrow{a'}$, $\xrightarrow{a}$ y $\xrightarrow{b}$ para $\xrightarrow{b'}$, etc.). Dicho de otro modo, se puede subdividir una serie de relaciones asimétricas en tantos segmentos como se quiera, que se obtendrán siempre segmentos *sucesivos* que constituirán la misma serie total (es la razón

por la cual la adición serial es, por derecho, no-conmutativa); por el contrario, en una clasificación cualquiera, es posible descomponer las clases en clases elementales *no ordenadas* (ya que éstas son del mismo rango) y constituir así igual número de encajes distintos.

En una palabra, una serie de relaciones asimétricas conexas constituye una sucesión lineal y no cambia en nada la línea si se la divide más; una clasificación es, por el contrario, una jerarquía o una pirámide, en la cual se puede alcanzar la cima o la base por las vías más diversas. El agrupamiento I no desarrolla explícitamente estas distintas vías, y es por ello por lo que permanece isomorfo al agrupamiento II; pero bajo los términos secundarios *A'*, *B'*, *C'*, etc., que corresponden a las relaciones secundarias $\xrightarrow{a'}$, $\xrightarrow{b'}$, $\xrightarrow{c'}$, se hallan en realidad condensadas un conjunto de clases descomponibles, como lo manifiestan los agrupamientos II y III.

Enumeración y seriación. — ¿Si el agrupamiento I se reduce a una simple enumeración, cuyas clases elementales permanecen singulares (ver §12) no se reduciría entonces a una seriación del tipo del agrupamiento V? No, puesto que si bien al cambiar el orden de enumeración se llega a la misma clase total (lo que es precisamente la expresión de la vicariancia), al cambiar el orden de los términos de una serie, se modifica, por el contrario, tanto la serie total como las relaciones que la componen.

Imposibilidad de reunir en un solo agrupamiento la adición simple de clases (I) y la de relaciones asimétricas (V). — Las oposiciones que preceden impiden por lo tanto fusionar en un solo agrupamiento los agrupamientos I y V. La cuestión está tanto más excluida cuanto que se trata de clases "débilmente estructuradas" (definición 11), definidas por cualidades sin relación entre sí. Preguntémonos ahora, si esto es posible en el caso de las clases "semi-estructuradas" (definición 12), es decir aquellas cuyos términos individuales están ordenados en función de una seriación única de relaciones asimétricas transitivas (la clase constituye entonces el "campo" de las relaciones). Se tendrá en este caso:

(45) $\underbrace{O \xrightarrow{a} A} \xrightarrow{a'} A' \xrightarrow{b'} B' \xrightarrow{c'} C' \xrightarrow{d'} D' \xrightarrow{e'}$ . . . etc... (agrupamiento V)

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{\text{Cl. } A + A'} \\ \quad \underbrace{\text{Cl. } B + B'} \\ \quad\quad \underbrace{\text{Cl. } C + C'} \\ \quad\quad\quad \underbrace{\text{Cl. } D + D'} \\ \quad\quad\quad\quad \text{Cl. } E \quad\quad \text{etc...} \end{array}\right\} \text{(agrupamiento I)}$$

Pero, incluso si cada clase elemental (A, A', B', . . .) es por hipótesis singular, resta siempre la oposición siguiente entre el agrupamiento de clases (I) y el de relaciones (V): 1º dos términos cualesquiera de la serie son considerados como diferentes, en tanto que el agrupamiento V consiste precisamente en adicionar o sustraer sus diferencias: $A \xrightarrow{a} A'$, significa, por ejemplo, que A' es más pesado que A; 2º por el contrario, si los mismos términos se adicionan en tanto que elementos de clases, según el agrupamiento I, son considerados como equivalentes en función de la clase que forman entre sí: $A + A' = B$ constituye la clase B definida como "el conjunto de elementos más livianos que los siguientes", de donde resulta que A y A' son equivalentes en relación a B (pero no en relación a A). Por ello es que se puede escribir: $A + A' = A_2 (= A') + A'_2 (= A)$, mientras que no es posible escribir $\xrightarrow{a} + \xrightarrow{a'} = \xrightarrow{a_2} + \xrightarrow{a'_2}$ (donde a_2 sería idéntico a a' y a'_2 idéntico a a); esta última permutación (o vicariancia) es, en efecto, contradictoria con la seriación misma.

En síntesis, si bien es posible hablar de clases ordenadas o "semiestructuradas" (definición 12) con el fin de estudiar las relaciones entre la extensión y la comprensión (§ 6), no existe agrupamiento único de clases y relaciones que nos lleve a las clases ordenadas cualitativas: la clase ordenada es un compuesto, desde el punto de vista operatorio, y o bien es posible efectuar en ella las operaciones del agrupamiento V, lo que restringe a su vez el empleo de las operaciones de los agrupamientos I-II, o bien es posible aplicar estas últimas, pero haciendo abstracción de las operaciones de puesta en relación propias del agrupamiento V.

Por el contrario, se sobreentiende que, si se hace abstracción de las cualidades, lo que equivale a considerar los elementos A, A', B',

etc., como simples unidades homogéneas (transformando así la clase en una clase "estructurada" en el sentido de la definición 13), es posible entonces, simultáneamente, seriarlos y clasificarlos. Pero en este caso ya no nos hallaremos frente a clases simplemente lógicas: al conferir a los elementos la propiedad de ser a la vez clasificables y seriables según todas las combinaciones posibles, se los constituye en unidades aritméticas: se transforman, de este modo, las clases primarias en números cardinales ($A = 1$; $B = 2$; $C = 3$; etc.), y las relaciones asimétricas primarias en números ordinales ($\xrightarrow{a} = 1$º; $\xrightarrow{b} = 2$º; $\xrightarrow{c} = 3$º; etc.). Es lo que veremos en el capítulo IV (§ 26).

§ 19. EL AGRUPAMIENTO VI:

LA ADICION DE RELACIONES ASIMETRICAS.

Los individuos pertenecen a la misma clase si presentan en común una característica (o varias) que definen esa clase en comprensión: son pues equivalentes entre sí en tanto ambos pertenecen a la misma clase, o, lo que equivale a lo mismo, en tanto que presentan la misma característica que define esa clase. Ahora bien, esta característica en comprensión no puede ser más que una relación, ya que es común a diversos individuos de la clase, y esta relación no puede ser sino una equivalencia, ya que ella confiere a cada uno de los individuos relacionados la misma co-pertenencia a dicha clase. A lo que se añade naturalmente el hecho de que dos individuos que pertenezcan a clases diferentes presentarán entre sí una relación de equivalencia negativa, es decir de no-posesión en común de los mismos caracteres específicos. Tales son las relaciones simétricas: en lugar de traducir diferencias ordenadas, como las relaciones asimétricas, expresan diferencias nulas o equivalencias, es decir relaciones de co-pertenencia o de co-inclusión en relación a las clases, ya sea diferencias no-ordenadas o equivalencias negativas, que marcan la no-pertenencia o no-inclusión comunes en relación a las mismas clases. Por ejemplo, "compatriota" es una relación simétrica que une los miembros de una misma clase nacional y "no compatriota" es otra relación simétrica que une los miembros de clases nacionales distintas; "igual" es una relación simétrica que marca la co-pertenencia a una misma clase de valores (ya se trate de

igualdad jurídica, moral, etc., o de igualdad aritmética, métrica, etc.) y "desigual" o "diferente" es otra relación simétrica que marca la no-pertenencia común en relación a una clase; "idéntico" es una relación simétrica que marca la pertenencia a una misma clase singular y "no-idéntico" o "distinto" es otra relación simétrica que niega esta co-pertenencia, etc. Ahora bien, incluso los predicados no explícitamente formulados como relaciones simétricas constituyen no obstante, dicho tipo de relaciones: "humano" significa co-poseedor de los caracteres del hombre, "vertebrado" significa co-portador de una columna vertebral, etc.

Si A es una clase (los hijos de un mismo padre) y x, y y z elementos de ella, existe pues una relación simétrica, transitiva y reflexiva de equivalencia $x \overset{a}{\longleftrightarrow} y$ (así como $x \overset{a}{\longleftrightarrow} x$ y que $x \overset{a}{\longleftrightarrow} z$, si $x \overset{a}{\longleftrightarrow} y$ e $y \overset{a}{\longleftrightarrow} z$), que expresa la co-pertenencia a esa clase. De igual modo, si x, y y z pertenecen a una misma clase B (los nietos de un mismo abuelo), existe una relación simétrica, transitiva y reflexiva $\overset{b}{\longleftrightarrow}$ que expresa su propiedad en común respecto de B; lo mismo para la clase C (donde se tendrá $\overset{c}{\longleftrightarrow}$), D (luego $\overset{d}{\longleftrightarrow}$), etc. Atribuiremos a $\overset{o}{\longleftrightarrow}$ no el sentido de pertenencia a la clase nula (relación que no existe), sino de la identidad (diferencia nula): $x \overset{o}{\longleftrightarrow} x$ significará pues "x es el mismo individuo que él mismo". Las relaciones $\overset{\bar{o}}{\longleftrightarrow}$; $\overset{\bar{a}}{\longleftrightarrow}$; $\overset{\bar{b}}{\longleftrightarrow}$ significarán "no-idéntico", "no tener el mismo padre", "no tener el mismo abuelo", etc. Podemos pues conferir un sentido a las relaciones $\overset{o'}{\longleftrightarrow} =$ = hermano, es decir $\overset{a}{\longleftrightarrow}$ y $\overset{\bar{o}}{\longleftrightarrow}$ (tener el mismo padre pero sin ser idénticos); $\overset{a'}{\longleftrightarrow} =$ primo hermano, es decir $\overset{b}{\longleftrightarrow}$ y $\overset{\bar{a}}{\longleftrightarrow}$ (tener el mismo abuelo pero no el mismo padre); $\overset{b'}{\longleftrightarrow} =$ primo segundo, es decir $\overset{c}{\longleftrightarrow}$ y $\overset{\bar{b}}{\longleftrightarrow}$; etc. Las relaciones $\overset{\bar{o}'}{\longleftrightarrow}$; $\overset{\bar{a}'}{\longleftrightarrow}$; $\overset{\bar{b}'}{\longleftrightarrow}$; etc., presentarán el sentido de "no-hermano", "no-primo", etc.

Hay que tener cuidado en destacar que las relaciones que expresan una no-equivalencia o equivalencia negativa, tal $\overset{\bar{o}}{\longleftrightarrow}$; $\overset{\bar{o}'}{\longleftrightarrow}$; $\overset{\bar{a}}{\longleftrightarrow}$; $\overset{\bar{a}'}{\longleftrightarrow}$; etc., no constituyen operaciones inversas con respecto a las relaciones positivas correspondientes. En efecto, por una parte, las composiciones $x \overset{o}{\longleftrightarrow} y + x \overset{\bar{o}}{\longleftrightarrow} y$ ó $x \overset{a}{\longleftrightarrow} y + x \overset{\bar{a}}{\longleftrightarrow} y$, etc., no dan la identidad como producto, como es el caso de la composición de la operación directa con la inversa en el terreno de las relaciones; por otra parte, y sobre todo, estas composiciones son contradictorias y no existen lógicamente: no se podría afirmar primero que x e y presentan cierta relación (ser idénticos, tener el mismo padre, etc.) para negarla enseguida, como

es posible en cambio poner una clase $+ A$ y sustraerla enseguida $- A$, de donde $A - A = 0$.

Se ve aquí de la manera más clara por qué la reversibilidad propia de las operaciones de relaciones se basa en la reciprocidad y no en la negación: por el hecho mismo de que las relaciones se refieren a la comprensión y no a la extensión, la afirmación y negación simultánea de la misma relación están desprovistas de todo significado.

Las relaciones $\overset{\bar{a}}{\longleftrightarrow}$; $\overset{\bar{b}}{\longleftrightarrow}$ significan pues simplemente que los términos x e y que ellas unen no pertenecen a la misma clase A, B, etc., pero que x pertenece a A, ó a B, etc., y posee las características, mientras que y pertenece a la clase complementaria $A = U - A$ ó $B = U - B$, etc., y presenta los caracteres decisivos. Dicho de otro modo, en las relaciones $\overset{\bar{a}}{\longleftrightarrow}$; $\overset{\bar{b}}{\longleftrightarrow}$; etc., la negación se refiere a la clase y no a la relación: estas relaciones son la simple generalización a las clases negativas:

$$(A = A' + B' + C' + \ldots;\ B = B' + C' + D' + \ldots;$$
$$C = C' + D' + E' + \ldots)$$

de las relaciones $\overset{a'}{\longleftrightarrow}$; $\overset{b'}{\longleftrightarrow}$; etc. La negación en juego es pues una simple operación de clases, mientras que la relación como tal permanece como una relación de equivalencia y de co-pertenencia, aún cuando sea preciso remontarse hasta la clase total U: del mismo modo que $\overset{a'}{\longleftrightarrow}$ significa $\overset{b}{\longleftrightarrow}$ y no $\overset{a}{\longleftrightarrow}$, igualmente $\overset{\bar{a}}{\longleftrightarrow}$ significa $\overset{u}{\longleftrightarrow}$ y no $\overset{a}{\longleftrightarrow}$.

Una vez establecido esto, podemos apreciar la terminología que utilizaremos (refiriéndonos a la definición 16 para la equivalencia cualitativa en general).

Definición 25. — *Llamaremos relaciones de "equivalencias positivas" las relaciones simétricas, transitivas y reflexivas* $\overset{a}{\longleftrightarrow}$; $\overset{b}{\longleftrightarrow}$ *; etc., que expresan la co-posesión de los caracteres distintivos propios de las clases A, B, etc., y que tienen por límites la identidad* $\overset{0}{\longleftrightarrow}$ *relativa a las clases singulares* $\{x_1\}$, *etc.*

Definición 26. — *Se llamarán "alteridades positivas"* $\overset{o'}{\longleftrightarrow}$; $\overset{a'}{\longleftrightarrow}$; $\overset{b'}{\longleftrightarrow}$; *etc., las relaciones simétricas, intransitivas e irreflexivas que expresan la co-posesión de los caracteres específicos de las clases A (para* $\overset{o'}{\longleftrightarrow}$ *); B (para* $\overset{a'}{\longleftrightarrow}$ *); C (para* $\overset{b'}{\longleftrightarrow}$ *); etc., y la no-común posesión de los caracteres propios de las clases de rango inferior:* $\{x_1\}$ *para* $\overset{a'}{\longleftrightarrow}$ *; A para* $\overset{a'}{\longleftrightarrow}$ *; A y B para* $\overset{b'}{\longleftrightarrow}$ *; A, B y C para* $\overset{c'}{\longleftrightarrow}$ *; etc.*

Definición 27. — *Se llamarán "equivalencias negativas"* $\overset{\bar{o}}{\longleftrightarrow}$; $\overset{\bar{a}}{\longleftrightarrow}$; $\overset{\bar{b}}{\longleftrightarrow}$; *etc. las relaciones simétricas, intransitivas e irreflexivas que expresan la no-común posesión de los caracteres distintivos propios de las clases de rango correspondiente:* $\{x_1\}$ *para* $\overset{\bar{o}}{\longleftrightarrow}$; *A para* $\overset{\bar{a}}{\longleftrightarrow}$; *etc., y se llamarán "alteridades negativas"* $\overset{\bar{o}'}{\longleftrightarrow}$; $\overset{\bar{a}'}{\longleftrightarrow}$; $\overset{\bar{b}'}{\longleftrightarrow}$; *etc., las relaciones simétricas, intransitivas y reflexivas que niegan la alteridad correspondiente* (Ejemplo $x \overset{\bar{a}'}{\longleftrightarrow} y$: "$x$ no es primo hermano de y"; y $x \overset{\bar{a}'}{\longleftrightarrow} x$: "$x$ no es su propio primo hermano").

NOTA. — Se puede distinguir además de las relaciones entre individuos, las relaciones entre clases: estas relaciones presentan las mismas formas. Por ejemplo, las relaciones $A \overset{B}{\longleftrightarrow} A'$; $B \overset{C}{\longleftrightarrow} B'$; etc., se llamarán "equivalencias positivas" entre clases y expresarán la equivalencia entre A y A' en relación a B, etc.

Definición 28. — *Llamaremos "producto aditivo de dos relaciones simétricas" entre tres términos x, y y z, a la relación simétrica de rango más débil determinada entre x y z por las relaciones simétricas dadas entre x e i, así como entre y y z: sea* $(x \longleftrightarrow y) + (y \longleftrightarrow z) = (x \longleftrightarrow z)$.

Se puede también adicionar las relaciones simétricas dadas entre los dos mismos términos: $(x \longleftrightarrow y) + (x \longleftrightarrow y)$*, ya que estas relaciones son compatibles entre sí (no contradictorias); y como límite, se pueden adicionar las relaciones reflexivas* $(x \longleftrightarrow x) + (x \longleftrightarrow x)$.

Estas operaciones aditivas (28) permiten pues caracterizar un "agrupamiento". Pero este agrupamiento presenta una forma muy particular a causa del rol fundamental que desempeñan en él las tautologías y las reabsorciones, así como las alteridades correspondientes a las clases secundarias y a las vicariancias. Conviene pues examinar de cerca el mecanismo, ya que este es sumamente instructivo respecto de la naturaleza de las estructuras de conjunto de carácter intensivo y de los "agrupamientos" lógicos en general.

En efecto, al expresar las relaciones de equivalencia la co-posesión de los caracteres de una misma clase, todas las composiciones de equivalencias positivas, resultarán tautologías que corresponderán a la composición de clases $A + A = A$: $(x \overset{a}{\longleftrightarrow} y) + (y \overset{a}{\longleftrightarrow} z) = (x \overset{a}{\longleftrightarrow} z)$ (si x es compatriota de y, y además y lo es de z, entonces x lo será también de z). De lo que se deriva que es imposible ascender, por la sola composición de equivalencias positivas, de una relación de rango inferior $\overset{a}{\longleftrightarrow}$ a una relación de orden superior $\overset{b}{\longleftrightarrow}$; $\overset{c}{\longleftrightarrow}$; etc., pese a que si dos individuos tienen entre sí la relación $\overset{a}{\longleftrightarrow}$ (por ejemplo compatriotas), se hallan naturalmente unidos también entre sí por las relaciones $\overset{b}{\longleftrightarrow}$ (por ejemplo pertenecer al mismo continente); $\overset{c}{\longleftrightarrow}$; etc. Si componemos ahora, una equivalencia positiva con una alteridad posi-

tiva, $(x \overset{a'}{\longleftrightarrow} y) + (y \overset{a}{\longleftrightarrow} z)$, por ejemplo. "$x$ tiene el mismo padre que y e y es primo hermano de z", no obtenemos tampoco la relación $\overset{b}{\longleftrightarrow}$ (ya que, según la definición 28, la adición de relaciones simétricas, como la de clases, determina la relación de rango más débil): encontramos la relación $\overset{a'}{\longleftrightarrow}$, es decir que x será también primo hermano de y. Hay pues nuevamente tautología, o al menos absorción $a + a' = a'$. La razón es que, si x e y son de la misma clase A_1 y z de la clase A_2 (es decir, de la misma clase B, pero no de la misma clase A_1), entonces x e y pertenecerán, en relación a z, a la clase A_2 $(= A'_1)$: la composición

$$\overset{a}{\longleftrightarrow} + \overset{a'}{\longleftrightarrow} = \overset{a'}{\longleftrightarrow}$$

corresponderá pues, en términos de clases, a la reabsorción $A_1 + A'_2 = A'_2$ (ver figura 11). La única manera de alcanzar las relaciones

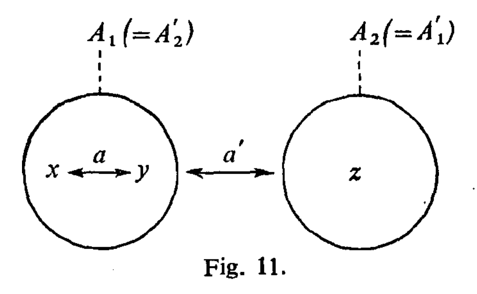


Fig. 11.

$\overset{b}{\longleftrightarrow}$; $\overset{c}{\longleftrightarrow}$; etc., partiendo de relaciones de rango inferior, consistirá pues en adicionar las alteridades positivas: $x \overset{a'}{\longleftrightarrow} y + y \overset{a'}{\longleftrightarrow} z = x \quad z$: si x es primo hermano de y e y lo es de z, entonces la única conclusión es que x tendrá el mismo abuelo de z (y podrá ser su primo hermano o su hermano, o aún confundirse con z mismo). La razón es que (si x pertenece a la clase A_1), y pertenecerá a la clase A'_1 en relación a x (A'_1 contendrá la clase A_2 de la cual y será uno de sus miembros) y z pertenecerá a la clase A'_2 en relación a y (elemento de A_2): de donde $A'_1 + A'_2 = B$ (ver figura 14, p. 182). Se tendrá igualmente:

$$\overset{b'}{\longleftrightarrow} + \overset{b'}{\longleftrightarrow} = \overset{c}{\longleftrightarrow}\,; \quad \overset{c'}{\longleftrightarrow} + \overset{c'}{\longleftrightarrow} = \overset{d}{\longleftrightarrow}\,; \text{ etc.}$$

Inversamente, la única manera de volver a descender de una equivalencia positiva superior a una equivalencia positiva inferior, consiste en componer la primera con una equivalencia negativa, siempre que las dos relaciones unan los mismos términos x e y. Por ejemplo

$$(x \overset{b}{\longleftrightarrow} y) + (x \overset{\bar{a}}{\longleftrightarrow} y) = (x \overset{a'}{\longleftrightarrow} y),$$

es decir, "si x tiene el mismo abuelo que y y no tienen el mismo padre, entonces son primos"; igualmente:

$$(x \overset{c}{\longleftrightarrow} y) + (x \overset{\bar{b}}{\longleftrightarrow} y) = (x \overset{b'}{\longleftrightarrow} y)\,; \text{ etc.}$$

Por el contrario, si se componen las mismas relaciones entre tres términos, se llega a reabsorciones: por ejemplo, $x \overset{b}{\longleftrightarrow} y + y \overset{a}{\longleftrightarrow} z$ (si x tiene el mismo abuelo que y y si y y z no son hermanos), la única conclusión en cuanto a las relaciones entre y y z es que pertenecen a la clase más general del sistema U, sea: $x \overset{u}{\longleftrightarrow} z$.

Queda claro pues, una vez más, que la operación $+ \overset{a}{\longleftrightarrow}$ no es la inversa de $+ \overset{\bar{a}}{\longleftrightarrow}$, y no puede constituir por lo tanto la inversa del agrupamiento. De una manera general, el pasaje de las equivalencias de rango inferior a las de rango superior o el pasaje en sentido opuesto, no constituyen las operaciones directas e inversas del agrupamiento, sino que son operaciones directas entre otras. Las operaciones directas del agrupamiento, consistentes pues en adiciones, corresponden a las tautologías, reabsorciones y vicariancias de los agrupamientos de clases, más que a adiciones y sustracciones simples de clases. En cuanto a las operaciones inversas, son las mismas adiciones aplicadas a las relaciones conversas. Tal es la originalidad de este agrupamiento VI, que es a la vez muy distinto de los otros, e indispensable para permitir comprender la estructura que caracteriza el conjunto de los agrupamientos I a VIII:

1. La *operación directa* será la adición de una relación simétrica cualquiera (equivalencia positiva o negativa y alteridad positiva o negativa) en un orden dado de los términos x, y y z (ó x e y):

(46) $$(x \overset{a}{\longleftrightarrow} y) + (y \overset{a}{\longleftrightarrow} z) = (x \overset{a}{\longleftrightarrow} z)$$

2. La *operación inversa* será la adición de la conversa, es decir de la misma relación simétrica $x \longleftrightarrow y$ en el orden $y \longleftrightarrow x$.

Se podría escribir también la inversa $-(x \longleftrightarrow y)$:

(47) $$-(x \overset{a}{\longleftrightarrow} y) = +(y \overset{a}{\longleftrightarrow} x)$$

3. La *idéntica general*, producto de las operaciones directa e inversa y operación que deja invariante cualquier otra operación, es la identidad $(x \overset{o}{\longleftrightarrow} x)$:

(48) $$(x \overset{a}{\longleftrightarrow} y) + (y \overset{a}{\longleftrightarrow} x) = (x \overset{o}{\longleftrightarrow} x)$$

y:

(48 *bis*) $$(x \overset{o}{\longleftrightarrow} x) + (x \overset{a}{\longleftrightarrow} y) = (x \overset{a}{\longleftrightarrow} y)$$

4. Las *idénticas especiales* son la tautología y la absorción:

(49) $$(x \overset{a}{\longleftrightarrow} y) + (x \overset{a}{\longleftrightarrow} y) = (x \overset{a}{\longleftrightarrow} y)$$

y

(49 *bis*) $$(x \overset{a}{\longleftrightarrow} y) + (x \overset{b}{\longleftrightarrow} y) = (x \overset{b}{\longleftrightarrow} y)$$

5. En cuanto a la *asociatividad*, es general ya que las operaciones directas e inversas son idénticas entre sí.

Las principales composiciones son entonces:

1. El producto de dos equivalencias positivas es la más débil de las equivalencias positivas que engloban a ambas:

(50)
$$(x \overset{a}{\longleftrightarrow} y) + (y \overset{a}{\longleftrightarrow} z) = (x \overset{a}{\longleftrightarrow} z)$$
$$(x \overset{a}{\longleftrightarrow} y) + (y \overset{b}{\longleftrightarrow} z) = (x \overset{b}{\longleftrightarrow} z)$$
$$(x \overset{c}{\longleftrightarrow} y) + (y \overset{b}{\longleftrightarrow} z) = (x \overset{c}{\longleftrightarrow} z) \text{ ; etc.}$$

En efecto, si x e y pertenecen a una misma clase (A ó D, etc.) y si y y z pertenecen ambos a otra clase (B ó F), entonces la relación de equivalencia entre x y z estará determinada por su co-pertenencia

a la clase compuesta $(A + B)$ ó $(D + F)$, etc. En el caso de los encajes aditivos, se tendrá pues las absorciones $A + B = B$ ó $D + F = F$, es decir que el producto de dos equivalencias positivas será simplemente aquella que sea de rango superior (proposición 50).

Pero resta el caso de que las equivalencias traducen la co-pertenencia a clases multiplicativas. "Los parisienses (x) son compatriotas $(\overset{a_1}{\longleftrightarrow})$ de los habitantes de Perpignan (y)"; "los habitantes de Perpignan (y) hablan catalán $(\overset{a_2}{\longleftrightarrow})$ como los de Barcelona (z)"; ¿cuál será la relación entre los parisienses y los barceloneses? La equivalencia $x \longleftrightarrow z$ será así la más débil de la que engloban $\overset{a_1}{\longleftrightarrow}$ y $\overset{a_2}{\longleftrightarrow}$, es decir:

(51) $$(x \overset{a_1}{\longleftrightarrow} y) + (y \overset{a_2}{\longleftrightarrow} z) = (x \overset{b_1 b_2}{\longleftrightarrow} z)$$

En efecto, la clase A_1 correspondiente a $x \overset{a_1}{\longleftrightarrow} y$ es la de los franceses (hablen o no catalán), y la clase A_2 correspondiente a $\overset{a_2}{\longleftrightarrow}$ es la de los catalanes (franceses o no franceses). De lo que resultan cuatro posibilidades (según el agrupamiento IV): A_1A_2 (= los franceses catalanes); $A_1A'_2$ (los franceses no catalanes); A'_2A_2 (los no franceses catalanes), y $A'_1A'_2$ (los no franceses no catalanes). La clase total será entonces B_1B_2 y la equivalencia $x \longleftrightarrow z$ por lo tanto $x \overset{b_1 b_2}{\longleftrightarrow} z$.

2. *El producto de una equivalencia positiva y de una alteridad positiva es aquella de ambas direcciones que es de rango superior:*

(52) $$(x \overset{a}{\longleftrightarrow} y) + (y \overset{a'}{\longleftrightarrow} z) = (x \overset{a'}{\longleftrightarrow} z)$$
$$(x \overset{a}{\longleftrightarrow} y) + (y \overset{b'}{\longleftrightarrow} z) = (x \overset{b'}{\longleftrightarrow} z)$$

y

$$(x \overset{b}{\longleftrightarrow} y) + (y \overset{a'}{\longleftrightarrow} z) = (x \overset{b}{\longleftrightarrow} z)$$
$$(x \overset{c}{\longleftrightarrow} y) + (y \overset{a'}{\longleftrightarrow} z) = (x \overset{c}{\longleftrightarrow} z) \text{ ; etc.}$$

Por ejemplo, si x e y son los nietos de un mismo abuelo $(\overset{b}{\longleftrightarrow})$ e y es primo hermano paterno de z (sea $\overset{a'}{\longleftrightarrow}$), entonces x y z son nietos del mismo abuelo $(\overset{b}{\longleftrightarrow})$.

En efecto, la relación de equivalencia expresa el hecho de que dos o tres individuos pertenecen a una clase común X (de ahí su relación $\overset{r}{\longleftrightarrow}$). Si uno de los dos individuos tiene una relación de alteridad $(\overset{r'}{\longleftrightarrow})$ con un tercero que pertenece a una clase Y no incluida en X (fig. 12), entonces el otro la tendrá también: de ahí $r + r' = r'$ ya que, en este caso, tenemos $r \subset r'$. Si por el contrario, la clase Y

está incluida en X (fig. 13), entonces x, y y z pertenecen los tres a X y se tendrá entonces $r' \subset r$, *de donde* $r + r' = r$.

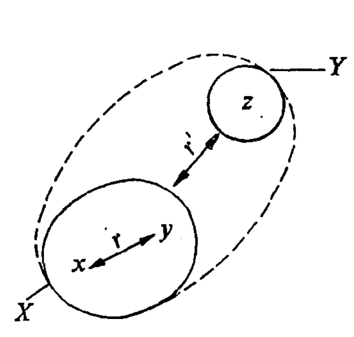


Fig. 12. — La clase X contiene los términos x e y y la clase Y, disyunta de X, contiene el término z.

Fig. 13. — La clase X contiene los términos x e y y la clase Y incluida en X, contiene el término z.

3. *El producto de dos alteridades positivas de rangos distintos, dadas entre tres términos, es aquella de rango superior*:

(53) $$(x \xleftrightarrow{o'} y) + (y \xleftrightarrow{a'} z) = (x \xleftrightarrow{a'} z)$$

y

$$(x \xleftrightarrow{a'} y) + (y \xleftrightarrow{o'} z) = (x \xleftrightarrow{a'} z)$$
$$(x \xleftrightarrow{c'} y) + (y \xleftrightarrow{a'} z) = (x \xleftrightarrow{c'} z) \text{ ; etc.}$$

Por ejemplo, si x es hermano de y e y primo hermano de z, entonces x es primo hermano de z.

En efecto, cuando las alteridades son de rangos distintos, los dos términos relacionados por aquella de rango inferior (por ejemplo hermano $\xleftrightarrow{o'}$) son necesariamente equivalentes desde el punto de vista de la clase inmediatamente superior (por ejemplo $\xleftrightarrow{a}$ = hijo del mismo padre). Si uno de esos dos términos está relacionado a un tercero por una alteridad de orden superior (como $\xleftrightarrow{a'}$ = primo hermano), el otro lo estará también en virtud de su co-pertenencia a la misma clase.

4. Cuando dos alteridades positivas son del mismo rango, su producto es la equivalencia de rango inmediatamente superior:

(54)
$$(x \overset{o'}{\longleftrightarrow} y) + (y \overset{o'}{\longleftrightarrow} z) = (x \overset{a}{\longleftrightarrow} z)$$
$$(x \overset{a'}{\longleftrightarrow} y) + (y \overset{a'}{\longleftrightarrow} z) = (x \overset{b}{\longleftrightarrow} z) \text{ ; etc.}$$

Por ejemplo, si x es primo hermano paterno de y e y lo es de z, entonces x y z son nietos de un mismo abuelo, es decir, primos hermanos, hermanos o idénticos.

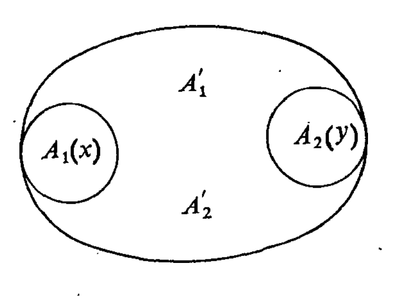


Fig. 14. — A_1 forma parte de A'_2 y A_2 forma parte de A'_1.

En efecto, la composición de estas alteridades de un mismo rango no se basa en la tautificación o en la reabsorción de las clases correspondientes, como las simetrías precedentes, sino sobre la vicariancia de estas clases. Sea

$$\overset{a'}{\longleftrightarrow} + \overset{a'}{\longleftrightarrow} = \overset{b}{\longleftrightarrow}$$

La primera de estas alteridades (x es primo hermano de y) constituye una relación entre la clase A_1 ($= x$ y sus hermanos) y la clase A'_1 ($=$ sus primos hermanos, por lo tanto, y); la segunda de dichas alteridades (y es primo hermano paterno de z) constituye, por el contrario, la relación entre A_2 (y y sus hermanos) y A'_2 (sus primos hermanos, o sea x). Ahora bien, como $A'_1 + A'_2 = B$, el producto de $\overset{a'}{\longleftrightarrow} + \overset{a'}{\longleftrightarrow}$ no podría dar más que $\overset{b}{\longleftrightarrow}$, ya que el individuo z que pertenece a la clase A'_2, puede ser un A_1 o un A'_2 no A_1 (ver la figura 14).

5. La composición de una equivalencia positiva $(\overset{s}{\longleftrightarrow})$ *entre* x e y, *con una equivalencia o una alteridad negativas de rango inferior* $(\overset{a \ldots r'}{\longleftrightarrow})$ *entre los dos mismos términos* x e y, *da una relación que expresa, bajo la forma de una equivalencia o de una alteridad, el producto de la sustracción de las clases correspondientes:* $S - (A \ldots R')$:

(55)
$$(x \overset{b}{\longleftrightarrow} y) + (x \overset{\bar{a}}{\longleftrightarrow} y) = (x \overset{a'}{\longleftrightarrow} y)$$

y

$$(x \overset{b}{\longleftrightarrow} y) + (x \overset{\bar{a}'}{\longleftrightarrow} y) = (x \overset{a}{\longleftrightarrow} y)$$

Por ejemplo, si x tiene el mismo abuelo que y e y no es su hermano, él es su primo hermano y *viceversa* ($B - A = A'$ y $B - A' = A$).

La composición deja de ser interesante cuando la equivalencia positiva y la relación negativa no son de rangos contiguos: por ejemplo, si x e y tienen el mismo bisabuelo y no son hermanos, pueden ser primos en primero o segundo grado y tener o no el mismo abuelo.

6. *La composición de una equivalencia positiva entre* x e y, *con una equivalencia o una alteridad negativas del mismo rango o de rango superior, entre* y y z, *da esa misma equivalencia o alteridad negativas, entre* x y z:

$$(56) \quad (x \overset{a}{\longleftrightarrow} y)+(y \overset{\bar{a}}{\longleftrightarrow} z)=(x \overset{\bar{a}}{\longleftrightarrow} z); \quad (x \overset{a}{\longleftrightarrow} y)+(y \overset{\bar{b}}{\longleftrightarrow} z)=(x \overset{\bar{b}}{\longleftrightarrow} z)$$

$$(x \overset{a}{\longleftrightarrow} y)+(y \overset{\bar{a}'}{\longleftrightarrow} z)=(x \overset{\bar{a}'}{\longleftrightarrow} z); \quad (x \overset{a}{\longleftrightarrow} y)+(y \overset{\bar{b}'}{\longleftrightarrow} z)=(x \overset{\bar{b}'}{\longleftrightarrow} z)$$

Por ejemplo, si x es hermano de y e y no es el hermano de z (o el primo, etc.), entonces x tampoco es el hermano (o el primo, etc.) de z.

7 y 8. Finalmente, *la composición de una equivalencia positiva entre* x e y y *una equivalencia o alteridad negativas de rango inferior entre* y y z, *o la composición de dos equivalencias o alteridades negativas entre los términos* x, y y z, *da la equivalencia más general del sistema considerado (sea* $\overset{u}{\longleftrightarrow}$ *correspondiente a la clase* U):

$$(57) \qquad (x \overset{b}{\longleftrightarrow} y) + (y \overset{\bar{a}}{\longleftrightarrow} z) = (x \overset{u}{\longleftrightarrow} z)$$

y

$$(57\ bis) \qquad (x \overset{\bar{a}}{\longleftrightarrow} y) + (y \overset{\bar{a}}{\longleftrightarrow} z) = (x \overset{u}{\longleftrightarrow} z)$$

y

$$(x \overset{\bar{a}'}{\longleftrightarrow} y) + (y \overset{\bar{b}}{\longleftrightarrow} z) = (x \overset{u}{\longleftrightarrow} z)$$

En efecto, si x e y pertenecen ambos a una clase cualquiera X, e y y z no pertenecen a la misma clase Y, incluida en X (si x e y tienen el mismo abuelo o y y z no son hermanos), entonces x y z pueden pertenecer a la misma clase Y o a cualquier otra clase de rango superior hasta llegar a U (x y z pueden ser hermanos o lo que se quiera, hasta no tener como antepasado común más que el padre Adán o el pri-

mero de los protozoarios, según la definición de U). Del mismo modo, si x o y no son de la misma clase X, e y y z no son de la misma clase Y (sin que esté dada ninguna relación entre las clases X e Y), no se puede extraer sino una sola conclusión: que x y z pertenecen a la clase más general del sistema, es decir a U (de donde se tiene $\overset{u}{\longleftrightarrow}$).

§ 20. EL AGRUPAMIENTO VII: LA MULTIPLICACION CO-UNIVOCA DE RELACIONES.

Multiplicar una relación por otra consiste en someter los términos de la primera (todos o algunos) a la segunda (del mismo modo que multiplicar dos clases consiste en establecer los encajes entre todos o algunos de los términos de la primera en la segunda). Ahora bien, existen dos tipos de multiplicaciones entre relaciones, y no pueden existir más que dos: las multiplicaciones bi-unívocas y las co-unívocas.

Se podrían concebir seguramente, tres tipos de multiplicaciones, la de las relaciones simétricas entre sí, la de las relaciones asimétricas entre sí y la de ambas a la vez. Pero, no se podrían multiplicar las relaciones simétricas sólo entre ellas: si un individuo puede ser a la vez hermano, primo, etc., en relación a otros, es porque es hijo del mismo padre, etc., y porque pertenece a un mismo sistema de encajes de clases: ahora bien, las relaciones de hijo, nieto, etc., o de inclusiones entre clases, son relaciones asimétricas y es preciso pasar por su intermedio a fin de poder insertar las relaciones simétricas en los sistemas multiplicativos. Por el contrario, es posible multiplicar relaciones asimétricas entre sí y traducir de este modo, en lenguaje de relaciones, las tablas de doble (triple, etc.) entrada (ver agrupamiento IV) en el cual las inclusiones constituyen ya por sí solas relaciones asimétricas: pero las correspondencias bi-unívocas que intervienen en dichas tablas constituyen, por el contrario, relaciones simétricas, lo que confiere al sistema un carácter mixto. En cuanto a la multiplicación de relaciones asimétricas y de relaciones simétricas, puede ser de dos tipos. Puede haber multiplicación bi-unívoca, como acabamos de entreverlo y como volveremos a mostrarlo en detalle en el § 21. Pero puede darse también una multiplicación co-unívoca, y es esta última la que consideraremos ahora.

Un conocido teorema de lógica de relaciones, desarrollado por

Russell, dice que, una relación asimétrica multiplicada por su conversa da una relación simétrica y transitiva. Por ejemplo, la relación "x es hijo de z" multiplicada por "z es padre de y" da "x es hijo del mismo padre que y" (es decir, hermano de y, ó idéntico a y) : sea $(x \uparrow z) \times (z \downarrow y) = (x \longleftrightarrow y)$. Recíprocamente, se puede considerar toda relación simétrica transitiva como el producto de dos relaciones asimétricas. En efecto, una relación simétrica 1" y transitiva entre x e y, expresa su co-pertenencia o su co-inclusión en relación a una misma clase: ahora bien, la pertenencia o la inclusión son relaciones asimétricas 2". Tenemos, por otra parte, una serie de definiciones proporcionadas por la lógica de relaciones, de las cuales daremos las cuatro siguientes:

La *conversa* de una relación r es una relación que escribiremos r^{-1} y tal que:

$$r^{-1}\ yx \longleftrightarrow rxy.$$

El *producto* de la relación r por la relación s es una relación que escribiremos $r \mid s$ y tal que:

$$(r \mid s)\ xy \longleftrightarrow (\exists z)\ (rxz\ .\ szy)$$

Una relación r es de *uno a muchos* si

$$(x)\ (y)\ (z)\ (rxz\ .\ ryz\ . \supset x = y)$$

Una relación r es de *muchos a uno* si

$$(x)\ (y)\ (z)\ (rzx\ .\ rzy\ . \supset x = y).$$

Se ve así que, si r es una relación cualquiera simétrica o no, las relaciones $r \mid r^{-1}$ y $r^{-1} \mid r$ son simétricas. Además, si r es una relación de uno a muchos, la relación $r \mid r^{-1}$ es transitiva, y si r es una relación de muchos a uno, la relación $r^{-1} \mid r$ es transitiva. Por otra parte, y dado que toda relación que es a la vez simétrica y transitiva es también reflexiva, las relaciones $r \mid r^{-1}$ y $r^{-1} \mid r$, son relaciones de equivalencia.

Definición 29. — *Llamaremos relación "co-unívoca" toda relación asimétrica que une un mismo término a varios.*

Notaremos $\downarrow$ una relación co-unívoca y $\uparrow$ su conversa. Por

1" hasta 2" se ha intercalado del original de 1949 (PIAGET, J. "Traité de Logique", Ed. ARMAND COLIN, Paris, 1949, pág. 159), por error en la edición de 1972.

ejemplo, la relación que une por medio de la inclusión una clase A a sus subclases es co-unívoca y se podrá escribir:

$$(58) \qquad \left(x \uparrow A\right) \times \left(A \downarrow y\right) = (x \stackrel{a}{\longleftrightarrow} y)$$ [1]

Definición 30. — *Se llamará "multiplicación co-unívoca de relaciones" la operación que determine entre dos términos* x y z *las relaciones co-unívocas y las relaciones simétricas de rango más débil, partiendo de las relaciones de las mismas formas dadas entre* x e y y *entre* y y z: *sea*

$$\left(x \downarrow^{a} \stackrel{o'}{\longleftrightarrow} y\right) \times \left(y \downarrow^{a} \stackrel{a'}{\longleftrightarrow} z\right) = \left(x \downarrow^{b} \stackrel{o}{\longleftrightarrow} z\right)$$

Por ejemplo, x es el padre $\left(\downarrow^{a}\right)$ del hermano $\left(\stackrel{o'}{\longleftrightarrow}\right)$ de y; y es el padre del primo hermano paterno $\left(\downarrow^{a}\right)$ de z: por lo tanto, x es el abuelo $\left(\downarrow^{b} \stackrel{o}{\longleftrightarrow}\right)$ de z.

Tales operaciones constituyen un agrupamiento multiplicativo, isomorfo al agrupamiento co-unívoco de clases (III). Vamos a desarrollar ahora las principales composiciones tomando como ejemplo las relaciones de familia constitutivas de un árbol genealógico. Pero, tomaremos en cuenta sólo la filiación paterna, sin considerar las innumerables combinaciones derivadas de las uniones (por las interferencias de varios sistemas co-unívocos, lo que da por otra parte, otros sistemas co-unívocos).

Veamos en primer lugar, la serie de relaciones asimétricas que intervienen:

$x \downarrow^{a} y = x$ es el padre de y $\qquad$ $x \downarrow^{a} y = \downarrow^{b} - \downarrow^{a} y = x$ es padre de y

$x \downarrow^{b} y = x$ es el abuelo de y $\qquad$ $x \downarrow^{a} y = \downarrow^{c} - \downarrow^{b} y = x$ es padre de y

$x \downarrow^{c} y = x$ es el bisabuelo de y $\qquad$ ...etc.

...etc.

Escribiremos uniformemente, para abreviar, , para la relación "padre", etc. (ver fig. 15).

$x \uparrow^{a} y = x$ es hijo de y $\qquad$ $x \uparrow^{a} y = \uparrow^{b} - \uparrow^{a} y = x$ es hijo de y

$x \uparrow^{b} y = x$ es nieto de y $\qquad$ $x \uparrow^{b} y = \uparrow^{c} - \uparrow^{b} y = x$ es nieto de y

...etc.

1 Esta expresión significa que $(\exists A)(x \uparrow A \cdot A \downarrow y)$, o aún $(\exists A)(r^{-1}xA \cdot rAy)$ es una relación de equivalencia respecto de la propiedad a característica de A.

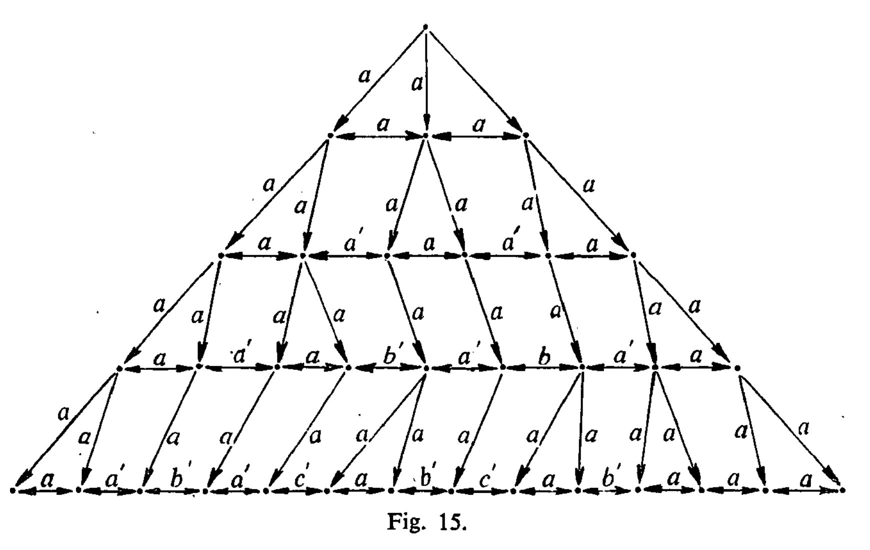


Fig. 15.

Escribiremos uniformemente $\uparrow^{a}$ para la relación "hijo", etc.

Estas relaciones se unen entre sí mediante adiciones simples:

$$\left(x \downarrow^{a} y\right) + \left(y \downarrow^{a} z\right) = \left(x \downarrow^{b} z\right)$$

= si x es el padre de y, y si y es el padre de z, entonces x es el abuelo de z.

Escribiremos pues, de manera general, si $\downarrow^{g}$ es una relación cualquiera de rango a, b, c, etc., y $\downarrow^{g'}$ otra relación cualquiera igualmente de rango a, b, c, etc.:

(59) $$\left(x \downarrow^{g} y\right) + \left(y \downarrow^{g'} z\right) = \left(x \downarrow^{g+g'} z\right)$$

y

(59 *bis*) $$\left(x \downarrow^{g} y\right) + \left(y \uparrow^{g'} z\right) = \left(x \downarrow^{g-g'} z\right)$$

dado que $g' > g$, por ejemplo ($g' = \uparrow^b$ y $g = \downarrow^a$), se deduce que el producto será de sentido $\uparrow : \downarrow^a + \uparrow^b = \uparrow^a$.

En cuanto a las relaciones simétricas, determinarán el siguiente producto:

(60) $$\left(z \overset{a}{\underset{g}{\downarrow}} x\right) \times \left(y \overset{a}{\underset{g}{\downarrow}} z\right) = \left(x \xleftrightarrow{a...m} y\right) \quad \text{donde} \quad m = g$$

Se obtendrán así las relaciones conocidas por el agrupamiento VI:

$\left(z \downarrow^a x\right) \times \left(y \uparrow^a z\right) = (x \xleftrightarrow{a} y) = x$ es hijo del mismo padre que y

$\left(z \downarrow^b x\right) \times \left(y \uparrow^b z\right) = (x \xleftrightarrow{b} y) = x$ es nieto del mismo abuelo que y

$\left(z \downarrow^c x\right) \times \left(x \uparrow^c z\right) = (x \xleftrightarrow{c} y) = x$ es bisnieto, ...etc.

...etc.

$x \xleftrightarrow{o'} y = x$ es hermano de y

$x \xleftrightarrow{a'} y = x$ es primo hermano de y

$x \xleftrightarrow{b'} y = x$ es primo segundo de y

...etc.

Si aplicamos las leyes del agrupamiento VI, obtendremos (si m y m' son dos relaciones simétricas primarias o secundarias)[1]:

(61) $$(x \xleftrightarrow{m} y) + (y \xleftrightarrow{m} z) = \begin{cases} (x \xleftrightarrow{m} z) \text{ si } m > m' \\ (x \xleftrightarrow{m'} z) \text{ si } m' > m \end{cases}$$

y

(61 *bis*) $$(x \xleftrightarrow{m} y) + (y \xleftrightarrow{m'} z) = \begin{cases} (x \xleftrightarrow{m} z \text{ si } m = m' & \text{y ambas son primarias.} \\ (x \xleftrightarrow{m!} z \text{ si } m = m' & \text{y ambas son secundarias.} \end{cases}$$

La relación $m!$ significa en este último caso la primera relación primaria superior a m' ($\xleftrightarrow{a'} + \xleftrightarrow{a'} = b$): ver proposición (54).

1 La relación m puede ser secundaria tanto como primaria y la relación m' puede ser igualmente primaria tanto como secundaria.

Si multiplicamos ahora las relaciones asimétricas y las relaciones simétricas, obtenemos:

$x \overset{o'}{\longleftrightarrow} \downarrow^{a} y = x$ es hermano del padre de *y*, por lo tanto, tío de *y*.

$x \overset{a'}{\longleftrightarrow} \downarrow^{a} y = x$ es primo hermano del padre de *y*.

$x \overset{b'}{\longleftrightarrow} \downarrow^{a} y = x$ es primo segundo del padre de *y*.

. . . etc.

$x \overset{o'}{\longleftrightarrow} \downarrow^{b} y = x$ es hermano del abuelo de *y*, por lo tanto, tío abuelo de *y*.

. . . etc.

$x \downarrow^{a} \overset{a'}{\longleftrightarrow} y = x$ es padre del primo hermano de *y*.

$x \downarrow^{b} \overset{a'}{\longleftrightarrow} y = x$ es abuelo del primo hermano de *y*.

. . . etc.

$x \uparrow^{a} \overset{o'}{\longleftrightarrow} y = x$ es hijo del hermano de *y*, por lo tanto, sobrino de *y*.

$x \uparrow^{a} \overset{a'}{\longleftrightarrow} y = x$ es hijo del primo hermano de *y*.

. . . etc.

$x \overset{a'}{\longleftrightarrow} \uparrow^{a} y = x$ es primo hermano del hijo de *y*.

. . . etc.

Estas relaciones, engendradas en base a las leyes de formación (59) a (61), dan lugar a las siguientes composiciones. Conviene advertir en primer lugar, que las multiplicaciones que intervienen en el presente agrupamiento no son conmutativas, es decir que $\overset{m}{\longleftrightarrow} \downarrow^{g}$ no equivale a $\downarrow^{g} \overset{m}{\longleftrightarrow}$: "*x* es hermano del padre de *y*" (tío de *y*), no es idéntico a "*x* es padre del hermano de *y*" (*x* es padre de *y*). Es preciso considerar pues previamente las siguientes leyes de conversión:

(62) $$\left(x \overset{m}{\longleftrightarrow} \downarrow^{g} y\right) = \left(y \uparrow^{g} \overset{m}{\longleftrightarrow} x\right)$$

Ejemplo: *x* es hermano del padre de *y* (es decir, su tío) = *y* es hijo del hermano de *x* (es decir, su sobrino).

y (62 bis) $$\left(x \downarrow^{g} \overset{m}{\longleftrightarrow} y\right) = \left(y \overset{m}{\longleftrightarrow} \uparrow^{g} x\right)$$

Ejemplo: *x* es padre del primo hermano de *y* (es decir, su tío) = *y* es primo hermano del hijo de *x* (es decir, su sobrino).

Por otra parte, al ser la multiplicación constitutiva del agrupamiento de carácter co-unívoco y no bi-unívoco, la ley de transformación fundamental será la siguiente:

(63) $$\left(x \overset{m}{\longleftrightarrow} \downarrow^{g} y\right) = \left(x \downarrow^{g} \overset{mg}{\longleftrightarrow} y\right)$$

o (en virtud de 62 bis):

(63 *bis*) $$\left(x \overset{m}{\longleftrightarrow} \downarrow^{g} y\right) = \left(y \overset{mg}{\longleftrightarrow} \uparrow^{g} x\right)$$

fórmulas en las que el producto mg resulta de la tabla de correspondencias siguientes, determinadas por la proposición (60), con descomposición de las relaciones simétricas primarias en sus componentes secundarios (ver pág. 191). Esta tabla de correspondencias co-unívocas constituye pues, la expresión misma del agrupamiento [1] (proposiciones (60) y (62) reunidas).

Esta tabla se lee del siguiente modo. La primera línea horizontal (0) significa $\downarrow^{o} \times \uparrow^{o} = \overset{o}{\longleftrightarrow}$:el individuo x del cual se derivan las generaciones siguientes, es idéntico a sí mismo desde el doble punto de vista de la descendencia ($\downarrow^{o}$ y $\uparrow_{o}$) y del parentesco colateral ($\overset{o}{\longleftrightarrow}$). La segunda línea horizontal se lee:

$$\downarrow^{a} \times \uparrow^{a} = \overset{o}{\longleftrightarrow}, \overset{o'}{\longleftrightarrow} = \overset{a}{\longleftrightarrow}$$

y representa las únicas relaciones colaterales posibles entre individuos de una misma generación: la identidad ($\overset{o}{\longleftrightarrow}$), la relación de hermano ($\overset{o'}{\longleftrightarrow}$) y la de "hijo de un mismo padre" ($\overset{a}{\longleftrightarrow}$). La tercera línea horizontal se lee:

$$\downarrow^{b} \times \uparrow^{b} = \overset{o}{\longleftrightarrow} ; \overset{o'}{\longleftrightarrow} ; \overset{a'}{\longleftrightarrow} = \overset{b}{\longleftrightarrow}$$

y representa las relaciones colaterales posibles entre individuos de la segunda generación: $\overset{o}{\longleftrightarrow}$ (identidad), $\overset{o'}{\longleftrightarrow}$ (hermano), $\overset{a'}{\longleftrightarrow}$ (primo hermano) y $\overset{b}{\longleftrightarrow}$ (nieto de un mismo abuelo), etc.

1 Ch. Serrus, quien ha tomado de nosotros todas las fórmulas del presente agrupamiento, traduce esta tabla (Serrus, 1945, pág. 295) por números, lo que le quita todo interés respecto a sus conexiones con las demás estructuras intensivas.

Para determinar en la proposición (63) el producto mg, basta entonces considerar la relación $\overset{m}{\longleftrightarrow}$ como prolongando aditivamente la serie g, los valores de m y g están dados inmediatamente por la tabla. Esta adición $g + m$ se obtiene del siguiente modo:

La relación $\downarrow^{g}$ se expresará $\downarrow^{a}$ (padre) = diferencia de una línea horizontal a la siguiente: $\downarrow^{b}$ (abuelo) = diferencia de dos líneas; $\downarrow^{c}$ (bisabuelo) = diferencia de tres líneas, etc. El producto $\overset{b}{\longleftrightarrow}\downarrow^{a}$ significará que, partiendo de la línea $\overset{b}{\longleftrightarrow}$ (= tercera), se desciende de $\downarrow^{a}$ (ver las $\downarrow^{a}$ a la derecha de la tabla) a la línea $\overset{c}{\longleftrightarrow}$; el producto $\overset{b}{\longleftrightarrow}\downarrow^{b}$ significará que se desciende de $\overset{b}{\longleftrightarrow}$ a $\overset{d}{\longleftrightarrow}$; etc.

	$\overset{o}{\longleftrightarrow}$	$\overset{o'}{\longleftrightarrow}$	$\overset{a'}{\longleftrightarrow}$	$\overset{b'}{\longleftrightarrow}$	$\overset{c'}{\longleftrightarrow}$	$\overset{d'}{\longleftrightarrow}$	$\overset{e'}{\longleftrightarrow}$		$\overset{m}{\longleftrightarrow}$	
$\downarrow^{o}$	0							....	$= \overset{o}{\longleftrightarrow}$	$\downarrow^{o}$
$\downarrow^{a}$	0	0′						....	$= \overset{a}{\longleftrightarrow}$	$\downarrow^{a}$
$\downarrow^{b}$	0	0′	a'					....	$= \overset{b}{\longleftrightarrow}$	$\downarrow^{a}$
$\downarrow^{c}$	0	0′	a'	b'				....	$= \overset{c}{\longleftrightarrow}$	$\downarrow^{a}$
$\downarrow^{d}$	0	0′	a'	b'	c'			....	$= \overset{d}{\longleftrightarrow}$	$\downarrow^{a}$
$\downarrow^{e}$	0	0′	a'	b'	c'	d'		....	$= \overset{e}{\longleftrightarrow}$	$\downarrow^{a}$
$\downarrow^{f}$	0	0′	a'	b'	c'	d'	e',	....	$= \overset{f}{\longleftrightarrow}$	$\downarrow^{a}$
$\downarrow^{g}$		... etc.							etc.	$\downarrow^{g}$

En cuanto a las relaciones $\overset{m}{\longleftrightarrow}$, pueden ser primarias o secundarias. Si son primarias, el producto $\overset{m}{\longleftrightarrow}\downarrow^{g}$ está dado simplemente por la última relación (primaria) de la línea horizontal alcanzada por $\downarrow^{g}$ a partir de $\overset{m}{\longleftrightarrow}$. Por ejemplo $x \overset{b}{\longleftrightarrow}\downarrow^{a} y$ (= x es nieto del mismo abuelo que el padre de y) equivale a $x \downarrow^{a} \overset{c}{\longleftrightarrow} y$ (= x es padre del bisnieto del mismo bisabuelo que y), porque partiendo de la línea $\overset{b}{\longleftrightarrow}$ y descendiendo una línea ($\downarrow^{a}$), se llega a la línea $\overset{c}{\longleftrightarrow}$. Si $\overset{m}{\longleftrightarrow}$ es de orden secundario, lo que representa el caso más instructivo, entonces mg es la última relación secundaria de la serie aditiva $g + m$.

Por ejemplo, $x \overset{a'}{\longleftrightarrow} \cdot \big\downarrow^{b} y$ (= x es primo hermano del abuelo de y) nos da $x \big\downarrow^{b} \overset{c'}{\longleftrightarrow} y$ (= x es abuelo del primo en tercer grado de y), ya que partiendo de la línea $\overset{a'}{\longleftrightarrow}$ (la tercera) y descendiendo dos líneas ($\big\downarrow^{b}$), se llega a la línea $\overset{d}{\longleftrightarrow}$ en la cual la última relación secundaria es $\overset{c'}{\longleftrightarrow}$.

Es posible construir así la siguiente tabla de multiplicación, la cual la hemos extraído directamente de la tabla de correspondencias co-unívocas precedente:

$m \times g = mg$	$m \times g = mg$
—	—
$0 \times 0 = 0$	$0' \times 0 = 0'$
$a \times 0 = a$	$0' \times a = a'$
$b \times 0 = b$	$0' \times b = b'$
... etc.	$0' \times c = c'$
$0 \times a = a$	... etc.
$0 \times b = b$	$a' \times 0 = a'$
... etc.	$a' \times a = b'$
$a \times a = b$	$a' \times b = c'$
$a \times b = c$	$a' \times c = d'$
$a \times c = d$	... etc.
... etc.	$b' \times 0 = b'$
$b \times a = c$	$b' \times a = c'$
$c \times a = d$	$b' \times b = d'$
$d \times a = e$	$b' \times c = e'$
... etc.	... etc.
$b \times b = d$	$c' \times 0 = c'$
$b \times c = e$	$c^{\bullet} \times a = d'$
$b \times d = f$	$c' \times b = e'$
... etc.	... etc.
$c \times b = e$	$d' \times a = e'$
$c \times c = f$	$d' \times b = f'$
$c \times d = g$	$d' \times c = g'$
... etc.	... etc.

Inversamente se tendrá:

(64) $$\left(x \downarrow^{g} \xleftrightarrow{m} y\right) = \left(x \xleftrightarrow{m:g} \downarrow^{g} y\right)$$

o (en virtud de la proposición (62)):

(64 *bis*) $$\left(x \downarrow^{g} \xleftrightarrow{m} y\right) = \left(y \uparrow^{g} \xleftrightarrow{m:g} x\right)$$

Para determinar el cociente $m : g$, el valor de g debe sustraerse del de m conforme a la siguiente tabla:

$m : g$	$m : g$
$0 : 0 = 0$	$0' : 0 = 0'$
$0 : a = 0$	$0' : a = 0$
... etc.	... etc.
$a : 0 = a$	$a' : 0 = a'$
$a : a = 0$	$a' : a = 0'$
$a : b = 0$	$a' : b = 0$
... etc.	... etc.
$b : 0 = b$	$b' : 0 = b'$
$b : a = a$	$b' : a = a'$
$b : b = 0$	$b' : b = 0'$
... etc.	$b' : c = 0$
$c : 0 = c$	... etc.
$c : a = b$	$c' : 0 = c'$
$c : b = a$	$c' : a = b'$
$c : c = 0$	$c' : b = a'$
... etc.	$c' : c = 0'$
$d : 0 = d$	$c' : d = 0$
$d : a = c$	... etc.
$d : b = b$	
... etc.	

Ejemplo: **Si x es el abuelo $\left(\downarrow^{b}\right)$ del primo segundo $\left(\xleftrightarrow{b'}\right)$ de y, entonces es el hermano $\left(\xleftrightarrow{o'}\right)$ del abuelo $\left(\downarrow^{b}\right)$ de y, o sea:**

$$\left(x \downarrow^{b} \xleftrightarrow{b'} y\right) = \left(x \xleftrightarrow{o'} \downarrow^{b} y\right) = \left(y \downarrow^{b} \xleftrightarrow{o'} y\right)$$

porque $b' - b = 0'$.

En efecto, la operación $b' - b$ consiste en subir dos líneas $\left(\downarrow^{b}\right)$ a partir de la línea $\overset{b'}{\longleftrightarrow}$, lo que da $\overset{o'}{\longleftrightarrow}$.

Finalmente, si $m \leqslant g$, se tiene naturalmente:

(65) $$\left(x \downarrow^{g} \overset{m}{\longleftrightarrow} y\right) = \left(x \downarrow^{g} y\right)$$

Ejemplo: Si x es abuelo $\left(\downarrow^{b}\right)$ del hermano $\left(\overset{o'}{\longleftrightarrow}\right)$ de y, es también abuelo de y.

Estas transformaciones fundamentales (63) a (65) permiten entonces la composición de relaciones entre tres individuos cualesquiera. Se tiene en primer lugar, en virtud de (65):

(66) Si $m \leqslant g$ entonces $\left(x \downarrow^{g} y\right) \times \left(y \overset{m}{\longleftrightarrow} z\right) = \left(x \downarrow^{g} z\right)$

proposición que define la "familia" de orden g de x, es decir el conjunto que no sobrepasa, para cada generación $a \ldots g$, el parentesco $m = g$.

Por el contrario, si $m > g$, se tiene en virtud de (64):

(67) $$\left(x \downarrow^{g} y\right) \times \left(y \overset{m}{\longleftrightarrow} z\right) = \left(x \overset{m:g}{\longleftrightarrow} \downarrow^{g} z\right)$$

Ejemplo: Si x es el padre $\left(\downarrow^{a}\right)$ de y, e y es primo hermano $\left(\overset{a'}{\longleftrightarrow}\right)$ de z, entonces x es el hermano $\left(\overset{o'}{\longleftrightarrow} = a' : a\right)$ del padre $\left(\downarrow^{a}\right)$ de z.

Si se introduce una relación $\downarrow$ de más, se tendrá:

(68) $$\left(x \downarrow^{g} y\right) \times \left(y \overset{m}{\longleftrightarrow} \downarrow^{g'} z\right) = \left(x \overset{m:g}{\longleftrightarrow} \downarrow^{g+g'} z\right)$$

y si $m \leqslant g$, entonces

Ejemplo: Si x es padre $\left(\downarrow^{a}\right)$ de y, e y es primo hermano del abuelo de z $\left(y \overset{a'}{\longleftrightarrow} \downarrow^{b} z\right)$, entonces x es el hermano $\left(\overset{o'}{\longleftrightarrow} = a' : a\right)$ del bisabuelo $\left(\downarrow^{c} = a \times b\right)$ de z, o incluso (proposición 63) x es el bisabuelo del primo en tercer grado $\left(\downarrow^{c} \overset{c'}{\longleftrightarrow}\right)$ de z.

Igualmente, si $m > g$, se tiene:

(69) $$\left(x \downarrow^{g} \overset{m}{\longleftrightarrow} y\right) \times \left(y \downarrow^{g'} z\right) = \left(x \overset{m:g}{\longleftrightarrow} \downarrow^{g+g'} z\right)$$

y si $m \leqslant g$, entonces $\left(x \downarrow^{g+g'} z\right)$.

Ejemplo: Si x es padre $\left(\downarrow^{a}\right)$ del primo hermano $\left(\overset{a'}{\longleftrightarrow}\right)$ de y, e y es padre $\left(\downarrow^{a}\right)$ de z, entonces x es el hermano $\left(\overset{o'}{\longleftrightarrow} = a' : a\right)$ del abuelo $\left(\downarrow^{b} = a \times a\right)$ de z.

Luego, por composición de (68) y de (69):

(70) $$\left(x \downarrow^{g} \overset{m}{\longleftrightarrow} y\right) \times \left(y \downarrow^{g'} \overset{m'}{\longleftrightarrow} z\right) = \left(x \downarrow^{g+g'} z\right)$$

si $m \leqslant g$ y si $m' \leqslant (g + g')$.

Si estas dos condiciones no se cumplen simultáneamente, se tiene:

Si $m' < mg'$ entonces $\left(x \downarrow^{g+g'} \overset{mg'}{\longleftrightarrow} z\right)$

Si $m' > mg'$ entonces $\left(x \downarrow^{g+g'} \overset{m'}{\longleftrightarrow} z\right)$

y si $m' = mg'$ entonces $\left(x \downarrow^{g+g'} z\right)$

He aquí un ejemplo para $(m \leqslant g)$ y $(g + g') \geqslant m'$:

$$\left(x \downarrow^{c} \overset{a'}{\longleftrightarrow} y\right) \times \left(y \downarrow^{b} \overset{b'}{\longleftrightarrow} z\right) = \left(x \downarrow^{e} z\right)$$

y para $(m \leqslant g)$, pero $(g + g) < m'$:

$$\left(x \downarrow^{c} \overset{a'}{\longleftrightarrow} y\right) \times \left(y \downarrow^{a} \overset{d'}{\longleftrightarrow} z\right) = \left(x \downarrow^{d} \overset{d'}{\longleftrightarrow} z\right)$$

Igualmente se tiene:

(71) $$\left(x \overset{m}{\longleftrightarrow} \downarrow^{g} y\right) \times \left(y \overset{m'}{\longleftrightarrow} \downarrow^{g'} z\right) = \begin{cases} \text{si } m' < mg \text{ entonces } \left(x \overset{m}{\longleftrightarrow} \downarrow^{g+g'} z\right) \\ \text{si } m' > mg \text{ entonces } \left(x \overset{m':g}{\longleftrightarrow} \downarrow^{g+g'} z\right) \\ \text{si } m' = mg \text{ entonces } \left(x \overset{m!}{\longleftrightarrow} \downarrow^{g+g'} z\right) \end{cases}$$

donde $\overset{m!}{\longleftrightarrow}$ es la relación primaria más débil que abarca m, si m es de orden secundario.

Ejemplos $(m' < mg)$: si x es primo hermano del abuelo de y, e y es tío de z, entonces x es el primo hermano del bisabuelo de z:

sea $\left(x \overset{a'}{\longleftrightarrow} \downarrow^{b} y\right) \times \left(y \overset{o'}{\longleftrightarrow} \downarrow^{a} z\right) = \left(x \overset{a'}{\longleftrightarrow} \downarrow^{c} z\right)$.

Para $(m' > mg)$: sea $\left(x \overset{a'}{\longleftrightarrow} \downarrow^{a} y\right) \times \left(y \overset{c'}{\longleftrightarrow} \downarrow^{a} z\right) = \left(x \overset{b'}{\longleftrightarrow} \downarrow^{b} z\right)$.

Y para $(m' = mg)$: sea $\left(x \overset{a'}{\longleftrightarrow} \downarrow^{a} y\right) \times \left(y \overset{b'}{\longleftrightarrow} \downarrow^{a} z\right) = \left(x \overset{b}{\longleftrightarrow} \downarrow^{b} z\right)$, es decir que, x puede ser el abuelo de z, o su tío abuelo o el primo hermano de su abuelo: en efecto, $\left(x \overset{b}{\longleftrightarrow} \downarrow^{b} z\right)$ indica directamente que x tiene por su parte el mismo abuelo en los tres casos, pero su parentesco respecto de z permanece indeterminado, ya que se sabe solamente que x es el primo hermano del padre de y, y que y es primo en tercer grado del padre de z: el padre de z puede ser pues el hijo de x, su sobrino o el hijo de su primo hermano.

Tales son ((66) a (71)) las composiciones elementales del agrupamiento de multiplicaciones co-unívocas de relaciones. Estas composiciones en las que se constata su isomorfismo con el agrupamiento de la multiplicación co-unívoca de clases, pueden ser diferenciadas según todas las combinaciones posibles. Hemos dado antes[1] algunos ejemplos, en especial según las cuatro figuras:

$$(xy) \times (yz) = (xz);\ (xy) \times (xz) = (yz);\ (xy) \times (zy) = (xz) \text{ y}$$
$$(xy) \times (zx) = (yz)$$

que Ch. Serrus ha reproducido en su *Tratado*[2]. No es pues necesario volver a analizarlas aquí, ya que derivan todas de las transformaciones fundamentales (63) y (64) al aplicar a las relaciones asimétricas y simétricas sus reglas respectivas de adición.

Notemos solamente que, cuando las relaciones asimétricas son inversas, el cálculo es un poco más complicado. Veamos un ejemplo:

(72) $\left(x \overset{m}{\longleftrightarrow} \downarrow^{g} y\right) \times \left(y \uparrow^{g} \overset{m'}{\longleftrightarrow} z\right) =$

1 Piaget, 1942.
2 Serrus, 1945, págs. 292-313.

$$\text{para } g > g' \begin{cases} \text{si } (g - g') > (m' - m) \text{ entonces } \left(x \downarrow^{g-g'} \xleftrightarrow{m(g-g')} z\right) \\ \text{si } (g - g') < (m' - m) \text{ entonces } \left(x \downarrow^{g-g'} \xleftrightarrow{m'} z\right) \\ \text{si } (g - g') = (m' - m) \text{ entonces } \left(x \downarrow^{g-g'} \xleftrightarrow{m'!} z\right) \end{cases}$$

$$\text{para } g < g' \begin{cases} \text{si } (g' - g) > (m - m') \text{ entonces } \left(x \downarrow^{g'-g} \xleftrightarrow{m'} z\right) \\ \text{si } (g' - g) < (m - m') \text{ entonces } \left(x \downarrow^{g'-g} \xleftrightarrow{m(g'-g)} z\right) \\ \text{si } (g' - g) = (m - m') \text{ entonces } \left(x \downarrow^{g'-g} \xleftrightarrow{m'!} z\right) \end{cases}$$

$$\text{para } g = g' \begin{cases} \text{si } m > m' \text{ entonces } \left(x \xleftrightarrow{m} z\right) \\ \text{si } m < m' \text{ entonces } \left(x \xleftrightarrow{m'} z\right) \\ \text{si } m = m' \text{ entonces } \left(x \xleftrightarrow{m!} z\right) \end{cases}$$

La *asociatividad* presenta en este agrupamiento un interés particular, ya que se manifiesta allí de modo más visible que en los demás agrupamientos su función propia: alcanzar el mismo punto de llegada por caminos distintos, y especialmente por "rodeos" más o menos grandes. Así, por ejemplo:

$$(\alpha) = \left(x \xleftrightarrow{o'} \downarrow^{b} y\right); (\beta) = \left(y \xleftrightarrow{a'} \downarrow^{c} z_1\right); \qquad \text{y} \qquad (\gamma) = \left(z_1 \xleftrightarrow{b'} \downarrow^{d} z_2\right)$$

Así, si se componen $(\alpha \times \beta)$ aparte, luego $(\alpha \times \beta)$ con (γ), o bien (α) aparte y $(\beta \times \gamma)$ por otra parte, se obtendrá el mismo producto final $(x \xleftrightarrow{o'} \downarrow^{i} z_2)$, pero por caminos diferentes: en efecto, $(\alpha \times \beta)$ da $(x \xleftrightarrow{o'} \downarrow^{e} z_1)$ y $(\beta \times \gamma)$ da $(y \xleftrightarrow{a'} \downarrow^{g} z)$. Sin embargo, la primera de estas dos expresiones multiplicada por (γ) da el mismo producto que la segunda multiplicada por (α).

Las *idénticas especiales* se dan naturalmente conforme a la regla habitual. En cuanto a la *idéntica general*, resulta como se recordará, en los agrupamientos multiplicativos de clases, de la operación de abstraer una clase de sí misma, es decir de suprimirla en tanto encaje, permaneciendo sus elementos referidos a la clase más general del siste-

ma. Igualmente abstraer una serie de relaciones $(x \downarrow^{g} y)$ de sí misma consistirá en suprimir las relaciones entre los términos, pero conservándolos en tanto términos de cualquier otra relación posible:

$$\left(x \downarrow^{g} y\right) : \left(x \downarrow^{g} y\right) = \left(x \downarrow^{o} y\right)$$

Este agrupamiento de la multiplicación co-unívoca de relaciones resulta así el más rico de los agrupamientos "intensivos" examinados hasta aquí. Podría preguntarse si esta fecundidad no revela la existencia de un fondo numérico que engendraría las relaciones en juego, ya que las generaciones pueden ser consideradas como unidades sucesivas que se reencuentran en los grados de parentescos colaterales. Ciertamente, es fácil enumerar las generaciones como dichos grados, pero es preciso aclarar que nada nos obliga a ello, y que el encaje de las relaciones secundarias $\overset{o'}{\longleftrightarrow}$; $\overset{a'}{\longleftrightarrow}$; $\overset{b'}{\longleftrightarrow}$ etc., en las relaciones primarias $\overset{a}{\longleftrightarrow}$; $\overset{b}{\longleftrightarrow}$; $\overset{c}{\longleftrightarrow}$ en función de las relaciones asimétricas $\downarrow^{a}$; $\downarrow^{b}$; $\downarrow^{c}$; etc., basta para expresar de la manera más precisa y más completa, el conjunto de relaciones que intervienen en un sistema de filiaciones. Ahora bien, como dicho sistema es isomorfo al agrupamiento de multiplicaciones co-unívocas de clases, y como este último traduce la estructura de toda clasificación completa, se ve que la existencia del presente agrupamiento constituye la mejor verificación que permite establecer el carácter a la vez natural y elemental del mecanismo operatorio de los agrupamientos.

§ 21. EL AGRUPAMIENTO VIII: LA MULTIPLICACION BI-UNIVOCA DE RELACIONES Y LAS RELACIONES DE EQUIVALENCIA MULTIPLICATIVA (CORRESPONDENCIAS BI-UNIVOCAS).

Al agrupamiento (IV) de la multiplicación bi-unívoca de clases corresponde finalmente un agrupamiento multiplicativo de relaciones,

que al igual que el agrupamiento VII, concierne tanto a las relaciones simétricas como asimétricas simultáneamente: constituye tablas de doble (o triple, etc.) entrada, una de las entradas estará ocupada por una seriación (agrupamiento V), mientras que la otra lo está, ya sea por una segunda seriación, o bien por un sistema de relaciones simétricas (correspondencias), o por ambas a la vez.

Se trata de distribuir un conjunto de objetos según su peso y su volumen simultáneamente, sin poseer ningún dato métrico. Para los pesos, no se dispondrá así más que de estimaciones cualitativas (perceptivas) en (+), en (=) y en (−). Para el volumen, se sumergirán sucesivamente los objetos en un recipiente con agua juzgando por lo tanto su resultado en (+) en (=) y en (−), todas las comparaciones de los pesos y de los volúmenes se efectuarán por cuplas. Se tendrá así la posibilidad de seriar los objetos según una serie de relaciones asimétricas transitivas que expresarán las diferencias entre los pesos: $x_0 \xrightarrow{a} x_1 \xrightarrow{a'} x_2 \xrightarrow{b'} x_3$, etc., y de construir una serie semejante para los volúmenes. Se podrá igualmente establecer equivalencias $x \xleftrightarrow{a} y$ ó $x \xleftrightarrow{b} y$, etc., según los diversos pesos o volúmenes que se constaten iguales. Pero no se tendrá, por hipótesis, ningún medio de igualar las diferencias $\xrightarrow{a} = \xrightarrow{a'} = \xrightarrow{b'} = \ldots$, es decir de construir una unidad métrica $\xrightarrow{a} = a$ tal que $b = 2a$, $c = 3a$, etc. No se podrá tampoco graduar las diferencias según un orden creciente $(\xrightarrow{a}) < (\xrightarrow{a'}) < (\xrightarrow{b'}) \ldots$, etc., o decreciente. No se dispondrá por lo tanto de ninguna cuantificación extensiva, encontrándose en presencia de las solas relaciones intensivas basadas en los encajes de las diferencias positivas (agrupamiento V) o nulas (agrupamiento VI). ¿Cómo comparar entonces todos los objetos desde el doble punto de vista de los pesos y de los volúmenes, es decir cómo construir un agrupamiento multiplicativo con esas dos series de relaciones?

El único método consistirá en construir una tabla de doble entrada que combine los dos tipos de diferencias y de equivalencias. Se comenzará por construir las clases de equivalencias que contengan objetos del mismo peso o del mismo volumen. Supondremos que no existen dos objetos del mismo peso y del mismo volumen a la vez, pero que puede haber entre ellos equivalencia según una u otra cualidad. En ese caso, los objetos de peso equivalente se seriarán según el volumen y *viceversa*. Llamaremos así A_1 una clase de objetos del mismo peso; A'_1 una clase de objetos del mismo peso igualmente, pero

más pesados que los A_1; B'_1 una clase de objetos más pesados aún, pero de igual peso entre sí, etc. Llamaremos por otra parte A_2; A'_2; B'_2; etc., las clases de objetos de volumen creciente de una clase a la otra, pero de igual volumen en el interior de cada clase. Podemos construir entonces por medio de estas clases una tabla de doble entrada del tipo de las del agrupamiento IV (ver fig. 9, p. 148); pero con la diferencia de que cada intersección A_1A_2; A'_1A_2; $A_1A'_2$; etc., estará constituida por una clase singular.

La figura 16 representa las clases singulares de esta tabla de doble entrada por un conjunto de rectángulos: cada línea horizontal está ocupada así por una serie de objetos del mismo volumen pero de peso

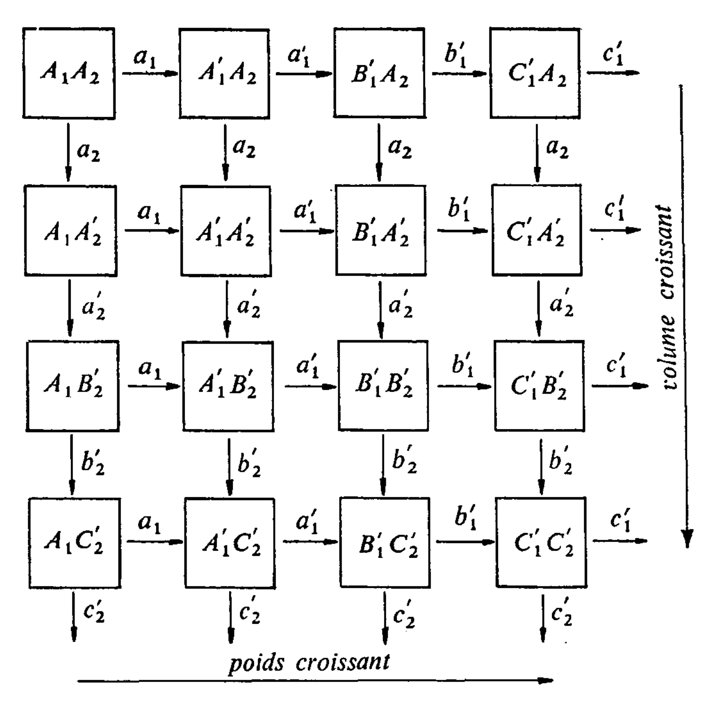


Fig. 16.

creciente, y cada columna vertical lo está por una serie de objetos de igual peso pero de volumen creciente. Resulta fácil entonces reunir estos objetos a través de un doble sistema de relaciones asimétricas que expresan simultáneamente las diferencias de peso y de volumen. Para

una misma clase A_2 que contiene objetos de igual volumen, se tendrá en efecto, la siguiente seriación de los pesos (sin tener en cuenta el **0**):

$$(73) \quad (A_1A_2) \overset{a_1}{\rightarrow} (A'_1A_2) \overset{a'_1}{\rightarrow} (B'_1A_2) \overset{b'_1}{\rightarrow} (C'_1A_2) \overset{c'_1}{\rightarrow} (D'_1A_2) \overset{d'_1}{\rightarrow} \ldots \text{etc.}$$

Estas relaciones serán las mismas entre los términos de la clase A'_2 ó de la clase B'_2, etc., las cuales no difieren sino por el volumen. Recíprocamente, para una clase A_1 que contenga objetos de igual peso, se tendrá la siguiente seriación de los volúmenes (esta serie es vertical en la figura 16):

$$(74) \qquad (A_1A_2) \overset{a_2}{\rightarrow} (A_1A'_2) \overset{a'_2}{\rightarrow} (A_1B'_2) \overset{b'_2}{\rightarrow} (A_1C'_2) \overset{c'_2}{\rightarrow} \ldots \text{etc.}$$

Estas relaciones $\downarrow^{a_2}$; $\downarrow^{a'_2}$; $\downarrow^{b'_2}$; etc., se reencontrarán entre los términos de las clases A_1, B'_1, C'_1, etc., las que difieren sólo en el peso.

Si extraemos ahora de la figura 16 las relaciones (73) y (74), encontramos un sistema de relaciones distribuidos como en la tabla que aparece en esta página. Son estas relaciones las que constituyen el agrupamiento VIII: se constata que las mismas expresan una doble seriación de diferencias, pero repitiéndose entre varias series distintas de objetos, las cuales permanecen pues parcialmente equivalentes. Notemos a propósito de esto, que si ciertos elementos faltasen en la tabla de la figura 16, es decir, si no existiesen series correspondientes de pesos iguales y volúmenes iguales, la comparación con las demás series sería imposible; más precisamente, es necesario, para poder hacerlo, suponer la existencia lógica de términos medios semejantes entre sí desde el punto de vista de alguna de las cualidades en cuestión, existan o no empíricamente. Sólo una cuantificación extensiva (una relación métrica o una proporción entre los pesos y los volúmenes) permitiría evitar dicha limitación, pero refiriéndose implícitamente a una medida común. A falta de ello, es preciso pasar por la igualdad cualitativa: por ejemplo, Aristóteles al ignorar la manera de medir la velocidad, se limitó a definirla diciendo que, de dos móviles, el más rápido sería o bien el que llegase más

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdot & \overset{a_1}{\longrightarrow} & \cdot & \overset{a'_1}{\longrightarrow} & \cdot & \overset{b'_1}{\longrightarrow} & \cdots \\
\downarrow^{a_2} & & \downarrow^{a_2} & & \downarrow^{a_2} & & \downarrow^{a_2} \\
\cdot & \overset{a_1}{\longrightarrow} & \cdot & \overset{a'_1}{\longrightarrow} & \cdot & \overset{b'_1}{\longrightarrow} & \cdots \\
\downarrow^{a'_2} & & \downarrow^{a'_2} & & \downarrow^{a'_2} & & \downarrow^{a'_2} \\
\cdot & \overset{a_1}{\longrightarrow} & \cdot & \overset{a'_1}{\longrightarrow} & \cdot & \overset{b'_1}{\longrightarrow} & \cdots \\
\downarrow^{b'_2} & & \downarrow^{b'_2} & & \downarrow^{b'_2} & & \downarrow^{b'_2} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

lejos a tiempos iguales, o bien el que recorriese en menos tiempo espacios iguales; hay allí un buen ejemplo de operación intensiva que se deriva del presente agrupamiento y que se basa sobre una organización de los datos análoga a la de las tablas precedentes. En la tabla de la figura 16 puede decirse igualmente que el más denso de dos objetos es aquél que, a pesos iguales, tenga menor volumen, o bien aquél que, a igual volumen, posea mayor peso; pero no se puede afirmar nada más, a falta precisamente de una cuantificación extensiva o métrica.

Aclarado esto, podemos afirmar que el agrupamiento VIII reúne en un sólo sistema tres tipos de operaciones: la multiplicación de dos seriaciones una por otra (operación que puede continuarse con nuevas seriaciones); la adición de nuevas relaciones asimétricas según cada una de las series consideradas (doble o triple entrada, etc.) y la puesta en correspondencia según relaciones simétricas de equivalencia multiplicativa (correspondencia bi-unívoca y recíproca).

I. **La multiplicación de las series.** — Acabamos de constatar que la multiplicación de dos seriaciones constituye una tabla de doble entrada. Se podría igualmente, multiplicar estas dos seriaciones por una tercera (color, etc.) y construir así una tabla de triple entrada, etc. Limitémonos ahora a las dos relaciones consideradas.

1. La *operación directa* será pues la multiplicación de las relaciones $\xrightarrow{a_1}$; $\xrightarrow{a'_1}$; $\xrightarrow{b'_1}$; que simbolizaremos bajo la forma $\xleftrightarrow{a_1 \cdots z_1}$, por las relaciones $\downarrow^{a_2}$; $\downarrow^{a'_2}$; $\downarrow^{b'_2}$; etc., que simbolizaremos bajo la forma $\left|\begin{smallmatrix} a_2 \\ \vdots \\ z_2 \end{smallmatrix}\right\downarrow$. Se tendrá pues:

$$(75) \qquad \left(\xrightarrow{a_1 \ldots z_1}\right) \times \left(\left|\begin{matrix} a_2 \\ \vdots \\ z_2 \end{matrix}\right.\downarrow\right) = \left(\xrightarrow{a_1 \ldots z_1} \left|\begin{matrix} a_2 \\ \vdots \\ z_2 \end{matrix}\right.\downarrow\right)$$

Esta fórmula expresa pues simplemente, de manera abreviada, todo el conjunto de relaciones detalladas en la figura 16.

2. La *operación inversa* será la abstracción:

$$(76) \qquad \left(\xrightarrow{a_1 \ldots z_1} \left|\begin{matrix} a_2 \\ \vdots \\ z_2 \end{matrix}\right.\downarrow\right) : \left(\left|\begin{matrix} a_2 \\ \vdots \\ z_2 \end{matrix}\right.\downarrow\right) = \xrightarrow{a_1 \ldots z_1} \quad \text{ó} \quad \left(\xrightarrow{a_1 \ldots z_1}\right) : \left(\xrightarrow{a_1 \ldots z_1}\right) = \left(\xrightarrow{o}\right)$$

que significa: si en una tabla como la de la figura 16, donde se hallan agrupadas las relaciones de peso y de volumen, se hace abstracción de las relaciones de volumen, no pueden considerarse sino las relaciones de peso. Más aún, si luego de haber seriado los objetos según sus pesos, se hace abstracción de esas diferencias de peso, no queda sino considerar los objetos mismos, independientemente de sus diferencias ($\overset{o}{\rightarrow}$).

3. La *idéntica general* será pues la ausencia de relación y las *idénticas especiales*, así como la *asociatividad* se dan de modo similar a como aparecen en los demás agrupamientos.

II. **Encadenamientos múltiples.** — Si de estas composiciones generales pasamos ahora al detalle de las multiplicaciones entre relaciones elementales, procederemos como lo hemos hecho a propósito del agrupamiento VII, pero con la considerable simplificación que significa el modo multiplicativo bi-unívoco.

Sean así dos términos x e y (elegidos en la figura 16, por ejemplo A_1A_2 y C'_1A_2) que diferen entre sí por su peso según una diferencia ($x \overset{c_1}{\rightarrow} y$). La relación $\overset{c_1}{\rightarrow}$ resulta, como en el agrupamiento V, de la adición de las diferencias: $\overset{a_1}{\rightarrow} + \overset{a'_1}{\rightarrow} + \overset{b'_1}{\rightarrow} = \overset{b_1}{\rightarrow}$. Sean por otra parte, dos términos y y z de igual peso pero que difieren en el volumen según la relación $\downarrow^{a_2}$ (por ejemplo C'_1A_2 y $C'_1A'_2$). Podemos pues componer estas dos relaciones según la relación multiplicativa:

$$(77) \qquad \left(x \overset{c_1}{\rightarrow} y\right) \times \left(y \downarrow^{a_2} z\right) = \left(x \overset{c_1}{\rightarrow} \downarrow^{a_2} z\right)$$

"Si x es más liviano que y (de un valor $\overset{c_1}{\rightarrow}$) pese a tener el mismo volumen, y si y tiene el mismo peso que z, pero es menos voluminoso (de $\downarrow^{a_2}$), entonces z es a la vez más pesado y más voluminoso que x (según las diferencias concurrentes $\overset{c_1}{\rightarrow}$ y $\downarrow^{a_2}$)".

El significado de esta operación (77) es pues que es posible comparar cualquier elemento de una tabla de doble entrada (fig. 16)

con cualquier otro desde el doble punto de vista del peso y del volumen. Puede entonces componerse dos productos entre sí:

$$(78) \qquad \left(x \xrightarrow{r_1} \downarrow^{r_2} y\right) \times \left(y \xrightarrow{r'_1} \downarrow^{r'_2} z\right) = \left(x \xrightarrow{r_1+r'_1} \downarrow^{r_2+r'_2} z\right)$$

y

$$(78\ bis) \qquad \left(x \xrightarrow{r_1} \downarrow^{r_2} y\right) \times \left(y \xleftarrow{r'_1} \uparrow^{r'_2} z\right) = \left(x \xrightarrow{r_1-r'_1} \downarrow^{r_2-r'_2} z\right)$$

Ejemplo: Si x ($= A_1 A_2$, fig. 16) es a la vez menos pesado y más voluminoso que y ($= B'_1 A'_2$) de una diferencia $\xrightarrow{b_1} \downarrow^{a_2}$ y además y ($= B'_1 A'_2$) es a la vez menos pesado y menos voluminoso que z ($= C'_1 B'_2$) de una diferencia $\xrightarrow{b'_1} \downarrow^{a'_2}$ entonces z es a la vez más pesado y más voluminoso que x, según una diferencia $\xrightarrow{c_1} \downarrow^{b_2}$.

La adición de relaciones asimétricas (encadenamiento simple o seriación: agrupamiento V) no es conmutativa, como acabamos de verlo en el § 18, al igual que la multiplicación co-unívoca. Por el contrario, la multiplicación bi-unívoca presenta una conmutatividad de hecho, debida a la identidad del punto de llegada, ya que las relaciones siguen caminos distintos pero correspondientes. En la figura 16, el término A_1A_2 se relaciona con los términos $C'_1C'_2$ por las dos relaciones de equivalencias $\xrightarrow{c_1} \downarrow^{c_2}$(pasando por C'_1A_2)ó $\downarrow^{c_2} \xrightarrow{c_1}$(pasando por $A_1A'_2$). Se tiene pues, de un modo general:

$$(79) \qquad \left(x \downarrow^{r_2} \xrightarrow{r_1} y\right) = \left(x \xrightarrow{r_1} \downarrow^{r_2} y\right) \quad \text{y} \quad \left(x \downarrow^{r_2} \xrightarrow{r_1} y\right) = \left(x \xrightarrow{r_1} \downarrow^{r_2} y\right)$$

o:

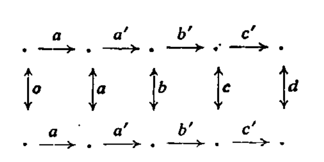
$$\left(x \downarrow^{r_2} \xleftarrow{r_1} y\right) = \left(x \xleftarrow{r_1} \downarrow^{r_2} y\right)$$

Es esta ley de transformación (79) la que simplifica notablemente las composiciones del presente agrupamiento, en oposición a las del agrupamiento VII.

III. Correspondencias bi-unívocas y equivalencias multiplicativas. — El significado más general de este agrupamiento es el de fundamentar, en isomorfismo con el agrupamiento IV, esa operación esencial del espíritu que es la correspondencia bi-unívoca y recíproca.

En una tabla de doble entrada, cada línea horizontal corresponde bi-unívocamente a la siguiente, así como cada columna vertical corresponde igualmente a la siguiente. Cada término es, en efecto, equivalente a su correspondiente desde el punto de vista de una de las relaciones consideradas (A_1A_2 equivalente a $A_1A'_2$ desde el punto de vista A_1, es decir que tiene el mismo peso $\xleftrightarrow{o_1}$): si no fuera así, no podría construirse una tabla de doble entrada, ya que al ser todos los términos distintos desde el punto de vista de la misma cualidad, formarían una serie única y no se podrían multiplicar una por otra las dos series así constituidas. Por otra parte, al mismo tiempo que constituye un conjunto de multiplicaciones entre relaciones asimétricas que caracterizan dos o más tipos de diferencias distintas (por ejemplo, peso y volumen), el presente agrupamiento expresa también una serie de multiplicaciones entre relaciones asimétricas de diferencias ordenadas y relaciones simétricas de correspondencias bi-unívocas y recíprocas, es decir, de equivalencias; pero estas diferencias y equivalencias se refieren sólo a una y la misma cualidad. Si $\xrightarrow{a}$; $\xrightarrow{a'}$; $\xrightarrow{b'}$; etc., son diferencias progresivas entre los pesos de los objetos A_2A_1; $A_2A'_1$; A_2B_1; etc., de la figura 16, estas diferencias se reencuentran entre los objetos A'_2A_1; $A'_2A'_1$; $A'_2B'_1$; etc., y existe entonces entre los objetos correspondientes (A_2A_1 y A'_2A_1; etc.) relaciones de equivalencia que traducen la correspondencia bi-unívoca y recíproca; estas equivalencias expresan por sí mismas la igualdad entre los pesos $\xleftrightarrow{o}$ (igualdad del punto de partida), $\xleftrightarrow{a}$ (igualdad entre valores superiores al de partida), (igualdad entre valores superiores a los precedentes, etc.):

De modo general, se puede caracterizar la correspondencia bi-unívoca y recíproca como una multiplicación lógica entre una serie de diferencias y una serie de equivalencias. Las diferencias pueden estar representadas por alteridades (ver agrupamiento VI) o por diferencias ordenadas (pero incluso en el primer caso, las alteridades mismas dependen de las inclusiones de clases, es decir, de relaciones asimétricas parcialmente ordenadas). En ambos casos, la operación de poner en correspondencia constituye una de las operaciones más primitivas del espíritu. Por ejemplo, cuando un niño copia un rostro, hace corresponder a cada parte del modelo una parte semejante en su dibujo (hay pues correspondencia entre



clases, basada en el agrupamiento IV: una nariz por una nariz, una frente por una frente, etc.); cuando copia una serie ordenada, como por ejemplo una torre de cubos de tamaños decrecientes, establece una correspondencia basada en el presente agrupamiento.

Es pues esencial para la teoría lógica de la correspondencia, comprender que las operaciones de los agrupamientos IV y VIII (así como también las de los agrupamientos III y VII) no implican por sí mismas el número, ni tampoco la igualdad de potencia. La diferencia entre ambos tipos de estructuras se refiere al modo en que son puestos en correspondencia los elementos. En el caso de la correspondencia lógica, la equivalencia entre los términos correspondientes se basa exclusivamente en la relación de parte a todo. En el agrupamiento IV por ejemplo, dos términos se corresponden porque constituyen una misma clase cualificada (así por ejemplo, las aletas de los peces corresponden a los miembros anteriores de los mamíferos porque ambos pertenecen a una misma clase, la cintura escapular, pero no corresponden a los miembros posteriores puesto que no presentan los mismos caracteres cualitativos). En el caso del agrupamiento VIII, la correspondencia se basa en una equivalencia de cualidades. En ambos casos, la equivalencia expresa pues cierto encaje de la parte en el todo (las clases parciales en la clase total, o las relaciones $\overset{o}{\longleftrightarrow}$; $\overset{a}{\longleftrightarrow}$; $\overset{b}{\longleftrightarrow}$; etc., en relación a $\overset{a}{\rightarrow}$; $\overset{b}{\rightarrow}$; etc.). Por el contrario, una correspondencia bi-unívoca entre dos conjuntos asegura su equipotencia (o igualdad numérica) haciendo corresponder un elemento *cualquiera* de uno con un elemento cualquiera del otro, independientemente de toda cualidad, lo que equivale a transformar los elementos en "unidades" y a establecer así relaciones entre las partes sin pasar por el todo.

Desde el punto de vista exclusivamente lógico (por lo tanto intensivo), conviene distinguir además los dos tipos de equivalencias que hemos encontrado hasta aquí: las *equivalencias simples* o *aditivas* y las *correspondencias* o *equivalencias multiplicativas.*

Contrariamente a lo que ocurre con la igualdad numérica o equipotencia, la equivalencia lógica no es jamás, salvo el caso de la identidad misma, más que una igualdad limitada, subordinada siempre a cierto punto de vista. Así, la equivalencia simple o aditiva no expresa (ver § 8 y definiciones 16 y 25) más que la sustitución posible entre dos términos cualificados (individuos o clases), pero desde el único punto

de vista de la cualidad considerada. La equivalencia lógica simple constituye pues, por su misma naturaleza, una co-pertenencia o una *co-inclusión:*

$$x_1 \overset{a}{\longleftrightarrow} x_2\ ;\quad x_1 \overset{b}{\longleftrightarrow} x_3\ ;\ \text{etc. ó}\quad A \overset{B}{\longleftrightarrow} A'\ ;\quad B \overset{C}{\longleftrightarrow} B';\ \text{etc.}$$

Pero sería contradictorio escribir $B \overset{B}{\longleftrightarrow} B'$, ya que las clases B y B' no podrían ser equivalentes desde el punto de vista B solo, ya que B' no está incluida en B. Igualmente sería absurdo escribir $A \overset{C}{\longleftrightarrow} B$ ó $B \overset{D}{\longleftrightarrow} C$, puesto que A está incluida en B y B en C: no podría haber, en efecto, equivalencias entre clases en las que una está incluida en la otra, ya que la relación que las une es una relación asimétrica de inclusión. Por el contrario, se tiene $A \overset{C}{\longleftrightarrow} B'$ ó $A \overset{D}{\longleftrightarrow} C'$, etc.

El criterio de la equivalencia aditiva es pues la vicariancia (ver § 13). Es por ello que dos relaciones asimétricas elementales como $\overset{a}{\rightarrow}$ y $\overset{a'}{\rightarrow}$ no podrían considerarse como equivalentes, pese a que se tenga $\overset{a}{\rightarrow} + \overset{\prime}{\rightarrow} = \overset{b}{\rightarrow}$. En efecto, ambas relaciones no podrían permutarse según la operación de vicariancia, a falta precisamente de simetría. Por el contrario, si bien la equivalencia aditiva o co-inclusión no posee ningún significado en el dominio de las relaciones asimétricas, la identidad o auto-equivalencia se halla no obstante representada:

(80) $$(\overset{a}{\rightarrow}) \overset{o}{\longleftrightarrow} (\overset{a}{\rightarrow}) \quad \text{ó} \quad \overset{a}{\rightarrow} = \overset{a}{\rightarrow}\ ; \quad \text{y} \quad (\overset{a}{\rightarrow} + \overset{a'}{\rightarrow}) \overset{o}{\longleftrightarrow} (\overset{b}{\rightarrow})$$

es decir:

$$(\overset{a}{\rightarrow} + \overset{a'}{\rightarrow}) = (\overset{b}{\rightarrow})$$

porque la diferencia nula es nuevamente simétrica.

Notemos aún que lo contrario de la equivalencia aditiva ($\overset{a}{\longleftrightarrow}$) no es la diferencia asimétrica, sino la alteridad $\overset{a'}{\longleftrightarrow}$ (y en el caso límite $\overset{\bar{a}}{\longleftrightarrow}$), es decir la no-equivalencia o diferencia recíproca (definiciones 26 y 27) que corresponden a una relación simétrica entre los intervalos y no a la diferencia ordenada u orientada ($\overset{a}{\rightarrow}$).

En cuanto a las correspondencias bi-unívocas intensivas o equivalencias lógicas multiplicativas, dos diferencias las oponen a las equivalencias simples o aditivas. En primer lugar una clase A_1 corresponde a una clase A'_1 si A_1 está distribuida en:

$$A_1A_2 + A_1A'_2 + A_1B'_2 \ldots$$

y si A'_1 está igualmente distribuida en:

$$A'_1A_2 + A'_1A'_2 + A'_1B'_2 \ldots$$

(los tipos A_2, A'_2 y B'_2 de los órganos de los batracios A_1 corresponden a los tipos A_2, A'_2 y B'_2 de los órganos de los reptiles A'_1). Esta correspondencia se basa pues en una especie de co-inclusión de A_1 y A'_1 en $B_1 C_2$ (en el producto total de $A_1 + A'_1$ por $A_2 + A'_2 + B'_2$), pero esta co-inclusión presenta una estructura especial que se podría llamar *co-distribución*. En efecto, según la ley de distributividad propia de la multiplicación, se tiene:

$$(A_1 + A'_1) \times C_2 = A_1C_2 + A'_1C_2 \quad (81)$$

de donde resulta:

$$A_1C_2 \ \text{«}\xrightarrow{B_1C_2}\text{»} \ A'_1C_2$$ [1]

La equivalencia por correspondencia constituye pues una *equidistribución.*

En segundo lugar, y sobre todo, hemos visto que dos clases primarias de rango diferente, por ejemplo, *A* y *B*, no son equivalentes en *B* ni en *C*, etc., puesto que *A* está incluida en *B* (relación asimétrica de inclusión). Ahora bien, el gran interés de la equivalencia multiplicativa, o correspondencia lógica, es que la parte A_1C_2 de la clase multiplicativa total B_1C_2 corresponde al todo. Por ejemplo, aquellos órganos de los batracios que corresponden clase a clase a los órganos de los peces, de los reptiles, etc., corresponden por la misma razón, a los órganos comunes de los vertebrados en general, si bien los órganos de los batracios $(A_1 C_2)$ no constituyen sino una sub-clase de los órganos de los vertebrados (E_1C_2):

$$A_1C_2 \ \text{«}\xrightarrow{E_1C_2}\text{»} \ E_1C_2 \quad (82)$$

1 $\longleftrightarrow$ representa pues una equivalencia aditiva y «——» una equivalencia multiplicativa.

La razón de esta diferencia entre ambos tipos de equivalencias es clara. En el caso de la equivalencia aditiva o co-inclusión, no podría haber equivalencia mas que entre clases del mismo rango, ya que la clase de rango inferior se reabsorbe en la de rango superior: la adición reúne así la parte al todo dejando de lado las diferencias propias de las partes, lo que impide así toda equivalencia entre el todo absorbente y la parte absorbida, siempre que se defina la equivalencia por la vicariancia o la co-inclusión.

Por el contrario, en las relaciones multiplicativas, la clase de rango inferior absorbe la clase superior y la multiplicación atribuye así a las partes las cualidades del todo: las partes corresponden en este caso necesariamente al todo, ya que la multiplicación (absorbente) expresa sus cualidades comunes.

Por otra parte, toda equivalencia aditiva puede expresarse bajo la forma de una equivalencia multiplicativa:

$$(83) \qquad (A \overset{B}{\longleftrightarrow} A') = AB \overset{B}{\text{«}\!\longrightarrow\!\text{»}} A'B$$

Pero, en virtud de lo anterior, la recíproca no es válida más que para las clases del mismo rango.

Finalmente, además de la correspondencia entre individuos o clases, puede distinguirse una correspondencia entre las relaciones como tales, simétricas o asimétricas. Esta correspondencia, llamada en general *similitud* (lógica, por oposición a geométrica, etc.) es una forma de equidistribución, pero que presenta, en el caso de las relaciones asimétricas, la particularidad de poder conservar el orden. Se tendrá así, por ejemplo (si nos remitimos a la figura 16, p. 200):

$$(84) \qquad \left[(A_1A_2) \overset{a_1}{\rightarrow} (A'_1A_2)\right] \overset{a_2}{\text{«}\!\dashrightarrow\!\text{»}} \left[(A_1A'_2) \overset{a_1}{\rightarrow} (A'_1A'_2)\right]$$

porque:

$$\left(A_1A_2 \overset{a_1}{\rightarrow} A'_1A_2\right) \times \left(A'_1A_2 \downarrow^{a_2} A'_1A'_2\right) = \left(A_1A_2 \downarrow^{a_2} A_1A'_2\right) \times \left(A_1A'_2 \overset{a_1}{\rightarrow} A_1A'_2\right)$$

De una manera general, se tiene:

(85) $\left(x_1 \xrightarrow{r_1} y_1\right) \text{«—»} \left(x_2 \xrightarrow{r_2} y_2\right)$ si $\left(x_1 \xrightarrow{r_1} y_1\right) = \left(x_1 \downarrow^{s} \xrightarrow{r_2} \uparrow^{s} y_1\right)$

lo que constituye la fórmula lógica de la similitud (ver figura 17) [1].

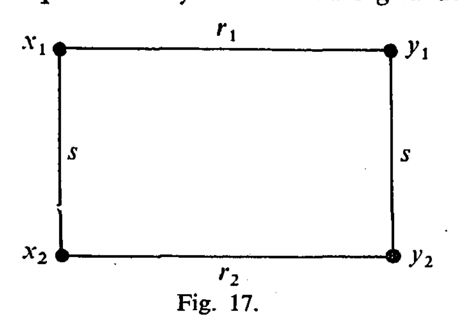


Fig. 17.

En síntesis, si bien es menos rico en combinaciones que el agrupamiento de la multiplicación co-unívoca de relaciones, el agrupamiento VIII presenta no obstante una importancia teórica fundamental, en tanto fundamento de las correspondencias bi-unívocas o equivalencias multiplicativas.

§ 22. CONCLUSIONES: EQUIVALENCIAS Y DIFERENCIAS; EL PROBLEMA DEL AGRUPAMIENTO UNICO.

Para concluir, se tratará ahora de extraer la estructura del sistema simple y coherente constituido por los ocho agrupamientos posibles de clases y de relaciones.

Como hemos visto ya (§ 11), el número 8 se debía a una triple dicotomía: agrupamientos de clases y de relaciones (2), agrupamientos aditivos y multiplicativos (2), agrupamientos primarios y secundarios (2), de lo cual obtenemos $2 \times 2 \times 2 = 8$. Pero resultaba imposible comprender, antes de haberlo analizado en detalle, el papel fundamental desempeñado por las clases y las relaciones secundarias, que ponen en evidencia los agrupamientos II, III, VI y VII. La razón aparece ahora clara: existen de hecho dos estructuras fundamentales que se dividen el conjunto de los agrupamientos intraproposicionales: una se halla basada en los encajes y seriaciones lineales, es decir, íntegramente ordenados (I y V) y sobre sus multiplicaciones, que son por lo tanto, bi-unívocas (IV y VIII); la otra lo está sobre los sistemas jerárquicos, y por lo tanto, co-unívocos (II y III, VI y VII). Son estos últimos los

1 *Cf.* RUSSELL, 1928, reed., pág. 71 y WHITEHEAD-RUSSELL, 1925-1927, * 151.

que ponen en juego las composiciones de las clases o de las relaciones secundarias entre sí, bajo la forma de vicariancias (II) o de simetrías (VI) y sobre todo de correspondencias "uno a muchos" (III y VII).

Otro resultado del estudio de los agrupamientos es el de permitir un análisis preciso de los distintos modos de equivalencia y de diferencia sobre los que se basa la lógica intensiva. Toda la lógica de clases y de relaciones constituye, en efecto, una teoría de la semejanza y la diferencia, ya se trate de clasificaciones, es decir, sistemas de semejanzas jerárquicas, o de establecimientos de relaciones, es decir, equivalencias simétricas o diferencias asimétricas. Se tratará pues, para cerrar esta exposición, de determinar las relaciones entre la equivalencia y la diferencia.

En primer lugar, la equivalencia cualitativa, cuyas diversas variedades aditivas y multiplicativas acabamos de describir, presenta el carácter fundamental de poseer grados. No hacemos alusión aquí a las formas matematizadas de equivalencia, sobre las que volveremos (cap. IV), sino a ese hecho fundamental que condiciona toda la construcción de los agrupamientos de clases y de relaciones simétricas: la identidad o relación de diferencia nula $(x \xrightarrow{o} x) = (x \xleftrightarrow{o} x) = (x = x)$ no es sino el límite máximo de una forma de equivalencia cuyos diversos grados se escalonan hasta la equivalencia mínima, que une unos a otros los elementos de la clase más general del sistema considerado U. Tomemos como ejemplo una clase A (los hombres) incluida en una serie de clases B (los mamíferos), C (los vertebrados), D (los animales), E (los seres vivos)... hasta llegar a U. Existe entonces entre los hombres una equivalencia global $\xleftrightarrow{abc...u}$, definida por el conjunto de sus caracteres comunes,[1] que es más grande que la equivalencia global dada entre los mamíferos $\xleftrightarrow{bc...u}$; en efecto, éstos, pese a presentar cualidades comunes que los hacen todos equivalentes entre sí en tanto mamíferos $\xleftrightarrow{b}$, son más diferentes entre sí que lo que lo son los hombres entre ellos, ya que les falta la cualidad específica de la clase A, es decir, $\xleftrightarrow{a}$. La equivalencia dada entre los vertebrados $\xleftrightarrow{cd...u}$ es más débil aún, y así siguiendo hasta llegar a la equivalencia mínima que reúne unos a otros los seres en general $\xleftrightarrow{u}$.

1 Distinguimos aquí el símbolo $x_1 \xleftrightarrow{abc...u} x_2$ que designa el conjunto de equivalencias entre x_1 y x_2, del símbolo $x_1 \xleftrightarrow{a} x_2$ que representa la equivalencia diferencial propia de la clase A, y que se define por la co-posesión de los caracteres específicos de esa clase, es decir, a.

Esta disminución progresiva de la equivalencia entre los elementos de las clases incluidas, a medida que aumenta su extensión, no es otra cosa que la expresión de la ley clásica de la proporción inversa entre la comprensión de los conceptos y su extensión: en efecto, en el caso de las clases "débilmente estructuradas" a las cuales se aplica la ley en cuestión (como hemos visto en el § 6), la extensión no es sino la clase misma, mientras que la comprensión se halla constituida precisamente por las equivalencias cualitativas que caracterizan esa clase.

Ahora bien, decir que la equivalencia posee grados y que disminuye a medida que aumenta la extensión de las clases incluyentes, es sostener, por la misma razón, que la diferencia aumenta correlativamente. Nula en el caso de la identidad $\overset{o}{\longleftrightarrow}$ la diferencia es más grande en el caso de los individuos de la clase *A* (sea $\overset{abc...z}{\longleftrightarrow}$), más grande aún entre individuos de la clase *B* (sea $\overset{bc...z}{\longleftrightarrow}$ y así siguiendo hasta llegar a $\overset{z}{\longleftrightarrow}$. Las equivalencias decrecientes $\overset{abc...z}{\longleftrightarrow}$; $\overset{bc...z}{\longleftrightarrow}$; $\overset{z}{\longleftrightarrow}$; constituyen así por otra parte, y simultáneamente, relaciones de diferencias crecientes. Pero, ¿en qué consisten las diferencias desde el punto de vista de la estructura de los agrupamientos?

No existen más que tres formas de diferencias de cualidad: 1º Las "alteridades" (definición 26): por ejemplo $\overset{a'}{\longleftrightarrow}$ expresa la diferencia entre las comprensiones correspondientes a las clases *A* y *A′* si $A' = B - A$; $\overset{b'}{\longleftrightarrow}$ expresa la diferencia entre las comprensiones de las clases *B* y *B′*, si $B' = C - B$, etc. hasta $\overset{y'}{\longleftrightarrow}$ correspondiente a la diferencia entre la comprensión de *Y* y de *U* (la clase total del sistema); 2º las diferencias asimétricas:

$$O \overset{a}{\rightarrow} A \overset{a'}{\rightarrow} B \overset{b'}{\rightarrow} C \overset{c'}{\rightarrow} \ldots; \text{etc.}$$

propias de la seriación; 3º las diferencias simétricas de los intervalos:

$$O \longleftrightarrow |A; \quad A \longleftrightarrow |B; \quad B \longleftrightarrow |C; \text{etc.}$$

significan que existe, en una serie, el mismo intervalo entre *O* y *A* que entre *A* y *O*; entre *A* y *B* que entre *B* y *A*, etc.

1º Las primeras de estas diferencias expresan la presencia en uno de los términos de la relación, y la ausencia en el otro, de las cualidades $\overset{a}{\longleftrightarrow}$ ó $\overset{b}{\longleftrightarrow}$, etc, que caracterizan una clase *A* o *B*, etc., pero con

la presencia en ambos términos de las cualidades de la clase de rango superior (*B* para *A*, *C* para *B*, etc.). Así:

$$\overset{a'}{\longleftrightarrow} = (\overset{b}{\longleftrightarrow} + \overset{\bar{a}}{\longleftrightarrow}); \qquad \overset{b'}{\longleftrightarrow} = (\overset{c}{\longleftrightarrow} + \overset{\bar{b}}{\longleftrightarrow}); \text{ etc.}$$

Por ejemplo, si $A =$ los hombres, $B =$ los mamíferos, $C =$ los vertebrados, etc., entonces $\overset{a'}{\longleftrightarrow} =$ la diferencia entre los hombres y los demás mamíferos; $\overset{b'}{\longleftrightarrow} =$ la diferencia entre los mamíferos y los demás vertebrados, etc. Es fácil constatar que todas las variedades de diferencias que resultan de la presencia o ausencia de una cualidad cualquiera $\overset{x}{\longleftrightarrow}$ o $\overset{\bar{x}}{\longleftrightarrow}$ se reducen a las precedentes. Así la relación $\overset{\bar{a}}{\longleftrightarrow}$ significa que los dos individuos comparados no pertenecen a la misma clase *A*: estarán pues relacionados por la relación $\overset{a'}{\longleftrightarrow}$ si ambos pertenecen a la clase *B*; por la relación $\overset{b'}{\longleftrightarrow}$ si ambos pertenecen a *C*, etc. Si no poseen nada en común, salvo que uno pertenece a la clase *A* y el otro a la clase total *U*, la relación $\overset{\bar{a}}{\longleftrightarrow}$ significará simplemente que el segundo término pertenece a $U - A$; permanecerá pues indeterminado, pero será seguramente $\overset{a'}{\longleftrightarrow}$, ó $\overset{b'}{\longleftrightarrow}$, ó $\overset{c'}{\longleftrightarrow}$ ... ó $\overset{y'}{\longleftrightarrow}$. La equivalencia negativa $\overset{\bar{a}}{\longleftrightarrow}$ es pues un caso particular de la alteridad en general.

2º En cuanto a las diferencias asimétricas $\overset{a}{\rightarrow}$; $\overset{a'}{\rightarrow}$; $\overset{b'}{\rightarrow}$; etc., expresan el más o el menos, o las diferencias trivalentes (ver § 17). Son las relaciones asimétricas transitivas las que traducen de un modo más específico la diferencia en general. En particular, en el caso de las clases incluidas *A, B, C* ..., donde cada una está caracterizada por una de las equivalencias diferenciales $\overset{a}{\longleftrightarrow}$; $\overset{b}{\longleftrightarrow}$; $\overset{c}{\longleftrightarrow}$; la inclusión misma que las relaciona, es decir $A \subset B$; $B \subset C$; $C \subset D$; etc., constituye una relación asimétrica transitiva (ver § 18). Pero, ¿cómo concebir entonces la relación entre las diferencias asimétricas y lo que se podría denominar las diferencias simétricas, es decir entre las alteridades por una parte, y por la otra, ese elemento de diferencia que interviene de manera creciente, como acabamos de verlo, en la progresiva disminución de las equivalencias globales $\overset{abc...}{\longleftrightarrow}$; $\overset{bc...}{\longleftrightarrow}$; $\overset{c...}{\longleftrightarrow}$; etc.?

3º Es aquí donde intervienen las diferencias entre los intervalos que no hemos discutido todavía (salvo en el § 17 a propósito del carácter simétrico de la relación de diferencia indeterminada). Las dife-

rencias de intervalo se basan siempre en una seriación de relaciones asimétricas. Por ejemplo, si tenemos la serie: $O \xrightarrow{a} A \xrightarrow{a'} B \xrightarrow{b'} C \xrightarrow{c'} \ldots$ que expresa una serie de diferencias ordenadas (de más en más pesado), puede deducirse inmediatamente de allí que existe "la misma diferencia" entre A y O que entre O y A; entre B y A que entre A y B, etc. Ahora bien, "la misma diferencia" es una relación simétrica($\longleftrightarrow$) ya que no está orientada, en oposición a la diferencia asimétrica ($\rightarrow$) ordenada de menos a más o de más a menos. Es pues relativa, no a la dirección, sino al intervalo, es decir a aquello que está dado "entre" los puntos de partida y de llegada, o a la inversa: expresa pues, dicho de otro modo, que el intervalo entre los extremos es siempre el mismo en ambos sentidos.

Ahora bien, la existencia de estas relaciones de diferencia "entre", o de intervalo, se deriva de dos tipos de composiciones que permiten compararlos a la vez a las diferencias crecientes correlativas de las equivalencias decrecientes, en lo que hace a sus formas primarias, y, a las alteridades en lo referente a sus formas secundarias. En efecto, estas formas primarias pueden engendrarse de acuerdo al modo de multiplicación co-unívoca de la proposición (58) intercalando entre los términos de la serie

$$O \xrightarrow{a} A \xrightarrow{a'} B \xrightarrow{b'} C \xrightarrow{c'} \ldots$$

un conjunto de nuevos términos posibles. Se definirá entonces la relación $O_A \xrightarrow{a} A$ por la relación de orden: "O_A viene antes que A" y la relación $A \leftarrow O_A$ por: "A viene después que O_A" (O_A significará los términos cualesquiera comprendidos entre O y $|A$, es decir entre O no excluido y $|A$ excluido). Igualmente $O_B \rightarrow B$ significará: "O_B viene antes que B" y $B \leftarrow O_B$: "B viene después que O_B" (O_B significará los términos comprendidos entre O no excluido y $|B$ excluido), etc. De donde resulta de la multiplicación "antes" $\times$ "después" = = "entre":

$$(86) \quad \begin{cases} (O_A \xrightarrow{a} A) \times (A \xleftarrow{a} O_A) = (O \xrightarrow{a} |A); \\ (O_B \xrightarrow{b} B) \times (B \xleftarrow{b} O_B) = (O \xrightarrow{b} |B); \\ (O_C \xrightarrow{c} C) \times (C \xleftarrow{c} O_C) = (O \xrightarrow{c} |C); \text{ etc.} \end{cases}$$

Pero la serie de clases primarias incluidas $A \subset B \subset C \subset \ldots$ que se hallan determinadas por las equivalencias $\xleftrightarrow{a}$; $\xleftrightarrow{b}$; $\xleftrightarrow{c}$; etc., constituyen ellas mismas una seriación de inclusiones en función de sus

extensiones respectivas: $O \xrightarrow{a} A$; $A \xrightarrow{a'} B$; $B \xrightarrow{b'} C$; etc. (ver § 18). Naturalmente que estas extensiones propias de las clases *O*, *A*, *B*, *C*, etc., se derivan también de la proposición (86). En ese caso, el intervalo $(O \overset{a}{\longleftrightarrow} | A)$ comprenderá todos los términos o conjuntos de términos distribuidos entre *O* y la clase *A* misma (no comprendida); el intervalo $(O \overset{b}{\longleftrightarrow} | B)$ representará todos los términos comprendidos entre *O* y la clase *B* misma, no comprendida (las clases *A* y *A'*), etc. Ahora bien, por el hecho de ser cada vez mayores, estos intervalos corresponderán a las diferencias crecientes existentes en cada uno de ellos entre dos términos cualesquiera. A cada intervalo $\overset{a}{\longleftrightarrow}|$; $\overset{b}{\longleftrightarrow}|$; $\overset{c}{\longleftrightarrow}|$; etc., puede hacérsele corresponder así, en comprensión, las equivalencias $\overset{a}{\longleftrightarrow}$; $\overset{b}{\longleftrightarrow}$; $\overset{c}{\longleftrightarrow}$; dadas entre los términos comprendidos en los respectivos intervalos, equivalencias que, como se recordará, significan semejanzas decrecientes: $\overset{abc...}{\longleftrightarrow}$; $\overset{bc...}{\longleftrightarrow}$; $\overset{c...}{\longleftrightarrow}$.

Pese a todo lo que separa un sistema de clases de encajes primarios de una serie de términos ordenados, es posible no obstante, asimilar las relaciones primarias de intervalos crecientes, a la extensión progresiva de esas clases, luego de haber hecho abstracción del orden en el interior de cada intervalo. En cuanto a las relaciones secundarias de los intervalos, es posible comparar así su estructura con la de las alteridades. Si se adopta la misma nomenclatura para los intervalos y para el agrupamiento VII, se puede denominar $\overset{a}{\longleftrightarrow}$ todo intervalo elemental entre *O* y | *A*, entre *A* y | *B*, entre *B* y | *C*, etc. (ver la figura 18); se llamará entonces $\overset{a'}{\longleftrightarrow}$ el intervalo comprendido entre un término situado en un intervalo $\overset{a}{\longleftrightarrow}$ y un término comprendi-

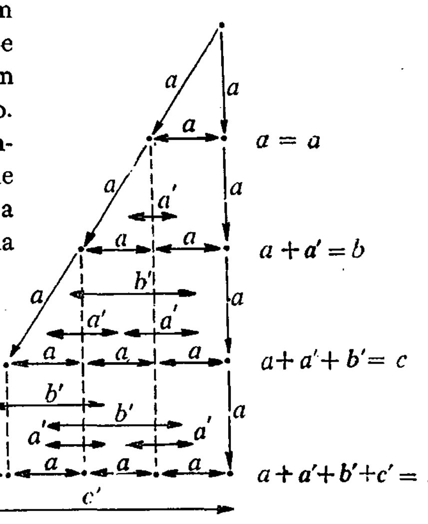


Fig. 18.

do en el intervalo siguiente (de rango $\overset{a}{\longleftrightarrow}$ igualmente); se llamará $\overset{b'}{\longleftrightarrow}$ el intervalo comprendido entre un término situado en un intervalo $\overset{a}{\longleftrightarrow}$ y un término situado en un intervalo vecino del siguiente de $\overset{a}{\longleftrightarrow}$, etc. Este modo de presentación permite confrontar entonces las relaciones de intervalo propias de las estructuras lineales o bi-unívocas a las de las estructuras jerárquicas o co-unívocas. Se ve así que ciertas composiciones son comunes a ambas estructuras; así, por ejemplo:

$$\overset{a}{\longleftrightarrow} + \overset{a'}{\longleftrightarrow} = \overset{a'}{\longleftrightarrow}; \qquad \overset{a'}{\longleftrightarrow} + \overset{a'}{\longleftrightarrow} = \overset{b}{\longleftrightarrow};$$
$$\overset{b}{\longleftrightarrow} + \overset{b'}{\longleftrightarrow} = \overset{b'}{\longleftrightarrow}; \qquad \overset{b'}{\longleftrightarrow} + \overset{b'}{\longleftrightarrow} = \overset{c}{\longleftrightarrow}; \text{etc.}$$

cuando los intervalos en juego son reencontrados en parte. Por ejemplo, si x_1 está situado "entre O y A", si x_2 también lo está y si x_3 está "entre A y B", se tendrá:

$$(x_1 \overset{a}{\longleftrightarrow} x_2) + (x_2 \overset{a'}{\longleftrightarrow} x_3) = (x_1 \overset{a'}{\longleftrightarrow} x_3)\,; \text{etc.}$$

Por el contrario, si los intervalos compuestos entre sí no se vuelven a encontrar, no habrá ya tautificación o adición vicariante, sino adición simple: $a'_1 + a'_2 = b'$; $b'_1 + a'_2 = c'$; etc., lo que sale ya de las composiciones ordinarias del agrupamiento VII y muestra la diferencia entre ambos tipos de estructuras, pese a que se haya hecho abstracción del orden en el interior de cada intervalo.

En síntesis, pese a estas aproximaciones subsisten dos formas esenciales de diferencias que corresponden a los dos tipos de estructuras lineales (es decir, enteramente ordenadas) y jerárquicas: las alteridades (simétricas) que expresan la presencia simultánea de las cualidades diferenciales (diferencias bivalentes) y de las cualidades comunes; y las diferencias asimétricas, que expresan los diversos grados (trivalencia o multivalencia) de una cualidad común. Pero, tanto unas como otras de los dos tipos de diferencias corresponden a las diferencias de intervalos, que traducen simplemente la separación más o menos grande (y simétrica) entre los términos comparados. Se puede componer entonces de manera análoga las relaciones de intervalo propias de las estructuras enteramente ordenadas (haciendo abstracción del orden en el interior de cada intervalo) y de las estructuras jerárquicas (o parcialmente ordenadas). Tales composiciones atenúan la oposición entre las alteridades y las diferencias asimétricas, reduciendo las primeras a relaciones secundarias de intervalo y haciendo corresponder a

las segundas las relaciones primarias de intervalo: las relaciones de intervalo no aparecen ya más como una categoría aparte de diferencia, sino como el elemento común a las dos categorías principales. A pesar de ello, éstas conservan su dualidad.

Surge así la unidad dentro de la diversidad, que caracteriza el sistema de los ocho agrupamientos de clases y de relaciones. ¿Sería posible sin embargo reducirlo a uno solo? En el plano intraproposicional subsisten dos tipos de oposiciones que impiden dicha reducción. Por una parte, acabamos de constatar el dualismo entre las estructuras enteramente ordenadas o bi-unívocas (agrupamientos I, V, IV y VIII) y las estructuras jerárquicas (agrupamientos II, III, VI y VII); por otra parte, la operación inversa de los agrupamientos aditivos de clases se basa en la complementariedad, mientras que la operación inversa propia de los agrupamientos aditivos de relaciones se basa en la reciprocidad. Pero, hemos visto (§ 15) que los agrupamientos de clases I a III pueden ser considerados como diferenciaciones del agrupamiento IV que es más general que ellos. De igual modo, podrían considerarse los agrupamientos de relaciones V a VII como derivados del agrupamiento VIII por especializaciones sucesivas. En cuanto a los agrupamientos IV y VIII, su isomorfismo permite considerarlos como dos aspectos, uno en extensión, otro en comprensión, de la misma estructura total. Sin embargo, para que esta reunión en un sistema único sea efectiva y no consista ya en simples correspondencias, será necesario pasar del plano intraproposicional o concreto, al plano interproposicional que supone un grado de formalización superior y se halla caracterizado por operaciones a la segunda potencia, que tienen como contenido las operaciones precedentes. Es lo que veremos en los capítulos V y VI.

CAPITULO IV

LA LOGICA DE CONJUNTOS Y LAS RELACIONES ENTRE LAS OPERACIONES INTRAPROPOSICIONALES Y EL NUMERO

La teoría de los conjuntos, que constituye el fundamento de las matemáticas pasa insensiblemente de las estructuras caracterizadas por un simple encaje de las partes en el todo al establecimiento de relaciones de las partes entre sí, bajo las formas más diversas y más diferenciadas. Como la lógica se mantiene dentro de las estructuras del primer tipo, mientras que las segundas son específicas de las matemáticas, la teoría de los conjuntos da la impresión de realizar la fusión completa de ambas disciplinas: es en este sentido que Russell, admitiendo luego de Frege la reducción del número cardinal a la noción lógica de clase, celebró el descubrimiento de la teoría de los conjuntos por Cantor como una de las mayores conquistas del espíritu humano. Es por ello que, pese a todas las reservas de H. Poincaré, de L. Brunschwic, de P. Boutroux, de A. Reymond, de Wittgenstein mismo y tantos otros autores que denunciaron los equívocos y a veces los círculos viciosos que se disimulan bajo ciertas reducciones demasiado fáciles, la tendencia de fusionar en un solo todo la logística o la lógica simplemente y la teoría matemática de los conjuntos, permaneció no obstante demasiado general: es así que uno arriesga aparecer como anticuado o incluso como adversario de la "lógica científica" al querer levantar el velo que recubre aún las relaciones entre la lógica pura y las matemáticas.

Ahora bien, si se resuelve demasiado precipitadamente este problema central, nos privaríamos de una de las discusiones más instructivas de la lógica contemporánea. El problema importante no es naturalmente saber si la lógica debe considerarse como una parte de las

matemáticas o si estas, por el contrario, deben concebirse como una "inmensa prolongación de la logística". El verdadero problema es el de determinar los límites de la lógica: ¿es realmente la fuente de toda ciencia deductiva, o puede sólo pretender un papel regulador? Y si está limitada, ¿son sus límites realmente infranqueables, o la lógica actual no constituye sino una etapa de una construcción todavía en devenir? Sobre este punto como sobre cualquier otro, son las soluciones dogmáticas las que son, de hecho, conservadoras y estériles. Por el contrario, toda investigación acerca de la delimitación precisa entre la lógica y las matemáticas no puede sino ser beneficiosa para ambas.

§ 23. LOS CONJUNTOS Y LAS CLASES: PLANTEO DEL PROBLEMA.

La primera cuestión que se plantea respecto de las relaciones entre la lógica de clases y de relaciones y la lógica matemática, es la de determinar el grado de parentesco entre las clases y los conjuntos. Ahora bien, una primera precaución se impone a este respecto: es la de precisar si ciertas expresiones semejantes que se emplean en ambos dominios, se refieren exactamente a los mismos significados.

En efecto, si la lógica, que no presupone nada, debe partir de lo elemental las matemáticas por su parte, que quieren reconstituir simultáneamente sus propios axiomas y los de la lógica, tienden a remontarse hasta las nociones más generales posibles. Ahora bien, lo elemental, es decir lo más simple, no se confunde necesariamente con lo más general. Así, la relación de parte a todo, que hemos considerado como característica de las estructuras lógicas, no puede ser vista *a priori* como la más general. Al menos el problema consiste en primera instancia, precisamente en determinar si es esta misma relación la que define un "un conjunto":

"Un conjunto, escribe Bourbaki, está formado por *elementos* susceptibles de poseer ciertas *propiedades* y de mantener entre sí o con los elementos de otros conjuntos ciertas *relaciones*[1]". Parece difícil elegir una noción más general como punto de partida de un Tratado de matemáticas, y de un Tratado altamente representativo del espíritu

1 BOURBAKI, 1939, t. I, pág. 2.

contemporáneo de formalismo lógico. Y sin embargo, nada es menos "elemental" que esta noción general. En primer lugar nos preguntaremos qué significan las expresiones de "propiedades" y de "relaciones", y en virtud de qué criterios se las distinguirá. Pero esta cuestión de las relaciones entre los "predicados" y las "relaciones" no es específica de las matemáticas y ha sido suficientemente tratada desde el punto de vista lógico como para que sea necesario volver a insistir aquí. Por el contrario, un segundo problema surge necesariamente, el cual es fundamental desde el punto de vista de las fronteras entre la lógica y las matemáticas: ¿Qué significa para los elementos de un conjunto la capacidad de "tener relaciones con los elementos de otros conjuntos"?

Decir que los elementos de un conjunto son susceptibles de poseer ciertas propiedades y de mantener entre sí ciertas relaciones no sobrepasa necesariamente el dominio de la lógica de clases y de las relaciones "intensivas". Así, la clase de los hombres puede considerarse como un "conjunto" de elementos que poseen ciertas propiedades (que consideraremos, por nuestra parte, como relaciones simétricas de cohumanidad) y que mantienen entre sí ciertas relaciones (más o menos grandes, largos o estrechos de cráneo, inteligentes, etc.). Estas propiedades y estas relaciones son todas reducibles, como lo hemos visto, a relaciones de parte a todo: el todo sería la diferencia cualificada o equivalencia cualificada relativa a la clase en cuestión, las partes estarían constituidas por las diferencias parciales o las subclases con sus equivalencias propias. Admitamos pues que sea así en todo conjunto matemático. No es el caso de todos como veremos más adelante. Pero es el caso de algunos y no insistiremos de momento en los otros. Por el contrario, ¿qué significan las relaciones de los elementos de un conjunto con los de otro conjunto?

En el caso de las clases lógicas, estas relaciones no pueden ser más que de tres tipos: 1º La clase de los hombres (A) puede ser puesta en relación con la de los mamíferos (B), los vertebrados (C), etc., de tal manera que un hombre x_A será puesto en relación no solamente con otros hombres($x_A \overset{a}{\longleftrightarrow} x'_A$), sino con los mamíferos ($x_A \overset{b}{\longleftrightarrow} x_B$), los vertebrados($x_A \overset{c}{\longleftrightarrow} x_C$), etc. Sólo que son todavía relaciones de parte a todo, ya se trate de inclusiones o de equivalencias por co-pertenencias o co-inclusiones. 2º Por otra parte, los hombres pueden ser comparados con cualquier otra cosa, a través de relaciones asimétricas

cualificadas: un hombre podrá ser considerado así como más inteligente que un simio (x_S) sea $x_S \rightarrow x_A$; más grande que una hormiga, etc. Pero, estas relaciones asimétricas no tienen significado sino a título de relaciones parciales dentro de seriaciones de conjunto y se basan por lo tanto nuevamente en el encaje de la parte (diferencia más pequeña) en el todo (diferencia más grande). 3º Finalmente, los establecimientos de relaciones lógicas pueden consistir en multiplicaciones de clases o de relaciones, es decir en correspondencias bi-unívocas o co-unívocas. Pero, también estas relaciones consisten en incluir la clase A_1 en las clases multiplicativas A_1A_2 o K_1K_2 (agrupamientos III o IV) o en sistemas multiplicativos de conjunto de relaciones (agrupamientos VII u VIII), de tal modo que el principio vuelve a ser el encaje de la parte en el todo. La lógica ignora así cualquier otra estructura que no sea la de los encajes según sus diversas formas.

Por el contrario, poner en relación los elementos de un conjunto matemático E con los de otro conjunto F, es imaginar un conjunto de "aplicaciones" de E hacia F que no están sujetas de ningún modo a esta condición limitativa. La razón esencial de ello, es que el matemático, en lugar de no considerar como el lógico un elemento del conjunto más que relativamente a los encajes o a las relaciones que lo cualifican o lo diferencian, se reserva siempre el derecho de hablar de un elemento *cualquiera*, es decir independiente precisamente de dichos encajes diferenciados.

El ejemplo más claro es el de las biyecciones. Pero discutiremos esta operación en detalle más adelante (§ 25). Limitémonos ahora a otro ejemplo: el del "producto de varios conjuntos". Sean E y F dos conjuntos *distintos o no*. Las *cuplas* (x, y) en las cuales el primer elemento x es un elemento cualquiera de E y el segundo y un elemento cualquiera de F, son elementos de un nuevo conjunto, que se denomina el *conjunto producto de E por F*, y que se simboliza $E \times F$. Se advierte de entrada la analogía formal de esta operación con la multiplicación bi-unívoca lógica (agrupamientos IV y VIII). Y sin embargo, no se trata de la misma operación, por el sólo hecho que las cuplas x, y están formadas por elementos "cualesquiera" y no construidas solamente en función de las semejanzas o diferencias entre x e y. Sea un conjunto E formado por dos objetos x_1 y x_2 y sea un conjunto F formado por tres objetos y_1, y_2 e y_3. El producto de estos dos conjuntos dará seis asociaciones x_1y_1; x_1y_2; x_1y_3; x_2y_1; x_2y_2 y x_2y_3. Igualmente,

una clase B_1 formada por dos clases singulares A_1 y A'_1 y una clase C_2 formada por tres clases singulares A_2, A'_2 y B'_2 nos dará un producto formado por seis asociaciones: A_1A_2; $A_1A'_2$; $A_1B'_2$; A'_1A_2; $A'_1A'_2$ y $A'_1B'_2$. Ahora bien, pese a que estas dos estructuras formales tengan, como puede verse, estructuras formales semejantes, no son de ningún modo idénticas. En el caso del producto de dos conjuntos $E \times F$, cada cupla es, en efecto, equivalente a cada una de las otras puesto que está formada por elementos "cualesquiera". Por el contrario, la multiplicación lógica entre dos clases tales como B_1 y C_2 no tiene significado más que en la medida en que confiere ciertas cualidades distintas a cada cupla A_1A_2; $A_1A'_2$; etc., de modo que ninguna de las clases multiplicativas elementales es equivalente a las demás, salvo por el hecho de formar parte de la clase total B_1C_2. Basta con comparar así la tabla de doble entrada de la figura 9, con sus seis casilleros cualificados diferentemente [1], con la multiplicación aritmética $2 \times 3 = 6$ para comprender toda la diferencia entre ambos tipos de operaciones.

Existe pues (y esto no es más que un primer ejemplo), entre la clase lógica (intensiva) y el conjunto matemático, la diferencia esencial que separa lo totalmente cualificado por encajes contiguos (ver §10 en III), de lo más o menos cualificado o de lo cualquiera: la operación matemática puede concebirse así, en una primera aproximación, como una generalización de la operación lógica correspondiente. Pero esto no es más que una primera aproximación, puesto que podría sostenerse con justicia que dicha diferencia no es sino de grado, y que atañe sobre todo al contenido de la operación y no a su estructura formal. Ahora bien, en realidad, la generalización en juego supone una modificación de la estructura misma. Al volverse "cualquiera", es decir al perder sus cualidades individuales el elemento del conjunto se transforma en una simple "unidad" entre las otras: es por ello que la asociación multiplicativa entre un elemento "cualquiera" x del conjunto F y un elemento "cualquiera" y del conjunto F constituye una relación directa de elemento a elemento, o de parte unitaria a parte unitaria, mientras que la cupla A_1A_2 propia de la multiplicación lógica, no es una relación directa de parte a parte, sino una relación indirecta que pasa por intermedio del todo B_1C_2 y de sus sub-encajes A_1 y A_2. El "producto de dos conjuntos" es pues ya una operación que se libera

1 Ver el ejemplo concreto dado a propósito de esta figura 9 (§ 15).

de las relaciones de parte a todo para inscribirse en la dirección de las relaciones entre las partes mismas.

§ 24. LOS "CONJUNTOS ABSTRACTOS" Y LA NOCION DE "DISTINTO".

El concepto de conjunto, discutido en el § 23, puede ser llamado "concreto" en el sentido de que los elementos del conjunto poseen "propiedades". Se podría comparar pues estas propiedades con las cualidades que determinan las clases, sub-clases y elementos individuales de las estructuras lógicas (de las clases que hemos denominado "débilmente estructuradas" o "semi-estructuradas": ver definiciones 11 y 12). Pero, es en este punto que conviene retomar la cuestión de las relaciones que mantienen entre sí los elementos de un mismo conjunto, puesto que estas relaciones pueden consistir, ya sea en relaciones de parte a todo, como en las relaciones lógicas, ya sea (como en el caso de las "clases estructuradas" definición 13) en relaciones directas entre las partes mismas. Por ejemplo, en conjuntos tales como el de los números enteros o el de los números pares, el conjunto de los números racionales, en conjuntos no numerables como el de los puntos de una recta o de una media circunferencia, etc., las propiedades de los elementos y las relaciones que mantienen entre sí están determinadas por una ley de construcción (la serie de los números, el continuo lineal, etc.), que permite relacionar un elemento con otro sin pasar por la relación de parte a todo.

Pero los conjuntos concretos, cuyos elementos están provistos de propiedades, no constituyen la estructura más general de la teoría de los conjuntos. Para comparar lo "general" matemático con lo "elemental" lógico, y para verificar la hipótesis según la cual la diferencia entre ambas nociones tiende efectivamente a la dualidad de relaciones de la parte al todo (cantidad intensiva) y de las partes entre sí (cantidad extensiva y numérica), son los conjuntos más generales los que deberemos considerar en primer lugar, para volver enseguida a las operaciones propias de los conjuntos concretos.

Ahora bien, las estructuras más generales están constituidas por lo que se denomina los "conjuntos abstractos": 1) un conjunto "abstracto" es un conjunto cuyos elementos están desprovistos de propie-

dades; 2) entre los elementos de un conjunto abstracto no existen otras relaciones más que la que distingue dos elementos diferentes ($x \neq y$) y la que identifica un elemento consigo mismo ($x = x$); 3) entre los elementos de un conjunto abstracto E y el mismo conjunto, no existe otra relación más que la de pertenencia ($x \in E$).

El problema se plantea así en términos no equívocos: ¿es reducible un conjunto abstracto a una clase lógica, y si no, en qué consiste la diferencia?

Dos de las cuatro características constitutivas se reencuentran en las clases lógicas: la identidad y la pertenencia. Una tercera característica es la que hemos discutido en el parágrafo anterior; el elemento de un conjunto abstracto está desprovisto de propiedades y, *a fortiori*, de cualidades individuales: esta característica no es sino la generalización de lo "cualquiera". En cuanto a la cuarta característica, que es la posibilidad de distinguir dos elementos cualesquiera ($x \neq y$), se podría decir que existe, al igual que las dos primeras, en el dominio de las clases lógicas: en la clase de los hombres, Pedro puede ser distinguido siempre de Pablo. ¿La única diferencia entre el conjunto abstracto y la clase lógica sería pues una cuestión de generalización, es decir de grado?

Pero dicha asimilación suscita la siguiente dificultad.

Dos elementos distintos de una clase lógica, como, por ejemplo, Pedro y Pablo, no son diferenciados más que en función de un complejo sistema de encajes que conducen hasta las clases singulares; estas, en efecto, pueden caracterizarse sólo gracias a una o varias cualidades diferenciales, es decir a través de un juego de "alteridades" o de relaciones asimétricas determinadas. Ahora bien, en un conjunto abstracto los elementos están "desprovistos de cualidades" (1) ¿Cómo pues, puede considerárselos "distintos" (2)?

Encontramos aquí, digámoslo aparte, la diferencia de significado que separa lo "general" de lo "elemental". Los matemáticos, que se han interesado sólo por las nociones más "generales", han conducido bien lejos su análisis. Por el contrario, ciertas nociones "elementales" son utilizadas en forma cotidiana en matemáticas, sin que se haya planteado ni siquiera la curiosidad, de analizarlas de igual modo. Tal es el caso precisamente de la noción de "distinto" cuya importancia es sin embargo fundamental, ya que toda la lógica es, en cierto sentido, una teoría de la equivalencia y de la diferencia.

Es evidente que, si los elementos de un conjunto abstracto están

desprovistos de propiedades, no podrían distinguirse unos de otros por sí solos, de modo que al plantearlos como distintos, pese a esa ausencia de toda cualidad distintiva, se introduce implícitamente una operación que permite distinguirlos. La tarea del lógico es pues determinar en qué consiste esa operación. Cuando se trata de diferencias que presentan entre sí los términos en virtud de sus propiedades, sabemos ya que estas pueden ser de tres tipos: las que resultan de la presencia o ausencia de una cualidad ("alteridades": definiciones 26-27), las que determinan las relaciones asimétricas y las que expresan una diferencia simétrica de "intervalo", esta tercera forma de diferencia es, por otra parte, reducible a las otras dos (ver § 22). ¿Pero, si falta toda propiedad, cómo dar cuenta de la operación de distinción?

Ahora bien, el matemático conserva siempre el derecho de proceder por postulados. Cuando se le pregunta en qué se reconoce el carácter distinto de dos elementos x e y de un conjunto abstracto, responde simplemente que se les da. O bien, que en un conjunto concreto los elementos difieren por sus propiedades, y que un conjunto abstracto no es otra cosa que un conjunto concreto en el que se dejan de lado las propiedades para no considerar más que la multiplicidad y la distinción de sus elementos. Pero, esta segunda respuesta constituye seguramente una escapatoria, puesto que al querer justificar la distinción de los elementos por propiedades de las que se ha hecho explícitamente abstracción, se sigue refiriendo implícitamente a ellas en el seno del conjunto abstracto mismo. En cuanto a darse simultáneamente la distinción y la ausencia de propiedades, queda aún por demostrar cómo estos dos postulados pueden ser compatibles lógicamente.

Quisiéramos plantear pues una cuestión totalmente ingenua, como se dice cuando se trata de remontarse hasta lo elemental: ¿Por medio de qué operaciones se distinguirán dos elementos cualesquiera de un conjunto abstracto, o dicho de otro modo, cómo se sabrá, en ausencia de toda propiedad distintiva de los elementos, que el conjunto abstracto no se reduce a un solo elemento?

Ciertamente, puede postularse que $(\exists x)(\exists y)\ (x \in E \cdot y \in E \cdot x \neq y)$. Pero, si dicho postulado puede servir para la elaboración de un sistema formal, no explica de ningún modo cuáles son las operaciones intelectuales que intervienen, ni tampoco indica por qué x es distinto de y. Ahora bien, si los elementos de E no difieren verdaderamente por sus cualidades propias, la única forma que permitirá todavía dis-

tinguirlos es la introducción de un orden entre ellos. Se tratará naturalmente de un orden vacío de todo contenido cualitativo, es decir de un orden que no se refiere a los caracteres de los elementos como tales, sino que es introducido desde fuera a título de orden de sucesión de las relaciones mismas. En efecto, el orden de enumeración es la última forma de diferencia que subsiste entre elementos de los cuales se ignoran todas las propiedades y de los que no se puede decir nada, salvo que son distintos.

Es cierto que la posibilidad de ordenar un conjunto cualquiera puede requerir el axioma de elección. Pero ello no impide que por lo menos todo conjunto finito pueda ser ordenado, y es refiriéndose a este orden posible de enumeración como puede concebirse elementos cualesquiera como distintos, y al conjunto sin que se reduzca a un solo elemento.

En el caso de un subconjunto finito, distinguir equivale pues a introducir un orden cualquiera de numeración posible o de enumeración simplemente ordinal.

Pero entonces, y esto es esencial, todos los órdenes posibles de enumeración son semejantes entre sí, ya que los elementos no poseen por sí mismos cualidades distintivas: ya se proceda según el orden *x; y; z* o *z; y; x;* etc., habrá siempre un primer elemento que habrá sido puesto luego de haberlo comparado con un segundo, de manera de distinguirlo de un tercero, que a su vez habrá sido puesto en relación con el segundo, etc. Hay pues similitud general de todos los órdenes posibles.

Dicho esto, resulta evidente que un conjunto abstracto no es una clase lógica. Al estar desprovistos de cualidades, los elementos del conjunto son todos equivalentes entre sí desde el punto de vista de la cualidad, ya que no hay ninguna cualidad que los distinga. Pero son sin embargo distintos porque pueden ser ordenados, al menos por subconjuntos finitos, y de modo que todas las series ordenadas que puedan construirse con los mismos elementos no cualificados, sean semejantes entre sí. Ahora bien, el dominio de la lógica intensiva no conoce más que la equivalencia o la diferencia cualificadas, y no posee operaciones que lleven sobre elementos a la vez equivalentes y ordenados. La lógica no conoce, por lo tanto, ninguna similitud generalizada de todos los órdenes posibles construidos con los mismos elementos: el orden de enumeración Pedro, Pablo y Juan es distinto,

cualitativamente, del orden Pablo, Juan y Pedro, de manera que el orden generalizado (un primero) ⟶ (un segundo) ⟶ (un tercero) ⟶ etc., desborda la lógica intensiva, puesto que extrae de los diferentes órdenes cualificados posibles una similitud ordinal común a todos ellos.

En síntesis, el hecho de considerar los elementos de un conjunto abstracto como todos distintos pese a la ausencia de propiedades distintivas, consiste en relacionarlos directamente unos con otros en tanto que simultáneamente equivalentes y seriables, a través de operaciones que sobrepasan las de la lógica del todo y la parte. En efecto, la eliminación de toda cualidad así como la similitud generalizada de los diferentes órdenes de enumeración posibles, liberan los elementos de sus encajes anteriores, es decir de las clases o de las relaciones concretas o cualificadas, para unirlos directamente entre sí en tanto elementos homogéneos. Así, la noción de conjunto abstracto verifica, en lo referente a las relaciones internas de los elementos entre sí, lo que hemos mostrado ya a través del ejemplo del producto de dos conjuntos, respecto a las relaciones externas entre los elementos de varios conjuntos; que la teoría de los conjuntos difiere de la lógica por el establecimiento directo de relaciones entre las partes o los elementos, en oposición a las relaciones de parte a todo, que si bien se conocen igualmente en la teoría de los conjuntos, son las únicas que se dan en el terreno de la lógica intensiva.

§ 25. LA CORRESPONDENCIA BI-UNIVOCA CUALQUIERA, LA RELACION DE EQUIPOTENCIA Y LAS RELACIONES ENTRE LA LOGICA INTENSIVA Y EL NUMERO.

Si bien la teoría de los conjuntos comienza como la lógica con las relaciones de parte a todo, sobrepasa bien pronto, como acabamos de verlo, estas simples relaciones de inclusión y pertenencia. Las sobrepasa en el interior mismo de los conjuntos, al considerar elementos cualesquiera en lugar de cualificarlos necesariamente. Y las sobrepasa en especial en lo relativo a las relaciones de los conjuntos entre sí.

Desde este doble punto de vista se plantea un problema que ha desempeñado un papel fundamental en la historia de la lógica: las

relaciones entre la noción de clase y la de número cardinal, así como entre la de relación asimétrica y la de número ordinal.

Se llama *función* o *aplicación* una correspondencia que, a todo elemento x de un conjunto E, asocia uno y sólo un elemento y de un conjunto F.

La lógica conoce también, en cierto sentido, dichas aplicaciones o funciones, ya que es posible multiplicar dos clases entre sí, pero como hemos visto (§ 15), estas aplicaciones puramente lógicas permanecen subordinadas a los encajes de las partes en las totalidades. Las funciones o aplicaciones que se utilizan en la teoría de los conjuntos pueden constituir, por el contrario, relaciones directas de elemento a elemento, ya que se trata de elementos cualesquiera.

Este pasaje de la relación de la parte al todo a las relaciones entre las partes mismas (o incluso entre los elementos como tales), es particularmente definido en el dominio de esas funciones esenciales que constituyen las biyecciones dentro de la teoría de los conjuntos, y conduce a la construcción de los números enteros.

Definición 31 — *Una aplicación $f : E \rightarrow F$ es inyectiva si para dos elementos distintos x y x' de E corresponden dos elementos distintos y e y' de F. Es suryectiva si, para todo $y \in F$, existe (por lo menos) un $x \in E$ tal que $f : x \rightarrow y$. Una aplicación que es a la vez suryectiva e inyectiva es una* biyección *o* correspondencia bi-unívoca.

Si existe una biyección f entre dos conjuntos E y E, se dice que E y F son *equipotentes* o que tienen la misma potencia, y se simboliza $|E| = |F|$.

Si $F' \subset F$ (F' es una parte propia de F) y si existe una biyección $f : E \rightarrow F'$, entonces se dice que la potencia de E es menor que la de F y se simboliza $|E| < |F|$.

El *conjunto de las partes* de un conjunto E, sea $\mathcal{P}(E)$, es el conjunto de todos los subconjuntos de E, comprendido el conjunto vacío $\emptyset$ y E mismo.

Una vez recordadas estas nociones, se ve inmediatamente la diferencia que separa, en su mecanismo operatorio, la correspondencia bi-unívoca utilizada en la teoría de los conjuntos y la que acabamos de analizar en los "agrupamientos" de la lógica intensiva, así como también la oposición existente entre la noción de "potencia" de los conjuntos y la "extensión" de las clases lógicas.

Comenzando por este último punto, de cuya comprensión depende toda la discusión que seguirá, la oposición consiste en lo siguiente: 1º Dos conjuntos cualesquiera, o dos partes cualesquiera del mismo conjunto, pueden compararse siempre directamente entre sí desde el punto de vista de su potencia: así un conjunto *E* podrá reconocerse como equipotente respecto de *F* o de potencia superior o inferior a *F*, o bien la potencia de una parte *X* de *E* podrá compararse con la de una parte *Y* de *E*, sin ninguna limitación. 2º Por el contrario, la "extensión" de una clase *A* no podrá ser comparada a la de una clase *B* más que si una de las dos forma parte de la otra (por inclusión). Por ejemplo, se sabe que la clase de los pescados es de extensión inferior a la de los vertebrados, ya que la primera forma parte de la segunda; y se sabe que la clase de los "animales" es de extensión igual a la clase de los "seres vivos no vegetales", ya que ambas clases son idénticas, es decir incluidas una en la otra, pero es imposible saber si la clase de los peces es de extensión igual, superior o inferior a la de los moluscos, a falta de inclusión de una en la otra (salvo que se enumeren unos y otros, o se pongan en correspondencia elemento por elemento, pero el problema es precisamente saber si estas operaciones no intensivas corresponden o no a las operaciones lógicas). Del mismo modo, no puede saberse si dos clases *A* y *A'* co-incluidas en una misma clase *B* son de extensión igual o desigual, a falta de inclusión de una en la otra: los vertebrados (*A*) y los invertebrados (*A'*) son imposibles de comparar por su extensión, mientras que si *B* = los animales, se sabe que $A \subset B$ y $A' \subset B$.

Esta diferencia entre la "extensión" lógica y la "potencia" de los conjuntos pone en evidencia de entrada la oposición entre la relación exclusiva de la parte al todo, única que actúa en la lógica intensiva, y el establecimiento de relaciones de las partes entre sí, o de las totalidades entre ellas, propia de la lógica de los conjuntos.

De ahí la diferencia fundamental entre la correspondencia bi-unívoca utilizada en la comparación de los conjuntos (definición 31) y la correspondencia bi-unívoca que interviene en la multiplicación lógica de las clases y las relaciones (agrupamientos IV y VIII): esta última es necesariamente cualificada, es decir que sólo pone en correspondencia dos términos si presentan en común una misma cualidad (lo que los incluye en una misma clase), o mantienen entre sí una misma relación (en comprensión); por el contrario, la correspondencia bi-

unívoca propia de la teoría de los conjuntos es *cualquiera,* es decir, que asocia un término cualquiera del conjunto E a un término cualquiera del conjunto F, siempre que respondan ambos a la relación "uno a uno". Nuevamente aquí vemos que la diferencia tiende siempre al hecho de que la correspondencia lógica procede por encajes de las partes en las totalidades, mientras que la correspondencia matemática es una relación directa de elemento a elemento, o de parte a parte.

Pero, la cuestión estriba en saber si se trata de diferencias aparentes o de oposiciones reales: lo que equivale a preguntar si el número entero, producto de las correspondencias bi-unívocas "cualesquiera" entre conjuntos, es reducible a la clase y a la relación lógicas, o si es necesaria una transformación de las estructuras lógicas mismas para generalizarlas en estructuras matemáticas.

La correspondencia bi-unívoca (cualquiera) entre conjuntos desemboca, en efecto, en la construcción de números enteros. Decir de dos conjuntos finitos que tienen la misma potencia significa que contienen el mismo número de elementos. Más aún, el "conjunto" N de los enteros positivos puede considerarse como el conjunto de las potencias de las *partes finitas* de un conjunto infinito; la relación de orden $x \leqslant y$ en N no es sino la relación que ordena este conjunto de potencias; y la *suma* de dos enteros positivos es una función idéntica a la suma de dos "potencias de conjuntos" o de partes sin elementos comunes [1].

Ahora bien, este pasaje de la equipotencia de dos conjuntos finitos a la igualdad numérica de sus elementos, o, de un modo general, de la "potencia" al número cardinal, ha conducido naturalmente a aquellos lógicos que, junto con Frege y Russell, identifican la clase lógica y el conjunto, a concebir el número entero cardinal como reducible a la extensión de las clases. Así, al poner dos conjuntos en correspondencia bi-unívoca y extraer de estas correspondencias las clases de equivalencia según las diversas potencias, cada número entero aparecería como una clase determinada: la clase de todas las clases equivalentes entre sí por correspondencia bi-unívoca de sus términos. Así, el número 0 sería la clase de las clases vacías, el número 1 la clase de las clases singulares, el número 2 la clase de los dúos, etc. Según un ejemplo célebre, bastará poner en correspondencia bi-unívoca los

1 Bourbaki, 1939, t. I, págs. 39-40.

signos del zodíaco, los apóstoles de Cristo, los mariscales de Napoleón, etc., para obtener el número 12. Toda distinción entre la lógica y la aritmética aparece así abolida: aquella trata de clases simples sin presuponer el número, mientras que esta última procede inmediatamente de la lógica de clases, gracias a la construcción de "clases de clases equivalentes": "en cierto momento, dice así Boll, esta noción de número se impone, pero para definirla no es necesario recurrir a nada nuevo; la aritmética es, estrictamente hablando, una simple rama de la lógica"[1].

Igualmente, el número ordinal no es sino la clase de las relaciones seriales semejantes entre sí. Del hecho de que *n* objetos puedan ordenarse de diversos modos, es posible (en lo finito) siempre extraer de estas relaciones asimétricas transitivas relaciones de orden semejantes entre sí: 0 ⟶ un primer objeto ⟶ un segundo objeto ⟶ ... El número ordinal no es así más que el orden común a todos los órdenes posibles, es decir efectivamente, la clase de las relaciones seriales semejantes entre sí.

Ahora bien, si la construcción del número cardinal a partir de la potencia de los conjuntos es inobjetable, no ocurre de ningún modo lo mismo con su reducción a la extensión de las clases lógicas. H. Poincaré, L. Brunschwicg, A. Reymond y muchos otros, han mostrado las dificultades. Desde el punto de vista de las estructuras de conjunto que hemos adoptado en esta obra, es de igual modo evidente que dicha reducción se basa en un círculo vicioso, ya que consiste en extraer el número de la clase lógica luego de haberle aplicado antes una operación que no pertenece a los agrupamientos de clases y que introduce por sí sola el número: la correspondencia bi-unívoca entre unidades cualesquiera, por oposición a la correspondencia cualificada.

En efecto, y esto confirma plenamente lo que acabamos de ver hasta aquí respecto de la diferencia entre las clases y los conjuntos, poner en correspondencia bi-unívoca los elementos de dos clases lógicas

1 BOLL, 1948, pág. 422. El realismo de este autor va tan lejos que reprocha a los matemáticos el fundamentar el número en base a la igualdad de las potencias: "Hay allí una actitud discutible. Parece, por el contrario, más natural definir el número *n* como un conjunto del cual se conoce solamente que posee la potencia *n*" (págs. 444-445). Dicho de otro modo, en un cesto de duraznos, el número no se halla en la correspondencia entre estos duraznos y otros conjuntos: ¡está en el cesto mismo!

haciendo abstracción de las cualidades que definen esas clases y que distinguen los elementos, es ni más ni menos que transformar estos en simples unidades y las clases en conjuntos de unidades: es pues reducir el número a la clase introduciendo en el interior de esta las condiciones preliminares para una numeración propiamente dicha, sin que ella los suponga por sí misma.

La cosa es tanto más fácil de demostrar puesto que existe, como hemos visto, una operación lógica de correspondencia bi-unívoca: bastará pues con determinar la diferencia entre esta operación y la que define la equipotencia de los conjuntos, para poner en evidencia el círculo vicioso propio del reduccionismo. Sea, por ejemplo, un sistema de clases cualificadas K_1 en las cuales están distribuidas, bajo la forma de clases singulares, las diversas parte del rostro: $A_1 =$ la nariz; $A'_1 =$ la frente (de donde $B_1 =$ la nariz y la frente); $B'_1 =$ el ojo izquierdo, etc., y sea B_2 un sistema formado por dos clases singulares $A_2 =$ las partes del rostro de Pedro y $A'_2 =$ las de Pablo. Si multiplicamos B_2 por K_1, obtenemos una correspondencia bi-unívoca cualificada entre A_1A_2; A'_1A_2; B'_1A_2; etc., y $A_1A'_2$; $A'_1A'_2$; $B'_1A'_1$; es decir que la nariz de Pedro corresponderá a la de Pablo, su frente a su frente, etc. Pero dicha operación no consiste de ningún modo en poner en correspondencia la nariz de Pedro con la oreja derecha de Pablo, lo que no tendría ningún sentido desde el punto de vista de las equivalencias cualitativas que caracterizan las clases lógicas (por oposición a las equivalencias entre unidades que caracterizan el número), del mismo modo que no lo tendría construir una clase zoológica formada por una estrella de mar y un canguro. En efecto, si los términos A_1A_2 y $A_1A'_2$; A'_1A_2 y $A'_1A'_2$; etc., se corresponde por cuplas, es porque están incluidos en las mismas clases A_1; A'_1; B'_1; etc., en las que cada una está definida por una equivalencia que expresa la co-posesión de ciertas cualidades (una nariz, etc.). Fuera de dichos co-encajes, la correspondencia bi-unívoca pierde íntegramente la significación que supone en la lógica intensiva de las clases (es decir, en lo que se llama comunmente la lógica de clases). Ahora bien, cuando Russell pone en correspondencia los signos del zodíaco, los mariscales de Napoleón y los apóstoles de Cristo para extraer de dicha correspondencia el número 12, no procede de ningún modo a través de una operación propia de las clases lógicas, es decir, basada en equivalencias cualitativas: pese a que no exista ninguna cualidad común entre el signo

de Cáncer, el mariscal Ney y el apóstol Pedro, los relaciona por medio de una correspondencia directa como hace con cualquier otro elemento de las mismas clases, abstracción hecha de toda equivalencia cualitativa. Pero al hacer esto, deja de tratarlos como elementos lógicos: la equivalencia que introduce entre los términos correspondientes se transforma en una simple equivalencia entre una unidad y otra unidad: el signo Cáncer, el mariscal y el apóstol se transforman así en simples unidades aritméticas, elementos *cualesquiera* (no ya cualificados) de conjuntos equipotentes. No es exagerado decir pues, que la reducción del número cardinal a la clase lógica consiste ni más ni menos en introducir el número en la clase, gracias a la eliminación de toda cualidad (es decir, de toda equivalencia cualitativa en comprensión), gracias pues a una transformación de los elementos en unidades homogéneas, lo que constituye ya una numeración implícita.

En cuanto a la reducción del número ordinal a las relaciones asimétricas "semejantes" ocurre exactamente lo mismo. Atribuirse el derecho de seriar elementos de cualquier manera, considerando esas seriaciones como "semejantes" entre sí (ver para la similitud la proposición (85)), es despojar a la relación serial de toda cualidad para transformarla en un "orden de sucesión" *cualquiera*: es pues considerar los elementos como simples números de orden, y las relaciones que los unen como una sucesión puramente ordinal. El proceso es pues el mismo: al dejar de lado toda cualidad se aritmetiza la sucesión de modo paralelo a la cardinalización de la clase lógica, y, en ambos casos, se sale del dominio de la lógica intensiva para entrar en el de la lógica extensiva o lógica de los conjuntos.

Las objeciones que acabamos de enunciar contra la reducción russelliana son fáciles de justificar a través del examen de las fórmulas mismas. Supongamos una clase L y una clase L' (donde $L + L' = M$) multiplicadas ambas por una clase X. Existirá así una correspondencia bi-unívoca y cualificada entre L y L' desde el punto de vista de X, es decir L «——» L'. Pero si las clases parciales de LX corresponden a las clases parciales de $L'X$ (según el esquema recordado hace un instante a propósito de los rostros de Pedro y Pablo), existirá, por ese mismo hecho, una correspondencia bi-unívoca y cualificada entre L (o entre L') y el todo mismo ($L + L' = M$). Sea:

(87) $L \overset{X}{\longleftrightarrow} L'$ luego $L \overset{X}{\longleftrightarrow} (L + L')$ es decir $L \overset{X}{\longleftrightarrow} M$

Por ejemplo, las principales piezas del esqueleto de los peces corresponden a las de los batracios, los reptiles, los pájaros y finalmente a los mamíferos; corresponderán así a las principales piezas del esqueleto de los vertebrados en general.

Por el contrario, si dos conjuntos finitos E y F son equipotentes, esta equipotencia no se extiende a su unión $E + F$. Si E tiene 20 elementos y F también, 20 no corresponderá a 40. Se tiene pues

(88) $$| E | = | F | \text{ luego en general } | E | \neq | E + F |$$

Una primera oposición entre la correspondencia bi-unívoca cualificada y la correspondencia bi-unívoca "cualquiera", surge así en la estructura misma de ambas operaciones, lo cual se produce por una característica de gran interés: la correspondencia bi-unívoca cualificada posee la propiedad de "reflectividad", es decir que la parte (las subclases multiplicativas LX o $L'X$) corresponden al todo (a la clase multiplicativa total MX). Por el contrario, la equipotencia no presenta reflectividad en el caso de los conjuntos finitos. En cambio, y aquí vemos uno de los aspectos del interés de esta oposición, los conjuntos infinitos presentan precisamente reflectividad. Por ejemplo, el conjunto de los números pares, que constituye una parte solamente del conjunto de los números enteros, corresponde bi-unívocamente al conjunto de números enteros, ya que basta con multiplicar cada entero por 2 para obtener la serie de números pares:

1	2	3	4	5	6	...
2	4	6	8	10	12	...

Pero el hecho que la parte corresponda bi-unívocamente al todo en el infinito al igual que en la multiplicación bi-unívoca de clases y de relaciones, no significa que las clases lógicas sean infinitas porque el número de sus elementos permanezca indeterminado. Por el contrario, y esto constituye una segunda diferencia fundamental entre la lógica y la teoría de los conjuntos, la distinción entre lo finito y lo infinito no presenta ningún significado en la lógica propiamente dicha, ya que la cantidad lógica permanece intensiva. La correspondencia bi-unívoca cualquiera, que (por sus establecimientos de relaciones directas entre los elementos mismos) constituye una cuantificación

extensiva e incluso numérica, es pues la única que puede conducir por sus generalizaciones sucesivas a las diversas variedades de infinitos. Por otra parte, si el transfinito es reflectivo es (como veremos en el parágrafo siguiente) porque disocia uno de otro los dos elementos operatorios fundamentales del número, es decir la cardinación y la ordinación, que permanecen indisociablemente unidos en lo finito.

Una tercera dificultad surge del hecho que se tenga siempre

$$A \cup A = A \tag{89}$$

ya sea que A sea una clase o una clase de clases equipotentes, es decir un número. Como se sabe, para resolver esta dificultad Russell tuvo que recurrir a un procedimiento *ad hoc* que equivale a reemplazar cada uno de los dos términos de la unión (89) por clases equipotentes pero disyuntas [1].

Esta tercera dificultad de la tesis de Russell corresponde exactamente en el dominio de la adición, a lo que representa la primera en el de la multiplicación. En efecto, si los números finitos no se iterasen, habría reflectividad tanto en lo finito como en lo infinito. Como esto no ocurre, es preciso encontrar una explicación para la iteración en los mismos mecanismos operatorios que están a la base del número: ahora bien, la teoría de Russell está obligada a disociar la iteración numérica de los principios formadores del número, ya que explica la formación de este por la equivalencia de las clases reunidas en una clase de clases, y su iteración por la adición lógica, no ya de clases de clases, sino de clases elementales como tales. Hay allí un equívoco fundamental, que subsiste inevitablemente en la reducción del número a la extensión de las clases lógicas. La teoría de los conjuntos escapa, por su parte, al mismo, ya que la adición de dos potencias se basa en la reunión de conjuntos sin elementos comunes. Pero la lógica de clases cualitativas (o intensivas), basada exclusivamente en las relaciones de la parte al todo, no podría prestarse a semejante reducción sin caer en los círculos y las anfibologías que acabamos de constatar.

1 RUSSELL, 1925, * 54.

§ 26. EL PASAJE DE LOS "AGRUPAMIENTOS" DE CLASES Y DE RELACIONES A LOS "GRUPOS" ARITMETICOS.

Las dificultades inherentes a la tesis de Frege y Russell no podrían justificarse sin embargo por una posición radicalmente dualista, como la que fue adoptada por Poincaré y retomada por Brouwer, según la cual el número entero se debería a una especie de intuición *sui generis* sin ninguna relación con la lógica. El hecho que existan diferencias esenciales entre la aritmética y la lógica intensiva, e incluso entre la teoría de los conjuntos y la lógica de las clases "débilmente estructuradas", no excluye en nada la posibilidad de una generalización que, a partir de las clases y las relaciones, conduciría a los conjuntos y a los números. Pero se trata entonces de analizar en qué consiste semejante generalización, sin proyectar el número en las clases con el pretexto de hacerlo salir de ellas, y sin identificar tampoco de entrada las clases y los conjuntos a fin de hacer más fácil su reducción.

El problema se plantea pues en los siguientes términos. Toda la lógica (como hemos visto en las operaciones intraproposicionales y como veremos nuevamente en las operaciones interproposicionales) se basa en relaciones de encajes de las partes en el todo: "todos", "algunos", "uno" (en el sentido de la identidad) y "ninguno", son las únicas cantidades que conoce la cuantificación intensiva. Las matemáticas añaden a estas relaciones, de las cuales parten igualmente, la cantidad extensiva, que supone el establecimiento de relaciones de las partes entre sí o de las totalidades entre ellas. La noción de "casi todos" propia de la teoría de los conjuntos (= todos salvo un número finito o todos salvo un conjunto "débilmente representado") es así una noción específicamente matemática que ignora la lógica. La correspondencia bi-unívoca "cualquiera", que permite relacionar los elementos de un conjunto con los de otro conjunto, imprime además a la cantidad extensiva un carácter numérico, introduciendo la unidad iterable y el orden de las potencias. ¿Cómo se efectúa pues el pasaje de la cantidad intensiva, o de las relaciones de las partes con el todo, a la cantidad extensiva o numérica, es decir a las relaciones de las partes entre sí? Tal es la cuestión.

La estructura específica de los encajes intensivos está constituida por el "agrupamiento", estructura de conjunto de composiciones re-

versibles al igual que el grupo, pero contiguas, es decir basadas en las solas relaciones de inclusión y complementariedad.

El problema de la generalización que conduce de la lógica a las matemáticas consiste pues en explicar el pasaje de los agrupamientos intensivos a los grupos numéricos.

Una solución directa consistiría en asegurar dicho pasaje por una simple eliminación de las operaciones tautológicas y de reabsorción $A + A = A$ y $A + B = B$ si $B = A + A'$, propias del agrupamiento. Pero, es preciso comprender que un pasaje tan inmediato no es simple más que en apariencia, e implica además tres modificaciones esenciales de la estructura del agrupamiento, modificaciones que es necesario explicitar para poder deducir el mecanismo lógico, sin introducirlo de manera solamente implícita. 1º La primera cuestión es comprender cómo las clases elementales A, B', C', etc., pueden ser separadas de las totalidades a las que pertenecen, de manera de poder componerse directamente entre sí. En efecto, la lógica de clases no concibe una sub-clase más que relativamente a sus encajes, y no la define igualmente más que *per genus et differentiam specificam.* 2º El segundo problema consiste en entender en nombre de qué principio pueden considerarse dos sub-clases, separadas así de sus encajes, como unidades equivalentes entre ellas: reaparece aquí la correspondencia biunívoca "cualquiera" y se trata entonces de establecer sus relaciones con la correspondencia cualificada. 3º Finalmente, es preciso mostrar cómo, si se introduce una equivalencia entre las clases elementales A; A'; B'; C'; etc., se llegará a sustituir la tautología $A + A = A$ por la iteración $1 + 1 = 2$, es decir $A + A = 2\,A$ (ya que $A = A' = B'$, etc.). En efecto, se comprende bien que dos partes disyuntas no se tautifiquen: pero, si se las considera al mismo tiempo como equivalentes, es decir como sustituibles entre sí en toda composición (por lo tanto, $A' = A$, etc.) ¿en nombre de qué principio se renunciará a la tautificación lógica?

Pero, falta todavía explicar el pasaje de la lógica intensiva de las clases a la lógica extensiva de los conjuntos y los números. La verdadera solución consistirá pues, desde este punto de vista, no en privarse de ciertas operaciones del agrupamiento lógico (tautificaciones) para agregar desde fuera otras operaciones que no forman parte del mismo (equipotencia) y reencontrar así directamente el número: consistirá por el contrario en generalizar las operaciones del mismo

agrupamiento lógico, partiendo de su cuadro restrictivo inicial de encajes de las partes en el todo, de modo de alcanzar por extensiones sucesivas las relaciones de las partes entre sí.

Ahora bien, si partimos del agrupamiento aditivo de clases (I), la operación que puede ser generalizada es la sustitución, es decir la misma equivalencia, constitutiva de las clases; en efecto, las clases A y A' son equivalentes respecto de B (si $B = A + A'$) y respecto de C (si $C = A + A' + B'$), etc., pero no respecto de A ni de A'; las clase B y B' son equivalentes respecto de C, pero nc respecto de B, B', A' o A, etc. La generalización de estas equivalencias se obtendrá por lo tanto, sacrificando el carácter propio de las clases lógicas del cual el número hace completamente abstracción: la cualificación misma. En efeto, una colección de unidades es, por definición, homogénea, es decir sin diferencias cualitativas entre una unidad y otra, mientras que una reunión de clases elementales, incluso singulares, está caracterizada por un conjunto de cualidades diferenciales que limitan las equivalencias y restringen las sustituciones. La primera modificación que se introducirá en el agrupamiento para transformarlo en un grupo numérico consistirá pues en generalizar la equivalencia o la sustitución, lo que implica por lo tanto, hacer abstracción de dichas cualidades. Establezcamos pues una serie de clases elementales singulares A; A'; B'; C'; etc., y preguntémonos qué ocurrirá con las leyes del agrupamiento I:

$$A + A' = B; \; B + B' = C; \; C + C' = D; \text{ etc.}$$

si, al excluir las cualidades diferenciales que restringen las sustituciones, introducimos por este mismo hecho, una equivalencia general entre las clases elementales A; A'; B'; C'; etc. Lo que equivaldrá a decir que A y A' se vuelven equivalentes respecto de A y de A' y no solamente respecto de B; que B' se vuelve equivalente a A y A' respecto de A, A' o B' y no solamente respecto de C, etc. En consecuencia, la clase B, inicialmente compuesta por A y A' solamente, podrá estarlo igualmente por B' y C', por sustitución de estas clases elementales por A y A'; la clase C, inicialmente compuesta por A, A' y B' podrá estarlo también por L', M' y N', por sustitución de estas clases elementales por las precedentes, etc. Se tendrá así, por sustituciones progresivamente generalizadas, las siguientes equivalencias:

$$A = A' = B' = C' = \text{etc.}$$

(90) $$B = (A + A') = (B' + C') = (D' + E') = \text{etc.}$$

$$C = (A + A' + B') = (C' + D' + E') = (F' + G' + H') = \text{etc.}$$

etc.

Ahora bien, si permanecemos fieles a las leyes del agrupamiento, es evidente que el hecho de introducir una equivalencia entre A y A', no solamente respecto de la clase B (sea $A \overset{B}{\longleftrightarrow} A'$), sino también respecto de A misma (sea $A \overset{A}{\longleftrightarrow} A'$) equivale identificarlas, es decir que se debería tener entonces $A + A' = A = A'$ y no $A + A' = B$; de modo tal que las identidades precedentes llegarían a una tautología general: $A = B = C = \ldots = A$. ¿Cómo escapar entonces a la misma?

Este problema, puramente formal en apariencia, por no decir artificial, es por el contrario muy real: equivale a preguntarse de qué manera, si se transforman los individuos en unidades equivalentes entre sí, se llegará a distinguirlos. No podrá hacerse ya por sus cualidades diferenciales, como cuando se enumeran objetos distintos, ya sea por sus propiedades, o por su posición en el espacio o el tiempo: hemos descartado, en efecto, toda cualidad por la generalización misma de las operaciones de sustitución. ¿Cuál será entonces el principio de distinción?

Ahora bien, hemos constatado (§ 24) que el carácter distinto de los elementos desprovistos de propiedades contenidos en un conjunto abstracto, no podría consistir más que en relaciones de orden, siempre que se pretenda no limitar el conjunto a una sola cupla de elementos distintos: "distintos" significa entonces "distinguidos sucesivamente".

Tocamos aquí el punto esencial del pasaje de la clase y de la relación lógicas al número: el número supone, en efecto, una síntesis operatoria de la clase y de la relación asimétrica. No hay, como pensaba Russell, reducción posible del número cardinal, tomado aparte, a la clase lógica considerada aisladamente, ni tampoco del número ordinal, tomado aparte, a la relación asimétrica considerada aisladamente, puesto que, en lo finito, la cardinación es indisociable de la ordinación. Para explicar el pasaje de lo lógico a lo numérico, se trata entonces de fusionar la adición de clases y la de relaciones asimétricas. Solamente esta fusión explica por qué unidades privadas de cualidades permanecen distintas: sólo ella, en consecuencia, da cuenta de la eli-

minación de la tautología $A + A' = A$ (si $A' = A$) en favor de la iteración $1 + 1 = 2$ (o $A + A = 2A$), lo que asegura al mismo tiempo el desarrollo del número hasta el infinito.

En efecto, si las clases singulares A; A'; B'; etc., no se tautifican, pese a volverse equivalentes a causa de la supresión de toda cualidad, es porque, una vez separada la cualidad, reaparece necesariamente el orden bajo la forma de un orden de enumeración cualquiera. En tanto las clases singulares permanecen cualificadas, no suponen ningún orden general, lo que equivale a decir que se las puede enumerar de diversos modos particulares. La clase C comprendía así las clases A, A' y B' que se podían enumerar en ese orden o en el orden B', A, A', etc. Pero por el hecho de estar cualificadas cada uno de estos órdenes de enumeración se distinguía de los otros: Pedro y Pablo constituye así un orden de enumeración distinto de Pablo y Pedro. Es por ello que las clases singulares del agrupamiento I no suponen ningún orden general. Por el contrario, no bien estas clases singulares son privadas de sus cualidades y transformadas así en unidades, el orden $A + A$ se vuelve semejante al orden $A + A$ incluso si se han permutado las dos A: en efecto, ambos permanecen indistintos, aparte precisamente de la posibilidad de ordenarlos. Lo que equivale a decir que todos los órdenes posibles se vuelven ahora semejantes y que existe de ahora en adelante un orden necesario, que precisamente el constituido por el orden común a todos los órdenes posibles. En otras palabras, sean cuales fueran las permutaciones efectuadas en la serie $A + A + A + + \ldots$, habrá siempre una A sin predecesor (= la primera), una A que siga a la primera (= la segunda), etc.

Se constata entonces que: mientras las clases elementales de la clasificación se vuelven todas equivalentes por una generalización de la operación de sustitución, ya existente en la construcción misma de las clases, las relaciones asimétricas que intervienen en el orden de enumeración lógico, se vuelven todas semejantes entre sí por una generalización análoga pero que conduce esta vez al orden de sucesión. Así, partimos de la serie:

$$O \xrightarrow{a} A \xrightarrow{a'} A' \xrightarrow{b'} B' \xrightarrow{c'} C' \xrightarrow{d'} \ldots$$

Pero, con la sustitución posible de A; A'; B'; etc., transformados

todos en equivalentes, hay igualmente permutación posible de todas las relaciones elementales de sucesión, de ahí su equivalencia:

(91) $$\xrightarrow{a} = \xrightarrow{a'} = \xrightarrow{b'} = \text{etc.}$$

de donde:

(92) $$O \xrightarrow{a} A \xrightarrow{a} A \xrightarrow{a} A \xrightarrow{a} \ldots$$

Sólo que, como todos los órdenes se vuelven semejantes, gracias a esta "similitud" generalizada, se constituye entonces un orden único, tal que:

(93) $$\begin{aligned} &O \xrightarrow{a} A = \xrightarrow{a} \\ &O \xrightarrow{a} A \xrightarrow{a} A = \xrightarrow{b} \\ &O \xleftarrow{a} A \xrightarrow{a} A \xrightarrow{a} A = \xrightarrow{c} \end{aligned}$$

en el cual las relaciones $\xrightarrow{a}$; $\xrightarrow{b}$; $\xrightarrow{c}$; etc., toman el significado del puro orden de sucesión, no cualificado, que interviene en la ordinación de las unidades numéricas.

Así, por una doble generalización, indisociable y correlativa, de la equivalencia propia de las clases y del orden de sucesión propia de las relaciones asimétricas, se procede de la lógica al número, por fusión en una sola operación $+ 1$, de la adición de clases y la adición de diferencias ordenadas o relaciones asimétricas transitivas:

(94) $$\begin{aligned} &(+ O = O \xrightarrow{o} O) = + 0 \\ &(+ A = O \xrightarrow{a} A) = + 1 \\ &(+ B = A + A = O \xrightarrow{a} A \xrightarrow{a} A) = + 2 \\ &(+ C = A + A + A = O \quad {}^{a} \quad A \quad {}^{a} \quad A \xrightarrow{a} A) = + 3 \\ &\text{etc...} \end{aligned}$$

De ahí las composiciones del grupo aditivo de los números enteros: $+ A = + 1$ y la iteración $A + A = A \xrightarrow{a} A = B$, es decir $1 + + 1 = 2$ y no ya $A + A = A$. En cuanto al grupo multiplicativo de los números fraccionarios positivos, con exclusión del 0 y en el cual la operación idéntica es $\times 1$, se obtiene del mismo modo a partir de los agrupamientos IV y VIII fusionados en un solo sistema, tal que:

(95)
$$A \times A = 1$$
$$B \times A = (A \xrightarrow{a} A) \times \left(\downarrow^{a} A\right) = 2$$
$$B \times B = \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & A \\ \downarrow^{a} & & \downarrow^{a} \\ A & \xrightarrow{a} & A \end{array} = 4 \text{ ; etc.}$$

Tres conclusiones se imponen respecto de los desarrollos precedentes. La primera es que, al interpretar de este modo el pasaje de la lógica de clases y de relaciones al sistema de los números, no hemos reducido el número a dicha lógica intensiva, sino simplemente marcado la continuidad de las transformaciones que los relacionan. Hemos mostrado cómo al generalizar las operaciones constitutivas de la clase y la relación asimétrica, se obtienen los números enteros, pero esta generalización misma hace salir el número de los cuadros de la lógica intensiva. En efecto, el número entero es una síntesis de la clase y la relación asimétrica: es una composición de unidades a la vez sustituibles y seriables. Ahora bien, en tanto intervienen las cualidades, cuya presencia caracteriza la lógica no matemática, los elementos en juego son, o bien sustituibles (clases y relaciones de equivalencia), o bien seriables (relaciones asimétricas), pero no las dos cosas a la vez. El número entero no es pues ni reducible a la lógica intensiva, ni radicalmente distinto: constituye, en cierto sentido, la culminación, pero a través de una síntesis operatoria nueva, de las operaciones que permanecen necesariamente separadas en el terreno de la lógica.

En segundo lugar, el pasaje de la lógica intensiva al número se efectúa esencialmente por una generalización de las operaciones que la lógica aplica a las solas relaciones de las partes al todo, a las relaciones de las partes entre sí o de los elementos entre ellos. En efecto, la transformación de los agrupamientos de la adición de clases y de la adición de relaciones asimétricas en el grupo aditivo de números enteros, supone cumplir con las tres condiciones siguientes, todas las cuales expresan el establecimiento de relaciones entre las partes o de los elementos entre sí, sin pasar por el todo: 1º Supresión de las limitaciones debidas a la contigüidad, es decir a las relaciones de complementariedad entre las clases (*A* y *A'* respecto de *B*; *B* y *B'* respecto de *C*; etc.), lo que significa un establecimiento directo de relaciones entre las clases elementales; así el número libera las unidades

de sus encajes para conferirles una movilidad operatoria completa, mientras que la lógica las mantiene dentro de los mismos en totalidades de clases o de relaciones, fuera de las cuales aquellas pierden todo significado. 2º Generalización de la equivalencia y de la similitud, lo que significa una sustitución o una permutación posible entre cualquier elemento, independientemente otra vez de sus encajes. 3º Supresión de la tautología en favor de la iteración (por fusión de la adición $A + A$ y de la adición $\xrightarrow{+a}$), lo que hace posible la composición directa de toda unidad con cualquier otra. Así, las tres diferencias esenciales del agrupamiento lógico y del grupo numérico, equivalen a liberar los elementos o las partes de las totalidades en que se hallan encajados para relacionarlos directamente unos con otros.

En tercer lugar, el hecho de liberar las clases elementales de las clases primarias en que se hallan encajadas (de lo cual acabamos de ver las tres formas principales) transforma estas clases elementales en partes disyuntas. Importa advertir a este respecto que el pasaje de la lógica intensiva a la teoría de los conjuntos, por lo tanto a la parte más general de las matemáticas, no se limita de ningún modo a lo que precede. Además de la construcción del número habría que considerar todo el pasaje de la cantidad intensiva a la cantidad extensiva no numérica. En el caso de los conjuntos infinitos no enumerables, como un sistema de intervalos encajados que tienden hacia un punto límite, interviene una serie de relaciones "casi todos" que se derivan de una cuantificación extensiva que supera la lógica intensiva, sin implicar por ello una sucesión de unidades. Si se parte de los agrupamientos I y V, hay simplemente entonces un establecimiento directo de relaciones entre las partes o entre las relaciones existentes entre ellas, por ejemplo bajo la forma:

(96) $$A' > B' > C' > \dots$$

o

(97) $$\xrightarrow{a'} > \xrightarrow{b'} > \xrightarrow{c'} > \dots$$

Hay pues, en este caso, cuantificación extensiva, ya que hay comparación ordenada de las partes, pero sin que este establecimiento de relaciones alcance una fusión de la clase y de la relación asimétrica, es decir sin iteración como en el caso de los números enteros finitos.

SEGUNDA PARTE

LAS OPERACIONES INTERPROPOSICIONALES

CAPITULO V

EL CALCULO PROPOSICIONAL

El fin del presente capítulo es exponer los elementos del cálculo proposicional, y enunciar algunas leyes esenciales de composición y de reversibilidad que lo determinan. En efecto, todo el mecanismo de las operaciones interproposicionales se halla dominado por la existencia de tres relaciones distintas de reversibilidad: la negación (o complementariedad simple); la reciprocidad (la cual veremos que constituye una complementariedad en relación a la equivalencia); y la que denominaremos correlatividad (es decir, la permutación de los "o" y los "y"). Es de suma importancia poner en evidencia estos tres tipos de relaciones, pese a que no se lo hace habitualmente, así como investigar las relaciones que existen entre ellas, ya que la reversibilidad domina toda la lógica de proposiciones tan claramente como la de clases y relaciones.

§ 27. LAS OPERACIONES INTERPROPOSICIONALES: PLANTEO DEL PROBLEMA.

Mientras que las operaciones intraproposicionales (definición 3) consisten en combinar entre sí los elementos de una proposición, las operaciones interproposicionales dejan sin analizar las proposiciones *p*, *q*, etc., para no considerar más que su verdad o su falsedad y componerlas entre sí a título de elementos de un nuevo sistema. La lógica proposicional constituye pues un cálculo autónomo, que no depende más que de la forma (definición 4) de las combinaciones interproposicionales, dejando completamente de lado el contenido intraproposi-

cional de cada uno de los elementos combinados. De este modo el cálculo proposicional obedece a sus propias reglas.

Esta autonomía de la lógica proposicional constituye un importante resultado de la lógica moderna, tanto desde el punto de vista de las aplicaciones como desde un punto de vista puramente teórico. Desde este segundo punto de vista, la independencia del cálculo proposicional demuestra, en efecto, la existencia de un nivel superior de formalización respecto al correspondiente a la lógica de clases y de relaciones y, en consecuencia, de una nueva liberación de la forma respecto de su contenido: ahora bien, como la lógica de clases y de relaciones presenta ya una estructura formal independiente de su propio contenido, la lógica proposicional puede ser considerada como una forma cuyo contenido se haya constituido por formas de nivel inferior. El cálculo de proposiciones representa pues una forma de formas consistente en operaciones a la segunda potencia, es decir operaciones que se ejercen sobre operaciones a la primera potencia. En efecto, toda proposición se reduce, desde el punto de vista intraproposicional, a un enunciado de operaciones de clases o de relaciones (que denominaremos aquí operaciones a la primera potencia), cuya verdad o falsedad depende de reglas de las operaciones mismas: combinar las proposiciones tomadas en bloque equivale pues a operar sobre operaciones, y por lo tanto, a construir un sistema de operaciones a la segunda potencia.

Pero subsiste aún un equívoco respecto a las relaciones entre ambos tipos de operaciones, y la autonomía del cálculo proposicional (que aceptamos plenamente), puede dar lugar así a dos interpretaciones distintas. Puede significar ausencia de relaciones o relaciones en sentido único. De este modo, la lógica proposicional en lugar de constituir un nivel superior del edificio lógico, sería su base misma. Las leyes de la lógica de clases y de relaciones se deducirían así de las de la lógica de proposiciones, mientras que la deducción inversa sería imposible. Pero, una segunda concepción aparece también como posible, según la cual habría correspondencia entre la lógica de clases y de relaciones, y la lógica proposicional. Ahora bien, el problema de esta correspondencia y de las relaciones de isomorfismo que supone, se plantea inevitablemente desde el momento en que se conciben los niveles correspondientes superpuestos y no como yuxtapuestos: si verdaderamente las proposiciones combinadas en bloque por la lógica

interproposicional suponen cada una, a título de contenido lógico, una "forma" intraproposicional operatoriamente definida, es todo el significado del proceso de formalización lo que está en juego en la discusión de este problema.

Antes de abordar las dos cuestiones principales que se plantean a este respecto, notemos que, pese a las declaraciones de principios, cada uno reconoce de hecho o implícitamente, la existencia de cierta relación entre los dos niveles considerados. Russell y Wittgenstein, por ejemplo, al partir de las proposiciones "elementales" o incluso "atómicas" para elevarse paso a paso hasta las proposiciones más generales, establecen de hecho una estrecha continuidad entre lo intraproposicional y la lógica general de proposiciones. Ahora bien, si esta continuidad presenta interés desde el punto de vista del atomismo lógico, con mucha mayor razón lo tendrá desde el punto de vista de las estructuras de conjunto.

En efecto, las dos cuestiones esenciales que plantea la búsqueda de relaciones entre ambos niveles de formalización, son la de las totalidades operatorias y la de las relaciones entre el razonamiento matemático y la lógica.

Desde el primero de estos dos puntos de vista, la lógica moderna presenta un espectáculo un poco desconcertante. Cada uno sabe que la marcha real de una deducción, en la elaboración de una teoría abstracta, pasa por cierto número de etapas: se comienza por definir nociones bien clasificadas y por elaborar un sistema de relaciones, luego se construye, apoyándose tanto en unas como en otras, un edificio deductivo cuya arquitectura es solidaria de estas clases y estas relaciones, ya que las mismas han sido elegidas precisamente a fin de permitir la construcción considerada; luego de lo cual solamente se vuelve al punto de partida y se procede a una nueva etapa axiomatizando el conjunto, pero esta axiomatización contiene, bajo una forma depurada, lo esencial de las construcciones preliminares sometiéndolas simplemente a ciertas reglas de composición formal. Ahora bien, la lógica proposicional, cuyo fin es proporcionar una teoría general de la deducción, y que se interesa en consecuencia exclusivamente en estas reglas de composición aplicadas a proposiciones cualesquiera, cree además que debe tratar a estas últimas como si fuesen elementos aislados desconociendo cualquier otra ley de formación que no fuese

la de una combinatoria. Dicho de otro modo, se disimula admitir que un sistema deductivo coherente no se base en un conjunto previo de clases bien clasificadas y de relaciones bien seriadas, como si las proposiciones extraídas una a una, o dos a dos. etc., de una urna o de un piano lógico, y combinadas luego según las reglas del juego, no constituyesen jamás una teoría: conducen así a consecuencias formales determinadas y el cálculo proposicional enumera con razón todas las transformaciones posibles reduciéndolas a algunos axiomas. Pero no todo está dicho: falta lo que Poincaré llamó (comparando la construcción deductiva con un juego de ajedrez) la "conducta de la partida" por oposición a los movimientos particulares. Ahora bien, sería una solución bastante restrictiva limitar la lógica a las reglas de los movimientos particulares y remitir la conducta general de la partida a la epistemología o a la psicología: creemos por el contrario, que la lógica debe estudiar las estructuras de conjunto tanto como las combinaciones parciales y, si hemos tenido éxito al mostrar dichas estructuras en el plano de la lógica de clases y de relaciones, es preciso tratar de alcanzar el mismo objetivo en lo referente a la lógica proposicional.

En efecto, si se parte de la hipótesis, bien natural, que un sistema de proposiciones, pese a poder ser estudiado en su mecanismo puramente interproposicional, contiene siempre un sistema de clases y de relaciones ya organizadas, es legítimo – reservándose siempre el derecho de hacer abstracción total de este contenido subyacente cuando se trate de formalizar las operaciones interproposicionales por sí mismas– investigar si a las estructuras de conjunto de clases y de relaciones corresponde alguna estructura total análoga en el terreno interproposicional, es decir en los sistemas de proposiciones consideradas en tanto elementos no analizados. Desde este punto de vista, no es de ningún modo evidente que no se puedan deducir los axiomas interproposicionales de los sistemas de conjunto isomorfos a los sistemas intraproposicionales: imposible en el terreno del atomismo lógico, este establecimiento de correspondencias se vuelve por el contrario posible en el plano de las totalidades operatorias. Veremos en particular que es realizable en lo que concierne al célebre "axioma único" de Nicod, que implica una estructura de "agrupamiento". Pero, repitámoslo una vez más, dicho establecimiento de relaciones no compromete en nada la autonomía de la lógica proposicional: desde el punto de vista formal, equivale simplemente a mostrar que dicha lógica presenta una "reali-

zación'' o un ''modelo concreto'' posibles en el terreno de la lógica de clases; pero, desde el punto de vista de las filiaciones naturales, la construcción de dicho modelo equivale a esclarecer el proceso mismo de la formalización y las relaciones entre las ''formas'' propias de cada nivel del proceso formalizador. No se podrá negar por lo tanto que existe allí un problema que interesa a la lógica y no solamente a la epistemología.

§ 28. LAS DIECISEIS OPERACIONES EXTRAIDAS DE LAS COMBINACIONES POSIBLES DE DOS PROPOSICIONES.

Sea una proposición p que puede ser verdadera (valor 1), o bien falsa (valor 0). Diremos que p toma su valor respecto del conjunto $[1, 0]$. Consideremos ahora todas las aplicaciones $f : [1, 0] \rightarrow [1, 0]$. Se obtiene la tabla:

(98)

p	1	2	3	4
1	1	0	0	1
0	1	0	1	0

Cada una de estas $2^{2^1} = 4$ aplicaciones puede ser considerada como una operación relativa a p, lo que se advierte inmediatamente al considerar la 3ra. como representando la *negación* de p, lo que designaremos $\bar{p}$.

Consideremos ahora el caso en que se tienen dos proposiciones p y q, independientes una de otra. Cada una puede tomar el valor 1 o el valor 0. Lo que significa que la cupla ordenada (p, q) tomará sus valores respecto del conjunto producto $[1, 0] \times [1, 0] = [(1,1), (1,0), (0,1), (0,0)]$. Si escribimos entonces las $2^{2^2} = 16$ aplicaciones $g = [1, 0] \times [1, 0] \rightarrow [1, 0]$, se obtiene la siguiente tabla [1]:

1 Tengamos en cuenta que hemos escrito las 16 combinaciones de tal modo que cada columna par sea la "negación" de la columna impar que la precede.

(98 *bis*)

(p, q)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
(1, 1)	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
(1, 0)	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
(0, 1)	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0
(0, 0)	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1

Resultará fácil entonces, auuque un poco fastidioso, examinar el caso de tres proposiciones ($2^{2^3} = 256$ aplicaciones) el de cuatro proposiciones ($2^{2^4} = 65.536$ aplicaciones) y así sucesivamente.

Pero, si nos atenemos por el momento a la tabla (98 bis), se advierte enseguida que cada una de las 16 aplicaciones permite definir una operación que puede interpretarse como una operación de uso corriente. Así, la columna 6 puede interpretarse como la conjunción "p y q" que escribiremos pq (eventualmente $p \,.\, q$), la columna 3 como la disyunción no exclusiva "p ó q", que notaremos $p \vee q$, etc.

Antes de estudiar las 16 operaciones en detalle, vamos a considerarlas aún bajo otro ángulo. Sea g_i una cualquiera de las aplicaciones de la tabla (98 bis). Escribámosla, a la manera de Georges Boole, del siguiente modo:

(99) $$g_i(p, q) = g_i(1, 1)pq \vee g_i(1, 0)pq \vee g_i(0, 1)pq \vee g_i(0, 0)pq.$$

Sea por ejemplo g_7. Se tendrá, puesto que

$$g_7(1, 1) = g_7(0, 1) = g_7(0, 0) = 1 \quad \text{y} \quad g_7(1, 0) = 0:$$
$$g_7(p, q) = (1)pq \vee (0)p\bar{q} \vee (1)\bar{p}q \vee (1)\bar{p}\bar{q}.$$

Lo cual puede leerse:

$g_7(p, q)$ = (verdadero p y q) o (falso p y $\bar{q}$) *o* (verdadero $\bar{p}$ y q) o (verdadero $\bar{p}$ y $\bar{q}$).

Si se conviene entonces no escribir los paréntesis que comiencen con "falso" y en suprimir la indicación "verdadero", se tendrá:

$$g_7(p, q) = pq \vee \bar{p}q \vee \bar{p}\bar{q}$$

lo que no es otra cosa que la *forma normal disyuntiva completa* de la operación número 7.

Es posible entonces volver a escribir la tabla precedente reemplazando en cada columna los 1 por la conjunción correspondiente y escribiendo una pequeña raya en lugar de los 0. Se tiene entonces:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	pq	—	pq	—	—	pq	pq	—	pq	—	pq	—	pq	—	pq	—
(100)	$p\bar{q}$	—	$p\bar{q}$	—	$p\bar{q}$	—	—	$p\bar{q}$	pq	—	—	$p\bar{q}$	$p\bar{q}$	—	—	$p\bar{q}$
	$\bar{p}q$	—	$\bar{p}q$	—	$\bar{p}q$	—	$\bar{p}q$	—	—	$\bar{p}q$	—	$\bar{p}q$	—	$\bar{p}q$	$\bar{p}q$	—
	$\bar{p}\bar{q}$	—	—	$\bar{p}\bar{q}$	$\bar{p}\bar{q}$	—	$\bar{p}\bar{q}$	—	$\bar{p}\bar{q}$	—	$\bar{p}\bar{q}$	—	—	$\bar{p}\bar{q}$	—	$\bar{p}\bar{q}$

Para proceder ahora al análisis de estas 16 operaciones y para extraer sus respectivos significados, hay dos métodos posibles. Uno consiste en atenerse exclusivamente a su "forma" interproposicional. Se mostrará así que la columna 5, caracterizada por los valores verdaderos $p\bar{q}$, $\bar{p}q$ y $\bar{p}\bar{q}$ (por oposición al valor pq que es falso) representa la "incompatibilidad" de las proposiciones p y q: en efecto, si p y q no pueden ser verdaderas simultáneamente sino que cada una es verdadera cuando la otra es falsa, o bien pueden ser ambas falsas, es porque son incompatibles. El otro método consistirá por el contrario en dar cuenta de la existencia de estas dieciseis disposiciones binarias y de sus respectivos significados, por medio de la referencia a las formas intraproposicionales que dichas disposiciones interproposicionales recubren. Este segundo método es extraño al cálculo proposicional como tal, ya que el mismo hace abstracción precisamente del contenido de toda proposición. Pero no es menos legítimo a título de análisis preliminar, y asegura por otra parte la relación entre la lógica interpropo-

sicional y las operaciones intraproposicionales de las cuales aquella es abstraída bajo una forma que inmediatamente se vuelve independiente.

En efecto, nada prueba *a priori* la necesidad de que cada una de estas dieciseis disposiciones posibles para dos proposiciones p y q según su valores verdaderos y falsos, suponga una significación lógica diferenciada. Cuando Serrus dice, por ejemplo, que dicho número 16 "puede ser determinado *a priori* por el análisis combinatorio" y que la tabla es por lo tanto "exhaustiva" [1], se experimenta cierto malestar al tener que subordinar los principios de la lógica a un cálculo matemático particular. Sin duda, dicho cálculo basta para probar que el número de combinaciones no podría sobrepasar de 16; pero no nos indica de ningún modo por qué cada una de estas dieciseis posibilidades reviste una significación *lógica* distinta.

Ahora bien, el interés de comparar esta tabla (100) con la forma intraproposicional que sirve de contenido a cada una de esas dieciseis combinaciones, está en mostrarnos que existe una correspondencia biunívoca y recíproca entre cada disposición particular de proposiciones y una forma igualmente determinada de encajes o no-encajes de clases, correspondientes a las proposiciones p y q.

Sea, en efecto, una función proposicional ax. Es posible asociarle una clase, la de los objetos que la satisfacen, es decir que tendríamos $[x \mid ax]$. Si $x_1 \in [x \mid ax]$, entonces ax_1 es una proposición verdadera. Igualmente es posible definir la clase $[x \mid \bar{a}x_j]$ tal que si $x_j \in [x \mid \bar{a}x]$, la proposición ax_j será falsa. Llamemos P a la primera de estas clases y $\bar{P}$ a la segunda. Su unión define el universo del discurso: $U = P \cup \bar{P}$. Consideremos ahora otra función proposicional bx y hagámosle corresponder las dos clases Q y $\bar{Q}$. Como $Q \cup \bar{Q} = U$, se tendrá:

$$U = (P \cup \bar{P}) \cap (Q \cup \bar{Q}) = PQ \cup P\bar{Q} \cup \bar{P}Q \cup \bar{P}\bar{Q}.$$

No resta pues sino establecer la correspondencia:

$$p \leftrightarrow P, \qquad \bar{p} \leftrightarrow \bar{P}, \qquad q \leftrightarrow Q, \qquad \bar{q} \leftrightarrow \bar{Q}$$

1 SERRUS, 1945, pág. 18.

para que las dieciseis operaciones de la tabla (100) correspondan precisamente a las dieciseis disposiciones determinadas por los encajes de ese producto. Así, el conjunto de dichos encajes $PQ \cup P\bar{Q} \cup \bar{P}Q \cup \bar{P}\bar{Q}$ corresponde a la columna 1 de la tabla (100): pq, $p\bar{q}$, $\bar{p}q$, $\bar{p}\bar{q}$; los tres primeros [1] $PQ \cup P\bar{Q} \cup \bar{P}Q$ corresponden a la columna 3: pq, $p\bar{q}$, $\bar{p}q$; $\bar{p}\bar{q}$; etc. Y esta correspondencia permanece verdadera sea cual sea la estructura interna de las clases (conjuntos matemáticos o clases débilmente estructuradas, en el sentido de la definición 11, etc.). Desde el punto de vista de la teoría de conjuntos, la clase o extensión total U corresponderá al conjunto referencial considerado, mientras que las dieciseis combinaciones (comprendido $\emptyset$ y U mismo) constituirán el "conjunto de partes" correspondientes. Pero, debe advertirse que si bien se traducen las clases P, Q, $\bar{P}$ y $\bar{Q}$ en lenguaje de conjuntos, no se considera en dichos conjuntos más que relaciones de inclusión y complementariedad, es decir, relaciones entre la parte y el todo, por oposición a la multiplicación de los elementos ("producto" de conjuntos: ver § 23), o a las relaciones de "potencia" (definición 31). Dicho de otro modo, no se sobrepasa la estructura de la cantidad intensiva, y por lo tanto, del agrupamiento.

Ahora bien, desde este último punto de vista, se imponen de entrada dos observaciones. La primera es que, si los agrupamientos de clases (y de relaciones) obedecen exclusivamente al principio de la partición dicotómica (complementariedad), lo mismo se daría a nivel de la dicotomía de clases P y $\bar{P}$, o Q y $\bar{Q}$, como en la lógica proposicional bivalente en su totalidad, la cual ignora otros valores que no sean lo verdadero y lo falso (por oposición a las lógicas polivalentes de las que hablaremos en el capítulo VIII). En segundo lugar, el sistema multiplicativo de clases del cual partimos constituye un "agrupamiento" de forma IV, es decir, de la forma que hemos considerado como la más general de los agrupamientos de clases. Estas dos observaciones permiten entrever el isomorfismo que encontraremos (cap. VI) entre los agrupamientos intraproposicionales y el agrupamiento de las operaciones interproposicionales bivalentes.

De momento, vamos a examinar simplemente una a una cada una de las columnas de la tabla (100) haciéndole corresponder, a fin de comprender la significación, un "modelo" extraído de la composición de las cuatro clases P, Q, $\bar{P}$ y $\bar{Q}$. La traducción de las proposiciones

1 La clase $\bar{P}\bar{Q}$ es entonces vacía.

p y q en estos modelos de clases equivaldrá pues a dar como "realizaciones" de las proposiciones p y q enunciados de la forma "$x_i \in P$" y "$x_i \in Q$" (es decir, x_i pertenece a la clase P, etc.), la proposición p será entonces verdadera cuando "$x_i \in P$" sea verdadera y falsa ($\bar{p}$) cuando "$x_i \in \bar{P}$" sea verdadera. Más aún, elegiremos en cada caso como ejemplo un modelo extraído de las clases "débilmente estructuradas" (definición 11), a fin de demostrar que los modelos más elementales posibles bastan para constituir una realización completa del cálculo proposicional.

Ejemplo: Supongamos que P es la clase de los animales marinos y Q la de los vertebrados. De modo que $P \cup Q$ designa la unión de los animales marinos y los vertebrados, y PQ la clase de los vertebrados marinos. Por lo tanto, si p expresa la proposición $x_i \in P$ y q la proposición $x_i \in Q$, $p \vee q$ será la proposición "p ó q" y pq será la proposición "p y q".

I. **La afirmación completa:** $(p * q)$. — Se designa comúnmente con el nombre de "tautología" la disposición nº 1 (pq; $p\bar{q}$; $\bar{p}q$; $\bar{p}\bar{q}$) que corresponde a una afirmación simultánea de las cuatro cuplas posibles. Preferimos denominar esta operación "afirmación completa", dado los numerosos sentidos distintos atribuidos al término tautología. Más aún, esta operación no se designa, en general, por un símbolo particular (salvo en un sentido más amplio). Nosotros emplearemos por el contrario un símbolo distinto ($*$) para representar la afirmación completa en tanto que operación, ya que nos resultará indispensable en lo que sigue: la expresión $(p * q)$ significará pues de ahora en adelante que p y q son afirmados según las cuatro combinaciones pq, pq, pq, pq reunidas.

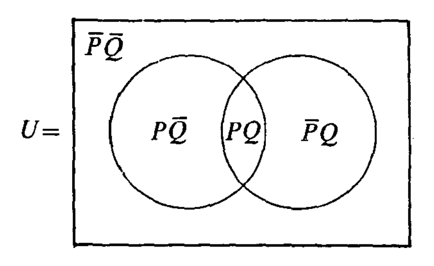


Fig. 19. — La afirmación completa. (En esta figura, como en todas las siguientes hasta la figura 34, el círculo de la izquierda representa la clase P y el círculo de la derecha la clase Q).

Desde el punto de vista de las relaciones entre clases, la afirmación completa $(p * q)$ corresponde a la multiplicación bi-unívoca:

$$(P \cup \bar{P}) \cap (Q \cup \bar{Q}) = PQ \cup PQ \cup \bar{P}Q \cup \bar{P}\bar{Q}$$

(ver la figura 19). En términos proposicionales, la afirmación completa se escribirá por lo tanto:

(101) $(p * q) = \text{d}f\ (p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$.

Su tabla de verdad (tabla (98 bis)) será: (1 1 1 1).

Ejemplo: Si $p =$ "x_i es un Vertebrado (P)" y si $q =$ "x_i posee pulmones (Q)", entonces las cuatro combinaciones siguientes pueden ser todas verdaderas: $p . q$ (= "x_i es un vertebrado pulmonar"); $p . \bar{q}$ (= "x_i es un vertebrado no pulmonar"); $\bar{p} . q$ (= "x_i no es vertebrado pero es pulmonar"); y $\bar{p} . \bar{q}$ (= "x_i no es ni vertebrado ni pulmonar").

II. **La negación completa:** (o). – La operación complementaria de la afirmación completa, es decir, aquella que la niegue, será la "negación completa", en la cual cada una de las cuatro combinaciones $p . q$; $p . \bar{q}$; $\bar{p} . q$ y $\bar{p} . \bar{q}$ será falsa. La negación completa equivaldrá pues a una disposición total cuadruplemente vacía, que designaremos con el símbolo (o):

(102) $(o) = \text{d}f\ (o) \vee (o) \vee (o) \vee (o)$

Se designa comúnmente esta disposición con el término de "contradicción", pero no seguiremos dicho uso por dos razones fundamentales. La primera es que se trata de una verdadera operación, que expresa no la contradicción en tanto estado, sino el hecho de que una operación niega o "contradice" otra (*cf.* una operación directa y su inversa) [1]. La mejor prueba que se trata de una operación es que la negación completa constituye la negación de la afirmación completa (la barra colocada encima de la totalidad de una expresión significa su negación).

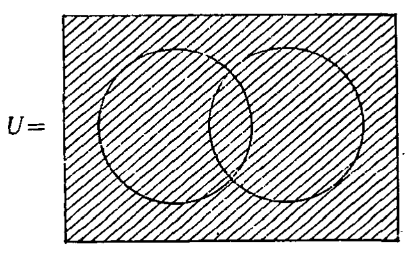


Fig. 20. – La negación completa.

1 La negación completa cumple entonces el rol de "operación idéntica". Ver § 39.

(103) $\overline{(p * q)} = \text{d}f\ \overline{(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})} = (o)$

Su tabla de verdad será: (0 0 0 0).

Por otra parte, lo que comúnmente se llama "contradicción" no está constituido, en general, por la presente relación. Por ejemplo, las dos proposiciones "x_1 es un molusco" y "x_1 es un vertebrado", no son en realidad contradictorias, sino incompatibles (ver V). La mayoría de las afirmaciones llamadas contradictorias son exclusiones recíprocas o incompatibilidades. Es el caso en particular de la expresión usual del principio de no-contradicción $\overline{p.\bar{p}}$ ¡que es una exclusión recíproca (ver XII) de p y $\bar{p}$!

III. **La disyunción no exclusiva o trilema**[1]: $(p \vee q)$. — **Supongamos** ahora que sean verdaderas las asociaciones $p . q$; $p . \bar{q}$ y $\bar{p} . q$, pero que $\bar{p} . \bar{q}$ sea falsa. La disposición así obtenida entre p y q expresará así una alternativa, pero con tres brazos, por lo tanto, un trilema: o bien p es verdadera, o bien

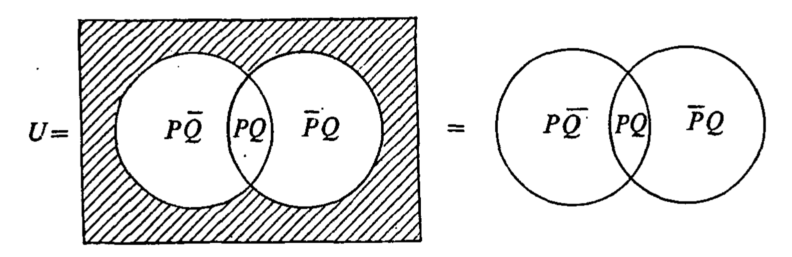


Fig. 21. — La disyunción no exclusiva.

q es verdadero, o ambos lo son, pero está excluido que uno de los tres casos sea falso. La alternativa corresponde así, en lenguaje de clases, a la reunión de dos clases parcialmente disyuntas: $PQ \cup P\bar{Q} \cup \bar{P}Q$, con exclusión de $\overline{PQ}$. De donde se desprende, en lenguaje de proposiciones:

(104) $(p \vee q) = \text{d}f\ (p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$

1 Se designa en general esta operación simplemente con el nombre de "disyunción". Pero en tal caso es para oponerla a la conjunción (VI).

Su tabla de verdad será: (1 1 1 0).

Ejemplo (ver fig. 21): Si $P =$ los vertebrados pulmonares y $Q =$ los vertebrados que poseen branquias, existen los vertebrados con pulmones sin branquias ($P\overline{Q}$), los vertebrados con branquias sin pulmones ($\overline{P}Q$) y los vertebrados que entran en ambas clases a la vez (PQ), pero no existen vertebrados sin branquias ni pulmones. Si $p = x_i \in P$, si $q = x_i \in Q$ (y si $U = P + Q$), se tiene entonces $p \vee q$, es decir, $(p \cdot q) \vee (p \cdot \overline{q}) \vee (\overline{p} \cdot q)$.

IV. **La negación conjunta:** $(\overline{p} \cdot \overline{q})$. — La operación complementaria del trilema (y por lo tanto su negación), está constituida por la afirmación de $\overline{p} . \overline{q}$, ya que esta asociación está excluida en la operación III. La afirmación de $\overline{p} . \overline{q}$ (con exclusión de las otras tres posibilidades) se traduce por "ni p ni q". En términos de clases corresponde pues a la parte complementaria de $(PQ \cup P\overline{Q} \cup \overline{P}Q)$, es decir a $(\overline{P}\overline{Q})$:

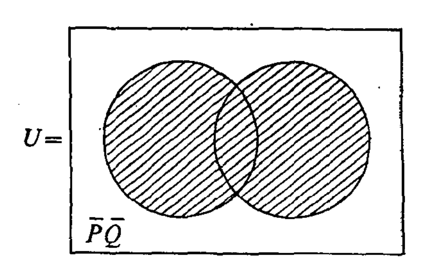


Fig. 22. — La negación conjunta.

Ejemplo: Si $P =$ los invertebrados pluricelulares y $Q =$ los vertebrados, el producto $\overline{P}\overline{Q}$ estará constituido por los protozoarios que no son "ni P ni Q". Si $p = x_i \in P$ y $q = x_i \in Q$, se da pues para los protozoarios, la verdad de $\overline{p} . \overline{q}$.

La negación conjunta expresa así la negación de la alternativa:

(105) $$(\overline{p} \cdot \overline{q}) = \mathrm{d}f\ \overline{(p \cdot q) \vee (p \cdot \overline{q}) \vee (\overline{p} \cdot q)}$$

Su tabla de verdad será: (0 0 0 1).

V. **La incompatibilidad:** $(p \mid q)$. — Admitamos ahora que la primera asociación $(p . q)$ falte: ello significa que p es incompatible con q, ya que la presencia de una de estas dos proposiciones no es compatible más que con la ausencia de la otra:

(106) $$(p \mid q) = \mathrm{d}f\ (p \cdot \overline{q}) \vee (\overline{p} \cdot q) \vee (\overline{p} \cdot \overline{q})$$

Su tabla de verdad será: (0 1 1 1).

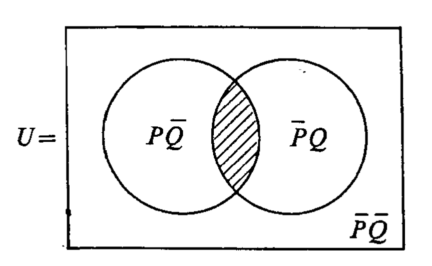


Fig. 23. — La incompatibilidad.

Ejemplo: Si $p =$ "x_i es Vertebrado (P)" y si $q =$ "x_i es un insecto (Q)", la clase PQ será vacía, ya que los P son todos $P\bar{Q}$, los Q todos $\bar{P}Q$ y ya que existen $\bar{P}\bar{Q}$. Si los $\bar{P}\bar{Q}$ no existieran, es decir, si todos los animales U fuesen vertebrados o insectos, no habría solamente incompatibilidad, sino "exclusión recíproca" (ver XII).

VI. **La conjunción:** $(p\,.\,q)$. — La negación de la incompatibilidad (es decir, la operación complementaria), será la afirmación de $(p\,.\,q)$, ya que sólo esta asociación es negada por $(p \mid q)$:

(107) $$(p\cdot q) = \mathrm{d}f\ \overline{(p\cdot\bar{q}) \vee (\bar{p}\cdot q) \vee (\bar{p}\cdot\bar{q})}$$

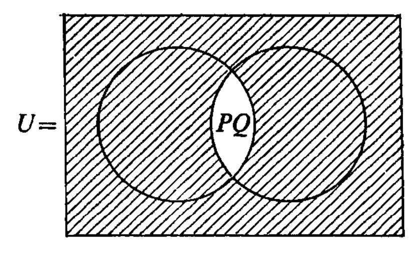


Fig. 24. — La conjunción.

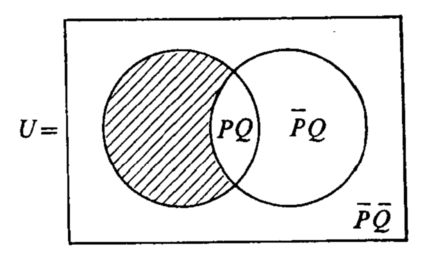
La conjunción $(p\,.\,q)$ es por definición la afirmación simultánea de dos proposiciones: "p y q a la vez".
Su tabla de verdad será: (1 0 0 0).

Ejemplo: Si $p =$ "x_i es un animal acuático (P)" y $q =$ "x_i es un mamífero (Q)", la conjunción $(p\,.\,q)$ será verdadera respecto de los cetáceos y corresponderá a la única clase PQ.

VII. **El condicional:** $(p \supset q)$. — Si las conjunciones (pq), $(\bar{p}q)$ y $(\bar{p}\bar{q})$ son verdaderas, mientras que $(p\bar{q})$ es falsa, se tiene la proposición "si p entonces q":

(108) $$(p \supset q) = \mathrm{d}f\ (p\cdot q) \vee (\bar{p}\cdot q) \vee (\bar{p}\cdot\bar{q})$$

Fig. 25. — El condicional.



Su tabla de verdad es (1 0 1 1).

Ejemplo: Si $p = x_i$ es mamífero (P) y $q = x_i$ es vertebrado (Q), se tiene entonces sólo tres casos verdaderos: PQ (los mamíferos que son todos vertebrados), $\bar{P}Q$ (los vertebrados que no son mamíferos) y $\bar{P}\bar{Q}$ (los no-mamíferos no-vertebrados). Pero la clase $P\bar{Q}$ es vacía, ya que no existen mamíferos que no sean vertebrados.

VIII. **El no-condicional:** $(p \cdot \bar{q})$ ó $(\overline{p \supset q})$. — La negación del condicional es la operación $p . \bar{q}$ complementaria de $p \supset q$, ya que dicha conjunción $p . \bar{q}$ es la única que está excluida por el condicional:

(109) $$p \cdot \bar{q} = \mathrm{d}f\ \overline{p \supset q} = \mathrm{d}f\ \overline{(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})}$$

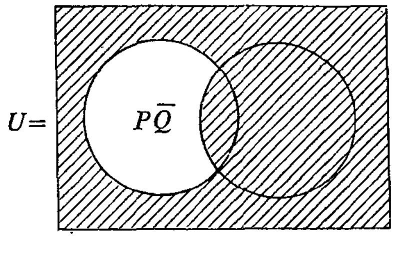


Fig. 26. — El no-condicional.

Su tabla de verdad será (0 1 0 0). Desde el punto de vista de las relaciones entre clases, el no-condicional corresponde pues a la clase $P\bar{Q}$.

IX. **El condicional inverso:** $p \subset q$ ó $q \supset p$. — El condicional no es una operación conmutativa, de modo que $p \supset q$ no equivale a $q \supset p$. Llamaremos "condicional inverso" la operación $q \supset p$. Su tabla de verdad será (1 1 0 1). Notemos, por otra parte, que se trata aquí de una inversión en el sentido de la reciprocidad y no de la complementariedad simple o negación (en efecto, $q \supset p$ es compatible con $p \supset q$, si bien ninguna de las dos operaciones supo-

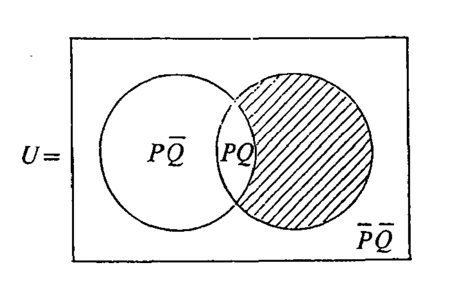


Fig. 27. — El condicional inverso.

nen necesariamente la otra, mientras que dos operaciones inversas en el sentido de la complementariedad o negación representan la "negación completa" una respecto de la otra):

(110) $(p \subset q) = df\ (q \supset p) = df (p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$

X. **El no-condicional inverso:** $(\overline{q \supset p})$ ó $(\bar{p} \cdot q)$. — Es la operación complementaria de IX (su negación). Es decir:

(111) $\overline{(q \supset p)} = df\ \overline{(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})} = (\bar{p} \cdot q)$

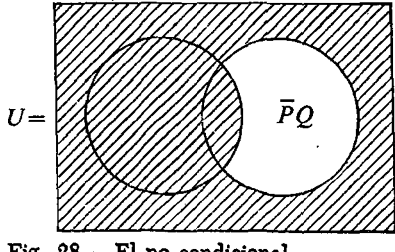


Fig. 28. — El no-condicional.

Se constata que esta operación constituye la recíproca de VIII, la conjunción $\bar{p} \cdot q$ corresponde a la clase $\bar{P}Q$ (ver fig. 28).
Su tabla de verdad será: (0 0 1 0).

XI. **El bicondicional:** $(p \equiv q)$. — Supongamos ahora que sean verdaderas sólo las conjunciones $p \cdot q$ y $\bar{p} \cdot \bar{q}$, mientras que $p \cdot \bar{q}$ y $\bar{p} \cdot q$ sean falsas. Ello significa que p y q son verdaderas o falsas conjuntamente. Se puede escribir entonces:

(112) $p \equiv q = df\ (p \supset q) \cdot (q \supset p)$ soit $(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$

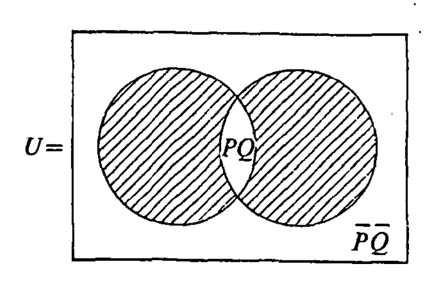


Fig. 29. — El bicondicional.

Su tabla de verdad será: (1 0 0 1).

Puede tomarse como modelo en lógica de clases el caso de las clases que tienen los mismos elementos.

Ejemplo: $P =$ los protozoarios y $Q =$ los invertebrados no pluricelulares. De lo que se desprende, si $p = x_i \in P$ y $q = x_i \in Q$, la equivalencia $(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$ ya que las clases $P\bar{Q}$ y $\bar{P}Q$ son vacías.

XII. **La disyunción exclusiva o exclusión recíproca:** $(p \mathrm{w} q)$. — La negación del bicondicional (es decir, su complementaria) es la operación que afirma la verdad de $p \cdot \bar{q}$ y de $\bar{p} \cdot q$ y niega la de $p \cdot q$

y $\overline{p}.\overline{q}$. Ahora bien, afirmar $p.\overline{q}$ y $\overline{p}.q$ solos, es expresar la exclusión recíproca de p y de q: ó p es verdadera y q es falsa o recíprocamente. La exclusión recíproca es pues un dilema, por oposición al trilema (ver III). Así, resulta útil, ya que se trata de distinguir el "o ... o" (estando el tercero excluido) del "o ... o ... o ambos" (trilema), simbolizar la exclusión por un signo especial (w por oposición a v).

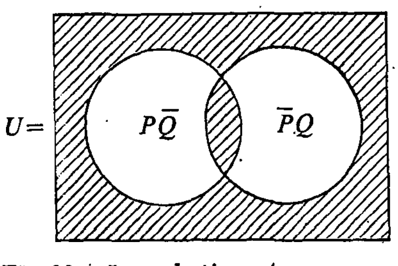


Fig. 30. — La exclusión recíproca.

Se trata entonces de dos operaciones distintas, ya que la exclusión recíproca es una equivalencia negativa y el trilema una simple disyunción parcial (que comprende la asociación $p.q$). La exclusión (w) corresponde así a la adición disyuntiva de clases (fig. 30) y la alternativa (v) a la adición no disyuntiva.

Ejemplo: Si $P =$ los vertebrados y $Q =$ los invertebrados, la clase total $U =$ los animales, se tendrá $P\overline{Q}$ y $\overline{P}Q$, pero ni PQ ni tampoco $\overline{P}\overline{Q}$. Si $p = x_i \in P$ y $q = x_i \in Q$, la fórmula de la exclusión es pues:

(113) $$(p \text{ w } q) = \text{d}f\ (\overline{p}\cdot q) \wedge (p\cdot\overline{q})$$

lo que contradice o "niega completamente" la equivalencia $(p\cdot q) \vee (\overline{p}\cdot\overline{q})$.

La tabla de verdad es: (0 1 1 0).

XIII. **La afirmación de p, símbolo $p[q]$.** — Admitamos ahora que sólo las conjunciones $(p.q)$ y $(p.\overline{q})$ sean verdaderas. Hay pues en este caso una simple afirmación de p, conjuntamente, ya sea con q o bien con $\overline{q}$:

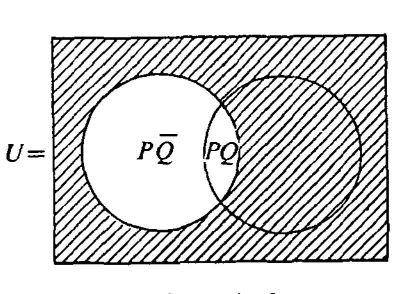


Fig. 31. — La afirmación de p.

(114) $$p[q] = (p\cdot q) \vee (p\cdot\overline{q})$$

La tabla de verdad será: (1 1 0 0).

Ejemplo: Sea una clase P tal que $\overline{P}$ sea nula: por ejemplo $P =$ los animales que respiran (no hay otros); y $Q =$ los animales que poseen pulmones. Se tendrá entonces $PQ \cup P\overline{Q}$, pero ni $\overline{P}Q$ ni $\overline{P}\overline{Q}$ (si la clase total es $U =$ los animales).

Contrariamente al uso común, nos serviremos en este caso de un símbolo especial para esta operación: $p|q]$. En lo que sigue tendremos, en efecto, ocasión de utilizarlo.

XIV. **La negación de p, símbolo $\bar{p}[q]$.** — Inversamente, si $\bar{p} . q$ y $\bar{p} . \bar{q}$ son las únicas combinaciones verdaderas, por oposición a $(p . q)$ y $(p . \bar{q})$, la operación equivale a negar p independientemente que se afirme q ó $\bar{q}$:

(115) $\bar{p}[q] = (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$

La tabla de verdad será: (0 0 1 1).

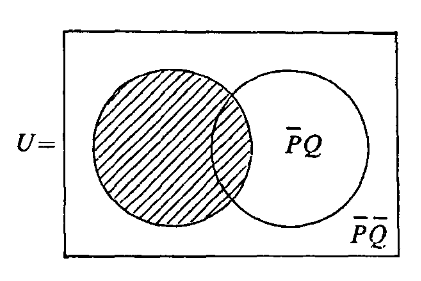


Fig. 32. — La negación de p.

Ejemplo: P = los inmortales, Q = los vertebrados y $\bar{Q}$ = los invertebrados, la clase total U = los animales. Solamente las clases $\bar{P}Q$ y $\bar{P}\bar{Q}$ serán no vacías (fig. 32). De donde se desprende la proposición (115) si $p = x_i \in P$ y $q = x_i \in Q$.

XV. **La afirmación de q: símbolo $q[p]$.** — Si ahora $(p . q)$ y $(\bar{p} . q)$ son los únicos casos verdaderos, con exclusión de $(p . \bar{q})$ y $(\bar{p} . \bar{q})$, hay entonces afirmación de q conjuntamente con p ó $\bar{p}$. Constituye pues la operación simétrica de la nº XIII. Es decir:

(116) $$q[p] = (p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q)$$

La tabla de verdad será: (1 0 1 0).
El modelo correspondiente de clases es $PQ \cup \bar{P}Q$.

XVI. **La negación de q: símbolo $\bar{q}[p]$.** — Finalmente si $(p . \bar{q})$ y $(\bar{p} . \bar{q})$ son los únicos verdaderos con exclusión de $(p . q)$ y de $(\bar{p} . q)$, hay negación de q. Es decir:

(117) $$\bar{q}[p] = (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$$

La tabla de verdad será: (0 1 0 1).

En síntesis, se constata que las dieciseis combinaciones posibles para dos proposiciones p y q según sus valores de verdad o falsedad, corresponde cada una a una operación interproposicional distinta, con un significado bien definido. Se comprueba además que cada una de

estas operaciones admite la realización de un modelo extraído de la lógica de clases que expresa las proposiciones p y q bajo la forma de un enunciado de pertenencia (incluso en el caso de las clases "débilmente estructuradas" como testimonian nuestros ejemplos). Esta

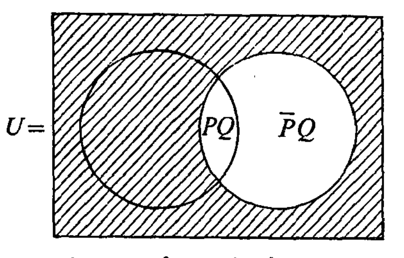


Fig. 33. — La afirmación de q.

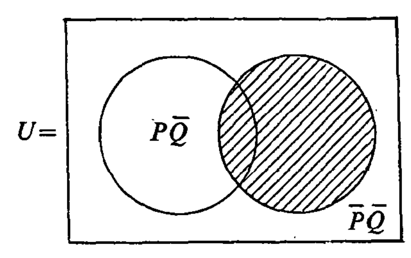


Fig. 34. — La negación de q.

correspondencia es bi-unívoca y además recíproca, ya que las combinaciones posibles que se derivan de la multiplicación de clases

$$(P \cup \overline{P}) \cap (Q \cup \overline{Q}) = PQ \cup P\overline{Q} \cup \overline{P}Q \cup \overline{P}\overline{Q}$$

son igualmente dieciseis, y puesto que las operaciones (v) y (.) corresponden a las operaciones ($\cup$) y ($\cap$). Son estas correspondencias las que aseguran a las dieciseis operaciones interproposicionales un significado concreto.

NOTA. — Como hemos visto, el condicional $p \supset q$ y el bicondicional $p \equiv q$ son proposiciones al igual que la conjunción $p.q$ y la disyunción $p \quad q$. Esto significa que los signos $\supset$, $\equiv$, $\cdot$, v, son todos operadores. No obstante, un operador, como por ejemplo $\supset$, puede engendrar una relación. Consideremos pues las dos proposiciones pq y p y formemos el condicional $pq \supset p$. La tabla de verdad de esta nueva proposición es fácil de calcular. Hemos visto, en efecto, que la tabla del condicional (VII) era (1 0 1 1)). Lo que significa que se tiene la aplicación:

(1, 1)	1
(1, 0)	0
(0, 1)	1
(0, 0)	1

Pero sabemos que la tabla de pq es (1 0 0 0) y que la de p es (1 1 0 0) (cf. VI y XIII). De lo que resulta:

pq	p	Couples	$pq \supset p$
1	1	(1, 1)	1
0	1	(0, 1)	1
0	0	(0, 0)	1
0	0	(0, 0)	1

La proposición $pq \supset p$ no es otra pues que la afirmación completa, la que escribiremos conforme al uso: $\vdash pq \supset p$.

El que la proposición compleja $pq \supset p$ sea siempre verdadera resulta del hecho que tanto el antecedente pq como el consecuente p no son cualesquiera, sino que existe entre ellos cierta relación. Diremos pues que hay una relación de *implicación* entre pq y p.

En general, sean p y q dos proposiciones simples o complejas. Diremos que p implica q y notaremos $p \to q$, si el condicional $p \supset q$ es una afirmación completa. Es fácil ver que la relación de implicación $\to$ es una relación de orden.

Igualmente, si p y q son dos proposiciones tales que el bicondicional $p \equiv q$ es una afirmación completa, diremos que p es equivalente a q y notaremos $p \leftrightarrow q$. Es fácil ver que la relación $\leftrightarrow$ es una relación de *equivalencia*, es decir que es reflexiva, simétrica y transitiva [1].

§ 29. LAS CUATRO COMBINACIONES DE UNA PROPOSICION CONSIGO MISMA, LAS 256 COMBINACIONES TERNARIAS Y EL PROBLEMA DE LAS RELACIONES DE ORDEN SUPERIOR.

Si hemos comenzado por estudiar las dieciseis operaciones posibles entre dos proposiciones p y q, es porque tanto psicológica como lógicamente una proposición no existe jamás en estado aislado. Nada impide no obstante, hacer ahora la hipótesis que q es la misma proposición que p. A las cuatro conjunciones pq, $p\bar{q}$, $\bar{p}q$, $\bar{p}\bar{q}$, corresponderán entonces

(118) $pp \leftrightarrow p$, $p\bar{p}$ proposición siempre falsa, $\bar{p}p$ proposición siempre falsa y $\bar{p}\bar{p} \leftrightarrow \bar{p}$.

Por otra parte se tendrá también:

(119) $\bar{\bar{p}} \leftrightarrow p$, $\bar{\bar{\bar{p}}} \leftrightarrow \bar{p}$, etc...

1 Según un uso bastante extendido, llamaremos a veces *implicación* la operación condicional y *equivalencia* la del bicondicional.

En cuanto a las dieciseis operaciones, se transforman en:

$$(120)\quad \begin{array}{llll} (p * p) \leftrightarrow (p \vee \bar{p}) & (p \mid p) \leftrightarrow \bar{p} & (p \subset p) \leftrightarrow p & p[p] \leftrightarrow p \\ o \leftrightarrow p \cdot \bar{p} & (p \cdot p) \leftrightarrow p & (\bar{p} \cdot p) \leftrightarrow o & \bar{p}[p] \leftrightarrow \bar{p} \\ (p \vee p) \leftrightarrow p & (p \supset p) \leftrightarrow p & (p \equiv p) \leftrightarrow p \vee \bar{p} & p[p] \leftrightarrow p \\ (\bar{p} \cdot \bar{p}) \leftrightarrow \bar{p} & (p . \bar{p}) \leftrightarrow o & (p \mathrm{w} p) \leftrightarrow o & \bar{p}[p] \leftrightarrow \bar{p} \end{array}$$

La operación $(p \mathrm{w} p)$ da O porque equivale a una exclusión, es decir en términos de clases, a una adición de partes no comunes, que son entonces necesariamente nulas.

Dicho esto, ¿cuáles son entonces las combinaciones posibles para tres proposiciones cualesquiera: p, q, y r? Existen 256, correspondientes al "conjunto de partes" de un conjunto formado por tres sub-conjuntos P, Q y R y sus complementarios; estas 256 combinaciones corresponden por otra parte a todas las disposiciones que pueden extraerse de la clases:

$$(P \cup \bar{P}) \cap (Q \cup \bar{Q}) \cap (R \cup \bar{R})$$

Pero, si bien resulta todavía interesante hacer la enumeración de estas 256 combinaciones ternarias[1], es no obstante menos indispensable en tanto que es en sí misma incompleta, ya que las combinaciones entre cuatro, cinco, seis, etc., proposiciones conducen rápidamente a números astronómicos.

Ahora bien, nada resulta más apropiado para demostrar la insuficiencia del atomismo lógico que esta sola consideración. Ninguna deducción consiste en efecto, en enumerar previamente las 4.294.967.296 combinaciones posibles mediante cinco proposiciones para extraer de ellas las relaciones buscadas. Y sin embargo, el axioma único en base al cual Nicod ha demostrado la posibilidad de fundamentar la lógica proposicional (ver § 35), utiliza precisamente cinco proposiciones. Existe pues allí un problema: "los lógicos, dice Serrus, tienen sobre este punto escrúpulos totalmente legítimos. La lógica necesita una enumeración completa. Sólo a este precio puede constituir un sistema riguroso, un sistema cerrado... No podría existir, en efecto, una lógica formal más que con esta condición"[2]. Pero en seguida Serrus confiesa que los lógicos "se han visto detenidos por la complicación

1 Ver Piaget, 1952.
2 Serrus, 1945, pág. 46.

creciente de las combinaciones. Pero sabemos por lo menos que la enumeración completa es posible, y esto basta, en cierto sentido" [1].

No podría concederse más claramente que esta "enumeración completa" es por lo tanto inútil. ¿Cuál es entonces su significado?

En el caso de relaciones ternarias, es decir, de los sistemas de tres proposiciones unidas por medio de dos relaciones, se ve inmediatamente que el número de combinaciones de verdades y falsedades que caracterizarán a la "afirmación completa" no será ya cuatro, como en el caso de las combinaciones binarias, sino ocho, ya que cada cupla $(p \cdot q)$; $(p \cdot \bar{q})$; $(\bar{p} \cdot q)$ y $(\bar{p} \cdot \bar{q})$ deberá asociarse ahora, ya sea con r o con $\bar{r}$. Es decir:

(121) $$(p * q * r) = (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot \bar{r}) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot r) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot \bar{r}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \bar{r})$$

Ahora bien, en este caso, como en el de la tautología binaria, las asociaciones en juego corresponden a las combinaciones multiplicativas de clases. En efecto, el producto de la multiplicación:

$$(P \cup \bar{P}) \cap (Q \cup \bar{Q}) \cap (R \cup \bar{R})$$

está formado por ocho clases:

$$(PQR) \cup (PQ\bar{R}) \cup (P\bar{Q}R) \cup (P\bar{Q}\bar{R}) \cup (\bar{P}QR) \cup (\bar{P}Q\bar{R}) \cup (\bar{P}\bar{Q}R) \cup (\bar{P}\bar{Q}\bar{R})$$

en la que cada una corresponde a una asociación determinada de la proposición (121) (ver fig. 35).

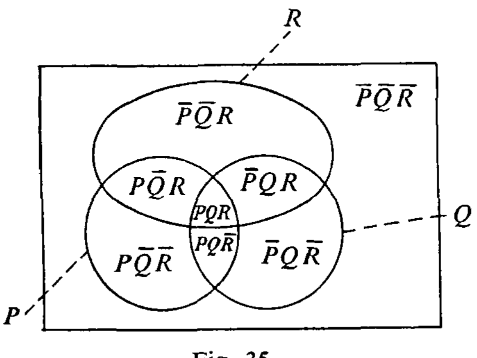


Fig. 35.

1 *Ibid.*, pág. 47.

Se obtienen entonces las 256 combinaciones ternarias detallando 1 disposición con ocho asociaciones verdaderas (es la afirmación completa de la proposición (121) correspondiente a las ocho clases de la figura 35), 8 disposiciones con siete asociaciones verdaderas (correspondientes a siete clases cualesquiera de la figura 35), 28 disposiciones con seis asociaciones verdaderas (correspondientes a seis clases cualesquiera de la figura 35), 56 disposiciones con asociaciones verdaderas, 70 con cuatro, 56 con tres, 28 con dos, 8 con una sola asociación verdadera (correspondiente a cada una de las clases de la figura 35) y 1 con ninguna asociación verdadera ("negación completa").

En cuanto a las combinaciones de cuatro proposiciones (p, q, r y s), se obtendrán asociando cada una de las conjunciones de la proposición (121) a s ó a $\bar{s}$, lo que nos dará dieciseis asociaciones de base, que corresponden nuevamente a una intersección de clases:

$$(P \cup \bar{P}) \cap (Q \cup \bar{Q}) \cap (R \cup \bar{R}) \cap (S \cup \bar{S})$$

Las disposiciones posibles serán ahora 65.536, tanto en términos de clases como de proposiciones.

El conocimiento de algunas de estas combinaciones ternarias y cuaternarias es naturalmente indispensable [1], en particular en el caso de las series transitivas, así como respecto de las reglas de asociatividad $(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$, o de distributividad, etc. Pero, en lo que concierne a la ''enumeración completa'', dos observaciones permiten substituir este ideal atomístico por otro ideal que buscará el cierre del sistema en la estructura de su totalidad y no ya en la enumeración, imposible de hecho, de sus elementos.

En primer lugar, incluso si nos colocamos desde el punto de vista de una pura combinatoria, conviene recordar que las combinaciones no existen independientemente de las operaciones que las engendran, y que estas permanecen siempre las mismas. Si se comparan las ''afirmaciones completas'' correspondientes a una sola proposición $(p \vee \bar{p})$, a dos proposiciones

$$(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q}),$$

a tres proposiciones (ver proposición (121)), a cuatro, etc., se constata que las únicas operaciones que intervienen son la afirmación y la

1 En lo concerniente al mecanismo de las transformaciones ternarias, ver § 39, en *E*.

negación combinadas con la disyunción (v) y la conjunción (·). Y dado que todas las demás operaciones se derivan de transformaciones de esas "afirmaciones completas", resulta claro que el número de términos no cambia en nada las operaciones mismas. El problema de la lógica formal no es pues construir un catálogo exhaustivo de los millares de combinaciones posibles como si se tratasen de especies zoológicas cuyo inventario presenta un interés en sí mismo: consiste por el contrario en reducir las combinaciones unas a otras y analizar sus transformaciones como tales. La cuestión central es pues una cuestión de totalidad operatoria y no ya de enumeración atomística.

En segundo lugar, si es posible reducir las formas ternarias a combinaciones binarias y retornar de estas a aquellas, el problema esencial es el de determinar la estructura del sistema de conjunto así constituido, ya se trate de una estructura de grupo, de reticulado o de agrupamiento. Ahora bien, la lógica de clases y de relaciones nos ha proporcionado un modelo aceptable: ¿será válido aún en el dominio proposicional? Para resolver tal problema, se trata en primer lugar de examinar como pueden ser reducidas las dieciseis operaciones binarias a algunas operaciones fundamentales; luego de lo cual investigaremos si estas son generalizables a partir de la introducción de proposiciones nuevas, a fin de comprobar, por este mismo hecho, si engendran estructuras coherentes susceptibles de una ampliación indefinida, sin que haya necesidad de recurrir a la enumeración como tal de todas las disposiciones posibles.

§ 30. LA TRANSFORMACION DE LAS RELACIONES BINARIAS.

Una teoría de la deducción no podría satisfacerse con la existencia de dieciseis operaciones distintas sin tratar de establecer si constituyen el resultado de transformaciones sucesivas que se derivan de un sistema operatorio único. Hemos constatado ya, en el curso de nuestra exposición, que las operaciones II, IV, VI ... son las complementarias, es decir las inversas en el sentido de la negación, de las operaciones I, III, V, ..., lo que indica de entrada el papel de la reversibilidad en la constitución de este sistema. Deben existir pues otras transformaciones posibles. La cuestión es entonces reducir las operaciones unas a otras, y es esto precisamente lo que han mostrado todos los

autores. Se ha realizado esta reducción de manera explícita, deduciendo las leyes de transformación de una combinación a otra. Se lo ha efectuado también de manera implícita cuando se ha tratado, por razones de simple economía, de reducir el formulario a algunos símbolos esenciales que permitiesen expresar simultáneamente varias relaciones. Pero, si bien la reducción es posible, es preciso comprender igualmente cuáles son sus límites, ya que incluso si se escriben todas las operaciones mediante un solo símbolo, como Sheffer llegó a hacerlo con la incompatibilidad (/), se mantienen no obstante una pluralidad de funciones operatorias distintas: directas, inversas, recíprocas, correlativas, idénticas. Desde el punto de vista de una lógica de las totalidades no son entonces ni la diversidad, ni la reducción a un símbolo único las que cuentan por sí mismas: son por el contrario las transformaciones en tanto tales y el sistema constituido por todas ellas.

I. **La afirmación completa (tautología):** $(p * q)$. — Se recordará (proposición (101)) la expresión de la afirmación completa:

$$p * q \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$$

Ahora bien, se constata que pese a que pueda simbolizarse esta operación por un signo especial $(p * q)$, su expresión entera consiste en conjunciones $(\cdot)$, disyunciones $(\vee)$, afirmaciones y negaciones. Esto no es exclusivo de la afirmación completa, ya que en el § 28 hemos traducido cada una de las dieciseis operaciones binarias en el mismo lenguaje.

Esta forma disyuntiva (disyunción de conjunciones) que puede darse tanto a la afirmación completa como a las otras quince operaciones binarias, es llamada "forma normal disyuntiva". La idea de reducir todas las operaciones a "formas normales", es decir homogéneas y por lo tanto comparables, se debe a E. Schrœder y ha sido ampliamente utilizada después. Su empleo es particularmente fecundo en las axiomáticas o cuando se trata de verificar una demostración: al poner todas las operaciones bajo la forma de disyunciones y conjunciones, es fácil ver, en efecto, si su desarrollo contiene contradicciones o tautologías. Hilbert ha mostrado especialmente que toda expresión es tautológica cuando, puesta bajo la forma de una serie de disyunciones

$p \vee \bar{p} \vee q \vee r \ldots$, dos términos de la serie (en este caso p y $\bar{p}$) son de signos contrarios [1].

Pero no existe sólo una forma normal disyuntiva: existe también una "segunda", o "forma normal conjuntiva" que consiste en unir las disyunciones por conjunciones: $(p \vee q) \cdot (p \vee \bar{q}) \cdot$(etc.). Veremos a propósito de la disyunción (III) cuáles son sus relaciones generales con la forma disyuntiva. En el caso de la afirmación completa, esta forma normal conjuntiva es nula: en efecto, como la afirmación completa $(p * q)$ expresa la totalidad (o suma) de las cambinaciones posibles, la parte común (.) de las alternativas que reúne no puede ser más que nula [2].

II. **La negación completa (contradicción):** (o). — La forma normal disyuntiva de esta operación es (o). En cuanto a su forma normal conjuntiva, da lo siguiente:

$$(122) \qquad o \leftrightarrow (p \vee q) \cdot (p \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee q) \cdot (\bar{p} \vee \bar{q})$$

Retomemos, para comprenderlo, el ejemplo que habíamos dado (§ 28, nº 1), respecto de la afirmación completa: $p =$ "x_i es Vertebrado (P)" y $q =$ "x_i es pulmonar (Q)". Es fácil ver entonces que un elemento x_i que sea *a la vez* (.) vertebrado o ($\vee$) pulmonar, *y* vertebrado o no pulmonar, *y* no-vertebrado o pulmonar *y* no-vertebrado o no-pulmonar, es inexistente. La proposición (122) expresa pues la negación completa llamada comúnmente contradicción: más aún, la operación correspondiente de clases da igual (o): en efecto

$$(P \cup Q) \cap (P \cup \bar{Q}) \cap (\bar{P} \cup Q) \cap (\bar{P} \cup \bar{Q}) = O.$$

III. **La disyunción no exclusiva o trilema:** $(p \vee q)$. — Con la alternativa $(p \vee q)$, estamos en presencia de una relación de un rendimiento operatorio considerable, dado su carácter conmutativo y completo. Es por esta razón que la disyunción permite, junto con la conjunción, reducir a formas normales el conjunto de las operaciones binarias (y

1 Se dirá, en efecto, en lógica proposicional, que una expresión es tautológica cuando es exacta para cualquier valor de sus combinaciones de base (p, q, etc.). Por ejemplo, el axioma único de Nicod (§ 35) es, en este sentido, una tautología.

2 Serrus da como forma normal conjuntiva de la tautología la expresión $(p \vee q) \cdot (p \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee q) \cdot (\bar{p} \vee \bar{q})$. Pero hay allí un grave error: se trata precisamente en este caso, de la forma normal de la negación completa o contradicción (ver II). En general, toda la tabla de formas normales conjuntivas que da Serrus (pág. 65) debe ser invertida, salvo para las operaciones que hemos enumerado XII-XVI.

ternarias, etc.). Sus propias formas normales disyuntiva y conjuntiva son[1]:

(*cf.* proposición 104) $p \vee q \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$

(123) $(p \vee q)$

Conviene dar ahora, a propósito de la disyunción, una breve aclaración acerca del alcance general de las formas normales. Los dos polos extremos entre los que se extienden todas las afirmaciones de la lógica bivalente son $p \,.\, \bar{p}$ equivalente a o (o principio de no-contradicción) y $p \vee \bar{p}$ equivalente a todo (o "siempre verdadero" principio de tercero excluido): son pues una conjunción y una disyunción. Se ha tratado, en consecuencia, de expresar todas las operaciones interproposicionales bajo esta misma forma. Ahora bien, la empresa ha tenido pleno éxito, e independientemente de sus ventajas prácticas (simplicidad y poder de verificación), la construcción de formas normales presenta un triple interés teórico. En primer lugar, muestra cómo todas las combinaciones binarias consisten en descomposiciones de la "afirmación completa" $(p * q)$; volveremos más adelante sobre este hecho fundamental, que muestra de entrada la unidad operatoria del sistema. En segundo lugar, la reducción de todas las operaciones a disyunciones y conjunciones combinadas prueba, como hemos insistido ya, la capacidad de transformación de las operaciones unas en otras; pero a condición de respetar la bipolaridad de las operaciones directas e inversas, por combinación de los ($\vee$) y los (.) con las afirmaciones y negaciones.

En efecto, y este es precisamente el tercer interés esencial de la teoría de las formas normales, dicho dualismo manifiesta la existencia de un principio de reversibilidad operatoria: principio que creemos es el de toda la racionalidad, y que reencontraremos a título de mecanismo esencial del "agrupamiento" único de las operaciones interproposicionales. La reversibilidad propia de las "formas normales" se expresa según una ley que la teoría de clases puso en evidencia en su propio campo y que fue inmediatamente aplicada a la lógica proposicional, la *ley de dualidad:*

Regla de dualidad. — *La negación de una forma normal se obtiene sustituyendo las negaciones por afirmaciones y recíprocamente, así como las conjunciones por disyunciones y recíprocamente.*

1 Ver el ejemplo del § 28, en III.

La ley de dualidad proporciona así el medio para proceder a una inversión inmediata de las operaciones y este resultado capital da cuenta exactamente de la distribución de las mismas operaciones según su carácter complementario, tal como fue expuesto en el § 28. Comencemos, por ejemplo, por la forma normal conjuntiva de la disyunción misma, sea $p \vee q$. Si aplicamos la regla de dualidad obtendremos $\bar{p} . \bar{q}$, es decir la negación conjunta, que constituye precisamente (ver § 28, en IV) la operación complementaria de $(p \vee q)$, y por lo tanto su inversa: en efecto, $\bar{p} . \bar{q}$ es aquella de las cuatro operaciones de base $(p . q)$, $(p . \bar{q})$, $(\bar{p} . q)$, $(\bar{p} . \bar{q})$ que falta a la forma normal disyuntiva de la disyunción, sea $(p . q) \vee (p . \bar{q}) \vee (\bar{p} . q)$. Se tiene pues:

$$(124) \qquad \overline{(p \vee q)} \leftrightarrow \bar{p} \cdot \bar{q} \qquad \text{y} \qquad \overline{(\bar{p} \cdot \bar{q})} \leftrightarrow (p \vee q)$$

Ejemplo: Si niego la alternativa "o terrestre o acuático o ambos" (anfibio) obtengo "ni terrestre ni acuático" (ni en consecuencia, tampoco anfibio). Y recíprocamente, está excluido que un ser vivo no sea ni terrestre ni acuático, es uno u otro o ambos.

Igualmente, si se aplica la ley de dualidad a la forma normal disyuntiva del trilema $(p \vee q)$, se obtiene:

$$(125) \qquad \overline{(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)} \leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee q) \cdot (p \vee \bar{q}) \leftrightarrow (\bar{p} \cdot \bar{q})$$

En efecto, la expresión $(\bar{p} \vee \bar{q}) . (\bar{p} \vee q) . (p \vee \bar{q})$ es la forma normal conjuntiva de la negación conjunta $(\bar{p} \cdot \bar{q})$.

Partamos del mismo ejemplo $(p \vee q)$ = terrestre o acuático. Se tiene entonces: si niego el trilema "ó $p . \bar{q}$ (terrestre y no acuático) ó $\bar{p} . q$ (acuático y no terrestre) o $p . q$ (anfibio) "obtengo" $\bar{p} . \bar{q}$ (ni terrestre ni acuático), por medio de "a la vez $\bar{p} \vee \bar{q}$ (no terrestre o no acuático) y $\bar{p} \vee q$ (no terrestre o acuático) y $p \vee \bar{q}$ (terrestre o no acuático)". La parte común de estos tres dilemas es, en efecto, $\bar{p} . \bar{q}$.

Otro ejemplo de aplicación de la ley de dualidad es el que relaciona las fórmulas (101) y (122) de la afirmación y la negación completas:

$$(126) \qquad \overline{(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})} \leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee q) \cdot (p \vee \bar{q}) \cdot (p \vee q)$$

El segundo miembro de esta ecuación es idéntico a la expresión (122), es decir que equivale efectivamente a (o), complementaria de $(p * q)$.

En cuanto a las propiedades de la disyunción misma, tenemos:

(127) $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$

(128) $(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r) \leftrightarrow (p \vee q) \vee (p \vee r) \leftrightarrow (p \vee q \vee r)$

(129) $p \cdot (q \vee r) \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (p \cdot r)$

Ejemplos: Para (127) "x_i es terrestre o acuático" = "x_i es acuático o terrestre". Para (128), si p = "x_i es un animal terrestre", q = "x_i es un animal marino" y $r = x_i$ es un animal de agua dulce", entonces las distintas distribuciones de la palabra "o" son evidentemente equivalentes. Para (129), los mismos significados de p, q y r dan: "x_i es a la vez terrestre y habita en el mar o en aguas dulces" es equivalente a "x_i es a la vez terrestre y marino o terrestre y de agua dulce a la vez".

Finalmente, las relaciones de la disyunción con las demás operaciones comprenden en particular las importantes transformaciones siguientes:

(130) $(p \vee q) \leftrightarrow (\bar{p} \mid \bar{q})$

En efecto, al ser $(p \vee q)$ la negación de $\bar{p} . \bar{q}$, se tiene entonces $p \vee q \leftrightarrow \bar{p} \mid \bar{q}$, ya que la incompatibilidad ($\mid$) es la negación de la conjunción (.).

Ejemplo: Si una clase de animales posee necesariamente pulmones o branquias $(p \vee q)$, la ausencia de pulmones $(\bar{p})$ es incompatible, para esta clase, con la ausencia de branquias $(\bar{q})$, de donde se tiene: $\bar{p} \mid \bar{q}$.

(131) $\bar{p} \vee \bar{q} \leftrightarrow p \mid q$

En efecto, en virtud de (104), tenemos:

$$\bar{p} \vee \bar{q} \leftrightarrow (\bar{p} \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{\bar{q}}) \vee (\bar{\bar{p}} \cdot \bar{q})$$

es decir, $(\bar{p} . \bar{q}) \vee (\bar{p} . q) \vee (p . \bar{q})$, que es la fórmula de la incompatibilidad $(p \mid q)$.

Ejemplo: "Un ser vivo o bien no es vertebrado $(\bar{p})$ o bien no es invertebrado $(\bar{q})$ o bien no es ninguno de los dos" equivale a "ser vertebrado es incompatible con ser invertebrado".

(132) $(p \vee q) \leftrightarrow (\bar{p} \supset q) \leftrightarrow (\bar{q} \supset p)$

Ejemplo: "x_i es poseedor de pulmones o de branquias o de ambos" significa que para x_i la ausencia de pulmones implica la presencia de branquias y la ausencia de branquias implica la presencia de pulmones.

(133) $$(\bar{p} \vee q) \leftrightarrow (p \mid \bar{q}) \leftrightarrow p \supset q$$

Ejemplo: "O no-mamífero $(\bar{p})$ o vertebrado (q)" equivale a "mamífero (p) es incompatible con no-vertebrado $(\bar{q})$" y equivale además a "mamífero implica vertebrado".

(134) $$(p \vee \bar{q}) \leftrightarrow (\bar{p} \mid q) \leftrightarrow q \supset p$$

El mismo ejemplo invirtiendo los significados de p y de q.

IV. **La negación conjunta:** $(\bar{p} \,.\, \bar{q})$. — La forma normal disyuntiva es simplemente $\bar{p} \,.\, \bar{q}$, mientras que la forma conjuntiva es

(135) $$\bar{p} \cdot \bar{q} \leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q}) \cdot (p \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee q)$$

Hemos visto ya (a propósito de (125)) como se explica esta proposición (135).

La negación de estas dos formas normales nos vuelve a conducir a la disyunción, ya que la negación conjunta es la inversa de la disyunción y la inversa de la inversa es la operación directa:

(136) $$\overline{(\bar{p} \vee \bar{q}) \cdot (p \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee q)} \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \leftrightarrow (p \vee q)$$

y

$$\overline{\bar{p} \cdot \bar{q}} \leftrightarrow p \vee q$$

(Ver para los ejemplos las proposiciones (124) y (125).)

V. **La incompatibilidad:** $(p \mid q)$. — Las dos formas normales disyuntiva y conjuntiva de la incompatibilidad nos son ya conocidas por las proposiciones (106) y (131):

$$p \mid q \leftrightarrow (\bar{p} \cdot \bar{q}) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$$
$$p \mid q \leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$$

(Ver para los ejemplos las proposiciones (106) y (131).

Hay que destacar que esta equivalencia $(p \mid q \leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q})$, que constituye la recíproca de la equivalencia $p \vee q \leftrightarrow \bar{p} \mid \bar{q}$ (proposición

(130)), confiere a la incompatibilidad, con respecto a la disyunción, un papel bien determinado, que llamaremos de ahora en adelante ''reciprocidad''. En efecto $(p \mid q)$, es decir $(\bar{p} \vee \bar{q})$, no es la inversa de $(p \vee q)$, ya que la inversa es $\bar{p} \,.\, \bar{q}$: es la misma operación que $(p \vee q)$, pero entre proposiciones negadas ($\bar{p}$ y $\bar{q}$). Es preciso distinguir pues

$\overline{p \vee q} \leftrightarrow \bar{p} \cdot \bar{q}$ y $\bar{p} \vee \bar{q} \leftrightarrow p \mid q$ (proposiciones (124) y (131)).

Ejemplo: Si $(p \vee q)$ significa "x_1 tiene pulmones o branquias (o ambos a la vez)" la negación $(\overline{p \vee q})$ significa "sin pulmones ni branquias" (respirando pues por la piel), mientras que $(\bar{p} \vee \bar{q})$ significa "o sin pulmones o sin branquias" (por lo tanto la presencia de pulmones es entonces incompatible con la de branquias, pudiendo no obstante faltar ambos).

La incompatibilidad $(p \mid q)$ equivale, por otra parte, a las siguientes implicaciones:

(137) $$(p \mid q) \leftrightarrow (p \supset \bar{q}) \leftrightarrow (q \supset \bar{p})$$

Ejemplo: "Vegetal incompatible con animal" significa que "x_1 es vegetal" implica "x_1 no es animal" y que "x_1 es animal" implica "x_1 no es vegetal".

En efecto, la implicación $(p \supset \bar{q})$ equivale, en virtud de la proposición (108) (§ 28 en VII) a:

(138) $$(p \supset \bar{q}) \leftrightarrow (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{\bar{q}})$$

Ejemplo: "Vegetal implica no-animal" implica que "x_1 puede ser vegetal y no-animal o ni vegetal ni animal o no-vegetal y no ser no-animal".

Y puesto que $\bar{p} \cdot \bar{\bar{q}} \leftrightarrow \bar{p} \cdot q$, esta expresión (138) es idéntica a

$$p \mid q \leftrightarrow \bar{p} \cdot \bar{q} \vee p \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q.$$

Por otra parte, es posible volver a traducir la expresión $(\bar{p} \supset q)$ en lenguaje de incompatibilidad. Desde este punto de vista la negación $\bar{q}$ representa la incompatibilidad de esta proposición q consigo misma, es decir ($\bar{q} \leftrightarrow q \mid q$). En cuanto a la implicación $(p \supset q)$, es la incompatibilidad de la proposición p con la negación de q, ya que la no-implicación $(\overline{p \supset q})$ equivale a $(p \,.\, \bar{q})$. La implicación $(p \supset q)$ se escribirá pues en lenguaje de incompatibilidad $p \mid (q \mid q)$. De lo que se desprende que $(p \supset \bar{q})$ podrá leerse:

(139) $$p \supset \bar{q} \leftrightarrow [p \mid (q \mid \bar{q})] \leftrightarrow (p \mid \bar{\bar{q}}) \leftrightarrow p \mid q$$

En el ejemplo elegido, estas transformaciones significan: (vegetal implica no-animal) = (vegetal incompatible con la negación de la negación de animal) = (vegetal incompatible con animal).

Lo que nos reconduce a la expresión (137).

El gran interés de la incompatibilidad radica, en efecto, como lo descubrió Sheffer[1] en constituir una forma operatoria a la cual todas las demás son formalmente reducibles. Así la negación se expresará, como acabamos de hacerlo, por la incompatibilidad de una proposición con su propia afirmación, de lo que se deduce que la afirmación será la incompatibilidad de una negación consigo misma:

(140) $$\bar{p} \leftrightarrow (p \mid p) \quad \text{y} \quad p \leftrightarrow [(p \mid p) \mid (p \mid p)]$$

La implicación $(p \supset q)$ será la incompatibilidad de la proposición p con la negación de q, que se escribirá:

(141) $$(p \supset q) \leftrightarrow [p \mid (q \mid q)] \quad (\leftrightarrow p \mid \bar{q})$$

Ejemplo: Insecto implica invertebrado = Insecto es incompatible con no-invertebrado.

En el caso de una relación ternaria, tal como $p \supset (q \cdot r)$, se escribirá:

(142) $$p \supset (q \cdot r) \leftrightarrow p \mid (q \mid r)$$

ya que la incompatibilidad $(q \mid r)$ es la negación de $(q \cdot r)$.

Ejemplo: Elefante (p) implica mamífero y vertebrado a la vez = "x_1 es elefante" es incompatible con la incompatibilidad de mamífero y de vertebrado.

La equivalencia al ser una implicación recíproca se deriva de la proposición (141) y la identidad será la implicación de una proposición por sí misma:

(143) $$(p \supset p) \leftrightarrow [p \mid (p \mid p)] \quad (\leftrightarrow p \mid \bar{q})$$

1 Sheffer, 1913.

La conjunción $(p.q)$ equivale a la negación de la incompatibilidad $(p \mid q)$:

(144) $$(p \cdot q) \leftrightarrow [(p \mid q) \mid (p \mid q)]$$

Notemos al respecto, que la conjunción de una proposición consigo misma $(p \,.\, p)$ dará entonces $(p \mid p) \mid (p \mid p)$, lo que nos reconduce a (140) ya que $(p \,.\, p) \leftrightarrow p$.

La alternativa $(p \vee q)$ es la incompatibilidad de $\bar{p}$ y $\bar{q}$ (ver (130)):

(145) $$(p \vee q) \leftrightarrow [(p \mid p) \mid (q \mid q)]$$

La exclusión recíproca $(p \mathrm{w} q)$ será la incompatibilidad de la implicación $(p \supset q)$ y de la implicación $(q \supset p)$:

(146) $$(p \mathrm{w} q) \leftrightarrow [p \mid (q \mid q)] \mid [q \mid (p \mid p)]$$

En cuanto a la afirmación completa misma, es la incompatibilidad de todas las incompatibilidades entre p, q, $\bar{p}$ y $\bar{q}$:

(147) $$(p * q) \leftrightarrow [p \mid q] \mid [(p \mid q) \mid (q \mid p)]$$

En síntesis, todas las relaciones monódicas y biádicas son expresables en lenguaje de incompatibilidad. Lo mismo ocurre con las relaciones ternarias, etc., pero naturalmente con una complejidad creciente. Sin embargo, es evidente que dicha reducción a un símbolo único no implica en absoluto la unicidad de todas las operaciones. Subsisten, en efecto, un dualismo fundamental entre las operaciones directas e inversas, aunque su simbolismo se haya invertido: $\bar{p}$ se escribe en efecto $(p \mid p)$ y p ó $\bar{\bar{p}}$ se escribe $(p \mid p) \mid (p \mid p)$. Igualmente, si la incompatibilidad misma, que es una negación, se escribe $p \mid q$, la implicación, que es una afirmación, se escribe $p \mid (q \mid q)$, es decir $p \mid \bar{q}$. Pero dejando de lado esta inversión del simbolismo, la traducción de todas las operaciones en lenguaje de incompatibilidad conserva pues su diversidad funcional. Dicha traducción presenta igualmente el gran interés de poner en evidencia las sustituciones posibles de una cualquiera de las dieciseis operaciones binarias por cualquier otra.

Notemos, para terminar, que la propiedad esencial de la incompatibilidad es la conmutatividad:

(148) $$(p \mid q) \leftrightarrow (q \mid p)$$

De ahí las dobles implicaciones de la proposición (137). Por el contrario, es evidente que $p \mid \bar{q}$ no equivale a $\bar{p} \mid q$. En efecto:

(149) $$p \mid \bar{q} \leftrightarrow p \supset q \quad \text{y} \quad \bar{p} \mid q \leftrightarrow q \supset p$$

Ver la proposición (141) para un ejemplo de $p \mid \bar{q}$. En cuanto a $(\bar{p} \mid q)$ si no-unicelular $(\bar{p})$ es incompatible con protozoario (q), entonces protozoario implica unicelular.

VI. **La conjunción:** $(p \,.\, q)$. — La conjunción es la inversa de la incompatibilidad, o, si se prefiere, es la operación afirmativa cuya negación es la incompatibilidad. La forma normal disyuntiva es $p \,.\, q$; y la forma normal conjuntiva:

(150) $$(p \cdot q) \leftrightarrow (p \vee q) \cdot (p \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee q)$$

Ejemplo: Si $p =$ "x_1 es mamífero" y $q =$ "x_1 es acuático" entonces $p \,.\, q =$ "x_1 es a la vez mamífero y acuático". En este caso, si x_1 es *a la vez* "mamífero o acuático o ambos $(p \vee q)$" y "mamífero o no-acuático o ambos" $(p \vee \bar{q})$ y "no-mamífero o acuático o ambos $(\bar{p} \vee q)$", entonces no puede ser simultáneamente "mamífero y acuático $(p \,.\, q)$".

Si ahora se niega $(p \,.\, q)$ o el segundo miembro de (150), por medio de la ley de dualidad, se reencuentra la incompatibilidad a título de inversa:

(151) $$\overline{(p \cdot q)} \leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q}) \leftrightarrow (p \mid q)$$ (ver proposición (131))

y

(152) $$\overline{(p \vee q) \cdot (p \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee q)} \leftrightarrow (\bar{p} \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \leftrightarrow (p \mid q)$$

(ver proposición (106)).

Ejemplo: Si x_1 no es a la vez mamífero y acuático, entonces es uno sin ser lo otro o ninguno de los dos.

Por el contrario, si se niegan las dos proposiciones de una conjunción $(p \,.\, q)$ bajo la forma $(\bar{p} \,.\, \bar{q})$, se encuentra una falsedad con-

junta y si se niega esta negación bajo la forma $(\bar{\bar{p}} \, . \, \bar{\bar{q}})$, se reencuentra la conjunción $(p \, . \, q)$. Es preciso pues distinguir $(\bar{p} \, . \, \bar{q})$ y $(\overline{p \, . \, q})$ (proposición (151)): $(\overline{p \, . \, q})$ es la inversa de $(p \, . \, q)$ en el sentido de su negación, mientras que $(\bar{p} \, . \, \bar{q})$ es su recíproca, en el sentido general que atribuiremos de ahora en adelante a la "reciprocidad" (§ 31). En cuanto a la negación de $(\bar{p} \cdot \bar{q})$, es decir $(\overline{\bar{p} . \bar{q}})$, se reencuentra $(\overline{\bar{p} \cdot \bar{q}}) \leftrightarrow (p \vee q)$ (ver proposición (124)).

Al ser la conjunción $(p \, . \, q)$ la negación de la incompatibilidad, se deduce que la negación de la incompatibilidad vuelve a conducir a una conjunción:

(153) $$(\overline{p \mid q}) \leftrightarrow \overline{\bar{p} \vee \bar{q}} \leftrightarrow (p \cdot q)$$

Ejemplo: "x_1 es mamífero" no es incompatible con "x_1 es acuático" equivale a "es falso que x_1 sea o no-mamífero o no-acuático" y equivale por lo tanto a "x_1 es a la vez mamífero y acuático".

Las relaciones de la conjunción con la implicación son:

(154) $$(p \cdot q) \leftrightarrow \overline{p \supset \bar{q}} \leftrightarrow \overline{q \supset \bar{p}}$$

puesto que $(\overline{p \supset \bar{q}}) \leftrightarrow (p \cdot \bar{\bar{q}}) \leftrightarrow (p \cdot q)$ en virtud de las proposiciones (108) y (109).

y $(\overline{q \supset \bar{p}}) \leftrightarrow (\bar{\bar{p}} \cdot q) \leftrightarrow (p \cdot q)$ en virtud de las proposiciones (110) y (111).

Ejemplo: Si "x_1 es a la vez mamífero y acuático" es falso que mamífero implique no-acuático y que acuático implique no-mamífero.

Inversamente, se tiene:

(155) $$\overline{(p \cdot \bar{q})} \leftrightarrow (\bar{p} \vee q) \leftrightarrow (p \supset q)$$

(*cf.* proposición (133)).

Retomemos el mismo ejemplo que para la proposición (133): Si es falso que "x_1 no es a la vez mamífero (p) y no-vertebrado $(\bar{q})$" entonces es "o no-mamífero $(\bar{p})$ o vertebrado (q)", por lo tanto "x_1 es mamífero" implica "x_1 es vertebrado".

La transformación de $(\overline{p \, . \, \bar{q}})$ en $(\bar{p} \vee q)$ está dada por la ley de dualidad.

Notemos finalmente que la conjunción es conmutativa:

(156) $(p \cdot q) \leftrightarrow (q \cdot p)$; $(\bar{p} \cdot q) \leftrightarrow (q \cdot \bar{p})$; etc.

Es distributiva en relación a la disyunción (proposición (129)) y a sí misma:

(157) $[p \cdot (q \cdot r)] \leftrightarrow [(p \cdot q) \cdot (p \cdot r)]$

Por otra parte, se tiene:

(158) $[p \cdot (q \supset r)] \rightarrow [(p \cdot q) \supset (p \cdot r)]$

Inútil insistir en su papel en la ley de dualidad.

VII. **El condicional:** $(p \supset q)$. — Las formas normales del condicional son:

$$p \supset q \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$$

(*cf.* proposición (108))

(159) $p \supset q \leftrightarrow \bar{p} \vee q$

Ver el ejemplo de la proposición (108). Para la proposición (159) nos da "o bien x_1 no es mamífero, o bien es vertebrado".

De estas fórmulas se extrae por contraposición:

(160) $p \supset q \leftrightarrow \bar{q} \supset \bar{p} \leftrightarrow q \vee \bar{p}$

En efecto, si mamífero (p) implica vertebrado (q), entonces "si x_1 es no-vertebrado, es no-mamífero", puesto que los no-mamíferos $\bar{P}$ comprenden todos los no-vertebrados ($\bar{P}\bar{Q}$) además de los vertebrados no-mamíferos ($\bar{P}Q$). Es decir $\bar{q} \supset \bar{p}$. De $\bar{q} \supset \bar{p}$ se deduce (en virtud de (159)) $\bar{\bar{q}} \vee \bar{p}$, es decir $q \vee \bar{p}$ $(\leftrightarrow \bar{p} \vee q)$.

De esta contraposición $p \supset q \leftrightarrow \bar{q} \supset \bar{p}$, puede deducirse entonces:

(161) $(\bar{p} \supset q) \leftrightarrow (\bar{q} \supset p) \leftrightarrow (p \vee q)$

(*cf.* proposición (132)).

En efecto, $\bar{p} \supset q$ da $\bar{q} \supset \bar{\bar{p}}$ en virtud de (160), es decir $\bar{q} \supset p$, estas dos implicaciones $\bar{p} \supset q$ y $\bar{q} \supset p$ equivalen a una disyunción

en virtud de la proposición (159) (ver el ejemplo dado a propósito de la fórmula (132)).

Se deduce igualmente, de (160) y de (159) que:

(162) $$(p \supset \bar{q}) \leftrightarrow (q \supset \bar{p}) \leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q}) \leftrightarrow (p \mid q)$$

(*cf.* proposición (137)).

(Ver el ejemplo dado a propósito de (137)).

La proposición (159) permite establecer que la relación $p \rightarrow q$, que se define por la condición $\vdash p \supset q$, puede definirse igualmente por la condición $\vdash \bar{p} \vee q$. Sólo pues los valores de verdad de p y de q intervienen en esta relación de implicación, llamada *material*. Se tiene además:

(163) $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow r$ entonces $p \rightarrow r$.

Ejemplo: Gasterópodo implica molusco; molusco implica invertebrado, luego gasterópodo implica invertebrado.

En cuanto a las relaciones entre el condicional y la conjunción, tenemos:

(164) $$\overline{p \supset \bar{q}} \leftrightarrow p \cdot q \quad \text{y} \quad p \supset q \leftrightarrow \overline{p \cdot \bar{q}}$$

(ver proposiciones (154) y (155)), ya que en razón de la ley de dualidad $(\overline{p \cdot \bar{q}}) \leftrightarrow (\bar{p} \vee q)$ y $(p \cdot \bar{q})$ es la negación de la implicación (ver VIII).

Hemos enunciado ya las relaciones de la implicación con la incompatibilidad. Veamos ahora las combinaciones ternarias que expresan la distribución de la implicación:

(165) $$[p \supset (q \supset r)] \leftarrow [(p \supset q) \supset (q \supset r)]$$

(166) $$[p \supset (q \cdot r)] \rightarrow [(p \supset q) \cdot (p \supset r)]$$

(167) $$[p \supset (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \supset q) \vee (p \supset r)]$$

(168) $$[p \supset (q \equiv r)] \leftrightarrow [(p \supset q) \equiv (p \supset r)]$$

(169) $$[p \vee (q \supset r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \supset (p \vee r)]$$

Así caracterizada, la implicación plantea un curioso problema, o mejor dicho, un problema que ha sido curiosamente complicado en el terreno del atomismo lógico, pero que encuentra una solución simple en el plano de las estructuras operatorias de conjunto. La implicación $p \rightarrow q$ significa la verdad de:

$$(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q}),$$

se trata de explicar, en efecto, por qué puede darse simultáneamente $p . q$ y $\bar{p} . q$, mientras que no se tiene a la vez $p . q$ y $p . \bar{q}$. Se explica la cosa en general diciendo que "lo falso implica lo verdadero" y se justifica esta fórmula extravagante constatando que la implicación $p \rightarrow q$ permanece verdadera aún cuando p sea falso. Pero ¿debe verdaderamente interpretarse la conjunción $\bar{p} . q$ como si equivaliese a $\bar{p} \supset q$ (lo que es incompatible con $p \supset q$, ya que $\bar{p} \supset q \leftrightarrow p \vee q$), o como si la lógica tuviese que considerar, además de las implicaciones verdaderas tales como "vertebrado (p) implica animal (q)" las implicaciones falsas tales como "guijarro $(\bar{p})$ implica animal (q)", a fin de enriquecer la proposición q con todos los absurdos $(\bar{p})$ que pudieran asociársele además de la verdad de $p . q$? ¿Por qué pues, en ese caso, admitir la verdad simultánea de $\bar{p} . q$ y $\bar{p} . \bar{q}$, lo que significa sin embargo la evidencia de que no todos los $\bar{p}$ se hallan asociados a q? ¿Debe introducirse entonces una elección arbitraria entre las falsedades $\bar{p}$, entre las que impliquen q y las que no; o dicha repartición $\bar{p} . q$ y $\bar{p} . \bar{q}$ es ella misma susceptible de una formulación coherente?

En realidad, la verdad simultánea de $p . q$ y $\bar{p} . q$ se deriva directamente de la naturaleza no recíproca de la implicación, que constituye una relación asimétrica por oposición a la equivalencia $p \longleftrightarrow q$: si se tiene $p \rightarrow q$ sin que se tenga $q \rightarrow p$, es decir sin que $p \leftrightarrow q$, es pues por la misma definición ($p \supset q \leftrightarrow p \cdot q \vee \bar{p} \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q}$ en oposición a $p \equiv$ $\equiv q \longleftrightarrow p . q \vee \bar{p} . \bar{q}$), que la proposición p no es la única que implica q, y que otras proposiciones, que impliquen $\bar{p}$, implicarán también q; pero no todas las proposiciones que impliquen $\bar{p}$ implicarán también q, lo que muestra bien que se trata siempre de verdades y no de esa seudoregla carente de significado, según la cual lo falso implica lo verdadero. Es lo que se ve claramente al traducir la implicación en un modelo de inclusión de clases: si $P =$ los vertebrados y $Q =$ los animales, entonces $PQ =$ los animales vertebrados y $\bar{P}Q =$ los animales

invertebrados: por lo tanto, si $p = x_1 \in P$ y $q = x_1 \in Q$ se tiene $p \cdot \bar{q}$ y $\bar{p} \cdot q$ verdaderos, sin que haya que admitir que $\bar{p} \cdot q$ sea una implicación de lo verdadero por lo falso.

La razón última de esta dificultad radica pues en que la relación asimétrica de implicación permanece incompleta en su forma: no expresa todo lo que implica en sí misma, es decir, que deja sin formular relaciones que considera no obstante como necesarias. En una relación de incompatibilidad (o de contrarios) que puede definirse por la condición $\vdash p \mid q$, o en una relación de subcontrarios que puede definirse por la condición $\vdash p \vee q$, la proposición p es la única que aparece dada para presentar la relación considerada (|) o (v) con q: nada indica, en la expresión misma de la relación, que intervengan otras proposiciones implícitas, así de $(p \mid q)$ o de $(p \vee q)$ no puede deducirse directamente la existencia de una tercera proposición distinta de p (y de $\bar{p}$) o de q (y de $\bar{q}$). Por el contrario, la relación $(p \supset q)$ implica la distinción entre dos casos posibles para $\bar{p}$: aquel en que $\bar{p}$ implica q, y aquel en que no lo implica. Se responderá que se tratan de simples conjunciones: $\bar{p} \cdot q$ y $\bar{p} \cdot \bar{q}$. Pero hay algo más: $(p \longrightarrow q)$ significa, si no se tiene también $(q \longrightarrow p)$, que p no es la única que implica q: existe por lo menos una proposición p' tal que $(p' \longleftrightarrow \bar{p} \cdot q)$ y que $(p' \longrightarrow q)$.

Nada muestra más claramente la existencia de esta proposición p' que la traducción de $(p \supset q)$ por la disyunción $(\bar{p} \vee q)$ según la proposición (159). En efecto, escribir $(\bar{p} \vee q)$ por $(p \supset q)$, es enunciar el hecho que hay tres posibilidades a considerar: ó $\bar{p} . q$ ó $\bar{\bar{p}} . q$ (es decir $p . q$) ó $\bar{p} . \bar{q}$. Son las mismas posibilidades que contiene ya $(p \supset q)$, pero el signo (v), que expresa los tres brazos de un trilema, introduce una simetría mucho más explícita entre las conjunciones $p \cdot q$ y $\bar{p} \cdot q$ que coloca así en un mismo plano, en oposición a $(p \supset q)$ que acentúa la asociación $(p \cdot q)$.

En síntesis, establecer la implicación $p \longrightarrow q$, así como su equivalencia en relación al trilema $\bar{p} \vee q$, es afirmar la existencia de dos implicaciones conjuntas $(p \longrightarrow q)$ y $(p' \longrightarrow q)$. La relación binaria de implicación constituye pues, de hecho, una expresión abreviada cuyo significado completo se refiere a una relación ternaria:

(170) $(p \longrightarrow q)$ entonces $[(p \longrightarrow q) \cdot (p' \longrightarrow q)]$ en la que $p' \longleftrightarrow \bar{p} \cdot q$

Esta relación ternaria entre dos implicaciones y una conjunción expresa en realidad una equivalencia entre q y $(p \vee p)$:

(171) $[(p \rightarrow q)$ y $(p' \rightarrow q)]$ entonces $[q \leftrightarrow (p \vee p')]$

es decir que:

(172) $(p \rightarrow q)$ entonces $[q \leftrightarrow (p \vee p')]$

Ejemplo: Si "x_1 es vertebrado" implica "x_1 es un animal", entonces "x_1 es un animal" equivale a "x_1 es un vertebrado o un invertebrado".

Se encuentra aquí el exacto paralelismo con lo que ocurre en el terreno de las operaciones intraproposicionales, en donde $A \subset B$ significa en realidad $B = A \cup A'$. Puede entreverse pues la importancia de las proposiciones (170) a (172) para el "agrupamiento" de las proposiciones.

VIII. **El no-condicional:** $(\overline{p \supset q})$ o $(p \,.\, \bar{q})$. — Como se ha visto en el § 28, el condicional forma parte de un sistema de cuatro operaciones, que comprenden ella misma, su inversa que es el no-condicional $(p \,.\, \bar{q})$, su recíproca $(q \supset p)$ y la inversa de esta última $(\bar{p} \,.\, q)$. La inversa de $p \supset q$ es, en efecto, $p \,.\, \bar{q}$, única conjunción excluida de:

$$p \supset q \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$$

La forma normal disyuntiva de $p \cdot \bar{q}$ es $p \,.\, \bar{q}$, mientras que su forma normal conjuntiva es:

(173) $\overline{p \supset q} \leftrightarrow (p \vee q) \cdot (p \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee \bar{q})$

La proposición (173) resulta de la proposición (108) negada por la ley de dualidad:

(174) $\overline{(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})} \leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q}) \cdot (p \vee \bar{q}) \cdot (p \vee q)$

La proposición $p \,.\, \bar{q}$ es pues la inversa de $p \supset q$.

IX. El condicional inverso: $(p \subset q)$ ó $(q \supset p)$. — Esta relación tiene como formas normales disyuntiva y conjuntiva:

$$q \subset p \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$$

(*cf.* proposición (110))

(175) $$p \subset q\ (\leftrightarrow q \supset p) \leftrightarrow p \vee \bar{q}$$

Ejemplo: Si p = "x_i es vertebrado" y q = "x_i es un pájaro", entonces decir que p está implicado por q significa que "x_i es vertebrado y pájaro, o vertebrado sin ser pájaro o ninguna de las dos cosas". Lo que significa también (175) que "o x_1 es vertebrado o no es pájaro".

De $p \subset q$, es decir de $q \supset p$, puede extraerse pues (en virtud de (160)):

(176) $$q \supset p \leftrightarrow \bar{p} \supset \bar{q}$$

Ejemplo: Pájaro implica vertebrado ⟷ no-vertebrado implica no-pájaro.

Existe pues una importante relación entre los condicionales directo e inverso $(p \supset q)$ y $(p \supset q)$: uno es el inverso del otro, pero no en el sentido de su negación o complementario, sino en el de su *recíproco*. Podemos dar ahora, por lo tanto, un sentido general al término "reciprocidad", el cual hemos utilizado ya para caracterizar las relaciones del trilema $(p \vee q)$ con la incompatibilidad $(p \mid q \longleftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q})$ o las de la conjunción $(p \,.\, q)$ con la negación conjunta $(\bar{p} \,.\, \bar{q})$: la recíproca de una operación es la misma operación, pero efectuada sobre las proposiciones negadas. Así, la recíproca de $(p \vee q)$ es $(\bar{p} \vee \bar{q} \longleftrightarrow p \mid q)$ y la de $(\bar{p} \vee \bar{q})$ es $(\bar{\bar{p}} \vee \bar{\bar{q}}) \longleftrightarrow (p \vee q)$. En el caso del condicional $(p \supset q)$ la recíproca es por lo tanto $(\bar{p} \supset \bar{q})$. Ahora bien, $(\bar{p} \supset \bar{q})$ equivale precisamente a $(q \supset p)$ (proposición (176)). Inversamente, la recíproca de $(q \supset p)$ es $(\bar{q} \supset \bar{p})$ que equivale a $(p \supset q)$ como se ha visto en la proposición (160).

Pero, ¿por qué el término de "reciprocidad"? (entendiéndose por otra parte que la recíproca de una operación puede ser falsa o verdadera cuando esta operación es verdadera). Recordemos en principio que todas las relaciones binarias pueden expresarse bajo la forma de condicionales (como también en cualquier otra forma): por ejemplo $(p \vee q) \longleftrightarrow (\bar{p} \supset q)$ y $(\bar{q} \supset p)$; $(p \mid q) \longleftrightarrow (p \supset \bar{q})$ y $(q \supset \bar{p})$; $(p . q) \longleftrightarrow (\overline{p \supset \bar{q}})$, etc. Ahora bien, en el caso del condicional $(p \supset q)$

la recíproca $(\bar{p} \supset \bar{q})$ no es otra cosa que la misma relación $(\supset)$, pero con permutación, ya sea de los términos $(q \supset p)$, o del mismo signo $(p \subset q)$. La recíproca de "si p entonces q" es por lo tanto "si q entonces p", lo que se relaciona con el sentido ordinario de la palabra "reciprocidad".

Pero, más aún: cuando la recíproca de un condicional es verdadera, como el condicional mismo, su conjunción constituye un bicondicional:

(177) $$(p \supset q) \cdot (q \supset p) \leftrightarrow p \equiv q$$

Dicho de otro modo, y refiriéndonos ahora a las relaciones correspondientes, el producto de la composición de una implicación con su recíproca da una equivalencia, al igual que en el caso de los agrupamientos de relaciones (cap. III), en oposición a los agrupamientos de clases, el producto de las operaciones aditivas directas e inversas (inversas en el sentido precisamente de la reciprocidad) daba una equivalencia. Se comprende entonces el valor operatorio que cobran las proposiciones (170) a (172) en un agrupamiento de implicaciones: la equivalencia entre $(p \vee p')$ y q supone la posibilidad de la doble composición $(p \vee p') \longrightarrow q$ y $q \longrightarrow (p \vee p')$ que caracteriza la reversibilidad de todo agrupamiento.

X. El no-condicional inverso: $(\overline{p \subset q})$ ó $(\bar{p} \cdot q)$. — La negación (es decir, la operación inversa en el sentido de la complementariedad) del condicional inverso $(q \supset p)$ es la expresión $(\bar{p} \,.\, q)$ cuya forma normal disyuntiva es $(\bar{p} \,.\, q)$ y la forma conjuntiva:

(178) $$\overline{(p \subset q)} \leftrightarrow (p \vee q) \cdot (\bar{p} \vee q) \cdot (\bar{p} \vee \bar{q}) \quad (\leftrightarrow \bar{p} \cdot q)$$

Ejemplo: Si $p =$ "x_i es un molusco (P)" y $q =$ "x_i es un insecto (Q)", se tiene $\overline{q \supset p} = \bar{p} \cdot q$.

La expresión $\bar{p} \,.\, q$ y la proposición (178) constituyen pues la negación de $(p \,.\, q) \vee (p \,.\, \bar{q}) \vee (\bar{p} \,.\, \bar{q})$ en el sentido de la complementariedad, ya que se tiene (regla de dualidad):

(179) $$\overline{(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})} \leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee q) \cdot (p \vee q)$$

Por otra parte, $(\bar{p} \cdot q)$ es la recíproca de $(p \cdot \bar{q})$ (operación VIII), ya que

$$\bar{p} \cdot \bar{\bar{q}} \leftrightarrow \bar{p} \cdot q.$$

De lo que se deriva el hecho fundamental que si la composición de dos condicionales da una bicondicional (177), la composición de dos no-condicionales da un bi-condicional negativo, es decir una exclusión recíproca:

(180) $$(\bar{p} \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \leftrightarrow (p \mathrm{w} q)$$

Es importante comprender desde ahora la razón de estas composiciones esenciales. Si unimos miembro a miembro por medio de la operación (.) que es el equivalente proposicional de la intersección, las formas normales disyuntivas del condicional $(p \supset q)$ y su recíproca $(q \supset p)$, obtenemos:

(181)
$$\begin{array}{l} (p \supset q) \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q}) \\ \underline{(\cdot)\ (q \supset p) \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})} \\ (p \equiv q) \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (o) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q}) \end{array}$$

Las dos conjunciones $(\bar{p} \cdot q)$ y $(p \cdot \bar{q})$ son, en efecto, contradictorias entre sí, ya que $(p . \bar{p}) = o$ y $(q . \bar{q}) = o$. Pero son además contradictorias, la primera con $(q \supset p)$, ya que $(\bar{p} \cdot q)$ es un no-condicional inverso, y la segunda con $(p \supset q)$, ya que $(p \cdot \bar{q})$ es un no-condicional (directo).

Por el contrario, si retenemos las conjunciones $(p \cdot \bar{q})$ y $(\bar{p} \cdot q)$ para unirlas una a otra por medio de la operación $(\vee)$, la reunión de esos dos no-condicionales da la exclusión $(p \mathrm{w} q)$ como ya se ha visto (proposición (180)).

(182) $$[(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)] \leftrightarrow [(p \equiv \bar{q}) \vee (q \equiv \bar{p})] \quad (\leftrightarrow p \mathrm{w} q)$$

Así, los dos condicionales $p \supset q$ y $q \supset p$, por una parte, y los dos no-condicionales $p \cdot \bar{q}$ y $\bar{p} \cdot q$, por la otra, forman un sistema natural que se expresa por la complementariedad del bicondicional $p \equiv q$, producto conjuntivo de los dos primeros, y de la exclusión recíproca $p \mathrm{w} q$, producto disyuntivo de los dos segundos.

XI. El bicondicional: $p \equiv q$. — Esta operación, por la relación de equivalencia que engendra ($p \leftrightarrow q = \mathrm{d}f \vdash p \equiv q$) desempeña un papel fundamental en la deducción. La relación $\longleftrightarrow$ asegura, en efecto, el juego de las sustituciones, mientras que la relación $\longrightarrow$ y la relación $\longleftarrow$ marcan la dirección ascendente o descendente del proceso operatorio.

Las formas normales disyuntiva y conjuntiva de la operación bicondicional son:

(183)
$$(p \equiv q) \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$$
$$(p \equiv q) \leftrightarrow (p \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee q)$$

XII. La exclusión recrípoca: $(p \mathrm{w} q)$. — La operación $(p \mathrm{w} q)$ se simboliza en general mediante la disyunción $(p \vee q)$ respecto de la cual representa el caso particular en que esta disyunción es exclusiva. No obstante implica no sólo un significado distinto (el de un dilema y no un trilema), sino también caracteres formales diferentes. Sus formas normales son:

(*cf.* proposición (113)) $$(p \mathrm{w} q) \leftrightarrow (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$$

(185) $$(p \mathrm{w} q) \leftrightarrow (p \vee q) \cdot (\bar{p} \vee \bar{q})$$

Ejemplo: "Vivo excluye mineral" = "vivo y no-mineral o no-vivo y mineral" $\leftrightarrow$ "a la vez (vivo o mineral) *y* (no-vivo o no-mineral)".

Ahora bien, se advierte inmediatamente que estas dos formas normales constituyen la negación (por la regla de dualidad) de las del bicondicional:

(186) $$\overline{(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})} \leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q}) \cdot (p \vee q)$$

y

(187) $$\overline{(p \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee q)} \leftrightarrow (\bar{p} \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q})$$

La disyunción no-exclusiva tiene, por el contrario, como inversa (negación) la conjunta: $\overline{p \vee q} \longleftrightarrow \bar{p} \,.\, \bar{q}$. Por otra parte, contrariamente al trilema, la exclusión recíproca es totalmente simétrica. Ambas son conmutativas:

(188) $$(p \mathrm{w} q) \leftrightarrow (q \mathrm{w} p)$$ (*cf.* proposición (127))

pero la conmutatividad no implica no obstante la simetría completa de la relación $(p \vee q)$. En efecto, la recíproca de $(p \vee q)$ es $(\bar{p} \vee \bar{q})$, es decir la incompatibilidad $(p \mid q)$, mientras que la recíproca de $(p \text{ w } q)$ es $(\bar{p} \text{ w } \bar{q})$, es decir nuevamente $(p \text{ w } q)$:

$$(189) \qquad (\bar{p} \text{ w } \bar{q}) \leftrightarrow (\bar{p} \cdot \bar{\bar{q}}) \vee (\bar{\bar{p}} \cdot \bar{q}) \leftrightarrow (\bar{p} \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \leftrightarrow (p \text{ w } q)$$

Ahora bien, la simetría completa se define precisamente por la equivalencia de las operaciones recíprocas entre sí.

Otra diferencia esencial entre la exclusión y la disyunción no exclusiva, se refiere a sus relaciones con el condicional. Dos cosas hay que advertir a este respecto. En primer lugar, mientras que el trilema se traduce por el doble condicional $(p \vee q) \leftrightarrow (\bar{p} \supset q) \leftrightarrow (\bar{q} \supset p)$, sin que la proposición p equivalga en esta caso a $\bar{q}$ ni q a $\bar{p}$, la exclusión recíproca da:

$$(190) \qquad (p \text{ w } q) \leftrightarrow (\bar{p} \equiv q) \leftrightarrow (\bar{q} \equiv p)$$

ya que las dos únicas posibilidades verdaderas son $(p \,.\, \bar{q})$ y $(\bar{p} \,.\, q)$. En segundo lugar, y como consecuencia de (190), el bicondicional $(p \equiv q)$ se traduce como $(\bar{p} \text{ w } q)$ y no como $(\bar{p} \vee q)$ como el condicional $(p \supset q)$.

XIII. La afirmación de p: símbolo $p[q]$. — Formas normales:

(*cf.* proposición (114)) $\quad p[q] \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q})$

(191) $\quad p[q] \leftrightarrow (p \vee q) \cdot (p \vee \bar{q})$

Ejemplo: "x_1 es mamífero y acuático o mamífero y no acuático" $\leftrightarrows$ (191) "x_1 es a la vez mamífero o acuático y mamífero o no acuático".

Esta operación es pues la simple afirmación de p se de ó no q. Le falta la asociación $(\bar{p} \,.\, \bar{q})$ para constituir un condicional inverso $(q \supset p)$.

Su recíproca $(\bar{p} \,.\, q) \vee (\bar{p} \,.\, \bar{q})$ es idéntica a su inversa (operación XIV), dado que se trata de una simple afirmación de p, su negación por lo tanto desempeña el doble papel de inversa y de recíproca.

XIV. La negación de p: símbolo $\bar{p}[q]$. — Formas normales:

(*cf.* proposición (115)) $\bar{p}[q] \leftrightarrow (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$

y

(192) $$\bar{p}[q] \leftrightarrow (\bar{p} \vee q) \cdot (\bar{p} \vee \bar{q})$$

Esta operación es la inversa de la precedente, ya que:

(193) $$\overline{(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q})} \leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee q)$$

y

$$\overline{(p \vee q) \cdot (p \vee \bar{q})} \leftrightarrow (\bar{p} \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$$

La recíproca de $\bar{p}[q]$ es igualmente su inversa $p[q]$.

XV. La afirmación de q**: símbolo** $q[p]$. — Formas normales:

(*cf.* proposición (116)) $q[p] \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q)$

y

(195) $$q[p] \leftrightarrow (p \vee q) \cdot (\bar{p} \vee q)$$

Le falta a la operación $q[p]$ la conjunción $(\bar{p} . \bar{q})$ para ser un condicional $(p \supset q)$.

XVI. La negación de q**: símbolo** $\bar{q}[p]$. — Formas normales:

(*cf.* proposición (117)) $\bar{q}[p] \leftrightarrow (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$

y

(196) $$\bar{q}[p] \leftrightarrow (p \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee \bar{q})$$

La negación de las formas normales de $q[p]$ da esta misma operación $\bar{q}[p]$:

(197) $$\overline{(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q)} \leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q}) \cdot (p \vee \bar{q})$$

y

(198) $$\overline{(p \vee q) \cdot (\bar{p} \vee q)} \leftrightarrow (\bar{p} \cdot \bar{q}) \vee (p \cdot \bar{q})$$

La recíproca de $\bar{q}[p]$ es $q[p]$; nuevamente pues la recíproca es idéntica a la inversa.

§ 31. LOS MECANISMOS OPERATORIOS FUNDAMENTALES DE LA LOGICA INTERPROPOSICIONAL BIVALENTE.

Se tratará ahora de extraer, de la enumeración precedente, una tabla de los mecanismos operatorios esenciales que determinan las transformaciones interproposicionales, y compararlos con los de la lógica intraproposicional.

Es muy arbitrario, en efecto, reducir las operaciones interproposicionales a un número cualquiera, sin justificar dicha elección por un estudio de su estructura de conjunto: uno con Sheffer ($|$), dos con Frege ($-$ y $\supset$), Russell ($-$ y $\vee$) o Brentano ($-$ y $.$), etc. No se trata solamente en este tipo de reducciones, de una economía de notaciones (lo cual supone por otra parte un esfuerzo inversamente proporcional demandado al lector), sino de una creencia corriente en lo que Couturat llamaba el carácter ''manifiestamente antropomórfico'' de la noción de operación: esta se reduce, en efecto, según él, a una simple relación. Es cierto que, desde entonces, se ha manifestado una tendencia operacionalista en determinadas corrientes del pensamiento logístico: se hablará así de dieciseis ''operadores'' binarios, para subrayar su capacidad de desarrollarse en operaciones, y se designará incluso estas con el término de "manipulations" (en lengua inglesa) [1']. Pero la mayoría de los autores continúan asimilando la noción de operación a una simple relación. Ahora bien, si caracterizamos la operación por su propiedad esencial, que es la de ser una transformación reversible, una operación se distingue claramente de una relación, ya que esta última constituye una realidad transformable y no la transformación misma (*cf.* § 4 y definición 9-10); el mecanismo operatorio no tiene por lo tanto nada de antropomórfico: la reversibilidad es, en efecto, el criterio más profundo y más general de la racionalidad, por oposición a la identidad de la lógica clásica, ya que lo idéntico no es sino el producto de las operaciones directas e inversas.

Ahora bien, si la identidad continúa seduciendo a la mayoría de los lógicos, en oposición a la reversibilidad operatoria misma –única fuente de no-contradicción y por lo tanto de coherencia– es porque

1' En inglés en el original, corresponde "manipulaciones".

TABLA RECAPITULATIVA DE LAS FORMAS NORMALES

OPERACIONES	FORMAS NORMALES DISYUNTIVAS	FORMAS NORMALES CONJUNTIVAS
I. Afirmación completa $(p * q)$	$(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$	(o)
II. Negación completa (o)	(o)	$(\bar{p} \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee q) \cdot (p \vee \bar{q}) \cdot (p \vee q)$
III. Disyunción $(p \vee q)$	$(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$	$(p \vee q)$
IV. Negación conjunta $(\bar{p} \cdot \bar{q})$	$(\bar{p} \cdot \bar{q})$	$(\bar{p} \vee \bar{q}) \cdot (p \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee q)$
V. Incompatibilidad $(p \mid q)$	$(\bar{p} \cdot \bar{q}) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$	$(\bar{p} \vee \bar{q})$
VI. Conjunción $(p \cdot q)$	$(p \cdot q)$	$(p \vee q) \cdot (p \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee q)$
VII. Condicional $(p \supset q)$	$(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$	$(\bar{p} \vee q)$
VIII. No-condicional $(\overline{p \supset q})$	$(p \cdot \bar{q})$	$(p \vee q) \cdot (p \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee \bar{q})$
IX. Condicional inverso $(p \subset q)$	$(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$	$(p \vee \bar{q})$
X. No-condicional inverso $(\overline{q \supset p})$ ...	$(\bar{p} \cdot q)$	$(p \vee q) \cdot (\bar{p} \vee q) \cdot (\bar{p} \vee \bar{q})$
XI. Bicondicional $(p \equiv q)$	$(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$	$(p \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee q)$
XII. Exclusión $(p \text{ w } q)$	$(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$	$(p \vee q) \cdot (\bar{p} \vee \bar{q})$
XIII. Afirmación $p[q]$	$(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q})$	$(p \vee q) \cdot (p \vee \bar{q})$
XIV. Negación $\bar{p}[q]$	$(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$	$(\bar{p} \vee q) \cdot (\bar{p} \vee \bar{q})$
XV. Afirmación $q[p]$	$(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q)$	$(p \vee q) \cdot (\bar{p} \vee q)$
XVI. Negación $\bar{q}[p]$	$(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$	$(p \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee \bar{q})$

existen, de hecho, dos concepciones antagónicas de la verdad formal Este antagonismo no se traduce naturalmente ni por divergencias en los enunciados simbólicos mismos, ni por su interpretación de detalle, sino por la importancia respectiva que se atribuya a los distintos tipos de relaciones y especialmente a la "afirmación completa" (1) llamada ordinariamente "tautología".

A propósito de la teoría de las formas normales, Ch. Serrus dice, por ejemplo: "Las expresiones válidas pueden ser tratadas siempre como tautologías. Hay allí un hecho cuyo significado conviene precisar. La tautología no es solamente la combinación siempre verdadera; es la combinación siempre verdadera sean cuales fueran los valores atribuidos a las variables [...]. A ella se le deben los esquemas fundamentales de la deducción, sin condiciones restrictivas...", mientras que "cada relación, dejando de lado la tautología, supone siempre restricciones por las combinaciones que elimina [...]. Pero, las formas (II-XVI) en apariencia sin relación, se ordenan y se interpretan recíprocamente en la tautología. Gracias a ella, el espíritu del sistema penetra en la lógica formal [...]. Todas las semejanzas y todas las exclusiones (que son, por otra parte, a su manera semejanzas) toman un sentido en la tautología, la que llega a ser así el símbolo de la verdad total" [1].

Si se nos permite una comparación un poco osada, ese papel primordial (y por otra parte igualmente vago, en tanto no proporciona las leyes precisas de la inversión, la reciprocidad, etc.) que Serrus acuerda a la tautología, recuerda el modo en que el "yo absoluto" en el sistema de Fichte, se encuentra obligado, para poder entrar en acción, a escindirse en dos y a apoyarse sobre un "no-yo" ¡previamente cortado de su propia sustancia! En efecto, si la tautología expresa verdaderamente todo por anticipado, resulta bien forzado sin embargo, para decir cualquier cosa sin contentarse con decir "todo" a la vez, "cortar" en ella alguna relación especializada. Ahora bien, es justamente aquí donde interviene la operación, por más antropomórfica que sea, es decir, relativa al sujeto actuante: ella introduce la vida y el movimiento en el seno de la materia "tautológica" inerte y sustituye la dialéctica en lugar de la afirmación absoluta. De donde resultan dos concepciones posibles de la lógica: una concepción estática, que concibe toda operación como un empobrecimiento de la

1 Serrus, 1945, pág. 79-81.

"afirmación completa" (operación I); o una concepción operatoria, que concibe la "tautología" como la materia formal sobre la cual el sujeto trabaja, y que reserva el calificativo de "verdad total" para designar el sistema de todas las operaciones, en tanto transformaciones móviles y reversibles. Desde este segundo punto de vista, la afirmación completa se convierte en una operación más entre otras, de donde puede partirse, y a la que puede retornarse o llegar a partir de otras, en ambos casos la transformación representa la construcción misma. La "afirmación completa" no constituye así más que la verdad simultánea de cuatro conjunciones que puede construirse con dos proposiciones, pero no se trata más que de una operación particular dentro de las dieciseis operaciones que pueden engendrarse a partir de dos proposiciones y sus negaciones; lo mismo ocurre con las ocho conjunciones formadas con tres proposiciones, pero no se trata sino de una de las operaciones entre 256 posibles; lo mismo con las dieciseis conjunciones formadas por cuatro proposiciones, pero hay en ese caso 65.536 operaciones posibles, etc. La "afirmación completa" $(p * q)$ es pues la operación que permite pasar de cuatro conjunciones (o de dos para una sola proposición) a ocho, dieciseis, etc.[1], y no aquella que sitúa estas relaciones entre las 16, 256, 65.536, etc., combinaciones posibles. Dicho de otro modo, no es posible por sí sola volver de n ..., 16, 8 a 4 y a 2 conjunciones, sino que le es preciso una inversa para poder efectuar esta marcha hacia atrás[2]. En síntesis, para la concepción tautologista, estas disposiciones innumerables están en sí mismas contenidas por anticipado a título de simple resultado de combinaciones preexistentes en la afirmación completa, como si, para construir una teoría deductiva, el sujeto pensante y actuante comenzase por arrojar en una urna todas sus ideas y por mezclarlas de modo de extraer enseguida el conjunto de verdades a elegir. Para la concepción operatoria, por el contrario, no son las disposiciones en número indefinido lo que importa realmente al espíritu: es la acción misma que permite pasar de unas a otras y que constituye de este modo el sistema de transformaciones reversibles, el único objeto de estudio de una lógica formal digna de su función constructiva.

Tratemos pues ahora, luego de haber descrito algunas de las transformaciones posibles entre las combinaciones binarias, de analizar sus

1 Ver más adelante § 39 en *B* (Forma IV).
2 Ver igualmente § 39, *B* (IV).

mecanismos operatorios fundamentales. En primer lugar, es preciso hacer algunas distinciones. Partamos de una operación cualquiera, como $(p \vee q)$ considerada en su forma normal disyuntiva $(p \,.\, q) \vee (p \,.\, \bar{q}) \vee (\bar{p} \,.\, q)$.

Recordemos un ejemplo. Si $p =$ "x_i es terrestre" y $q =$ "x_i es acuático", entonces $(p \vee q)$ significa "terrestre y no acuático $(p.\bar{q})$ o acuático y no terrestre $(\bar{p}.q)$ o terrestre y acuático a la vez $(p.q =$ anfibio)".

Puede entonces transformarse la operación en cuestión de tres maneras distintas, todas generales, y obtenerse de este modo tres operaciones nuevas:

1º Su *inversa:* $(\overline{p \vee q}) = \bar{p}\cdot\bar{q}$.

La negación conjunta $\bar{p}.\bar{q}$ significará, en el ejemplo elegido, ni terrestre ni acuático, ni, en consecuencia, tampoco anfibio.

Definición 32. — *La inversa de una operación* (por ejemplo $p \vee q$) *es la complementaria en relación a la afirmación completa* $(p * p)$.

En efecto, al ser la inversa de $(p \vee q)$, $(\bar{p} \,.\, \bar{q})$, se tiene:

(199) $$[(p\cdot q) \vee (p\cdot\bar{q}) \vee (\bar{p}\cdot q)] \vee [\bar{p}\cdot\bar{q}] \leftrightarrow [p * q)$$

Puede pues considerarse la inversa de una operación dada, como su *negación* en el seno de la afirmación completa:

(200) $$\overline{(p \vee q)} \leftrightarrow (p * q)\cdot\overline{(p \vee q)} \leftrightarrow (\bar{p}\cdot\bar{q})$$

es decir,

(200 *bis*) $$\overline{(p \vee q)} \leftrightarrow [(p\cdot q) \vee (p\cdot\bar{q}) \vee (\bar{p}\cdot q) \vee (\bar{p}\cdot\bar{q})] \cdot\overline{[(p\cdot q) \vee (p\cdot\bar{q}) \vee (\bar{p}\cdot q)]} \leftrightarrow [\bar{p}\cdot\bar{q}]$$

Pero la inversa se obtiene también, lo que equivale a lo mismo, por la aplicación de la *regla de dualidad*, es decir por sustitución de las afirmaciones por negaciones y recíprocamente, así como los $(\vee)$ por los $(\,.\,)$ y recíprocamente $\overline{p \vee q} \longleftrightarrow \bar{p} \,.\, \bar{q}$ (ver § 30, en III).

2º Su *recíproca:* $\bar{p} \vee \bar{q}$ $(\longleftrightarrow p \mid q)$, es decir $(\bar{p}.\bar{q}) \vee (p.\bar{q}) \vee (\bar{p} \,.\, q)$.

La operación $(\bar{p} \vee \bar{q})$ excluye pues "anfibio" $(p.q)$, pero retiene "terrestre y no acuático $(p.\bar{q})$" o "acuático y no terrestre $(\bar{p}.q)$" así como "ni acuático ni terrestre $(\bar{p}.\bar{q})$".

Definición 33. — *La recíproca de una operación* (tal como $p \vee q$) *es la misma operación, pero efectuada sobre las proposiciones con signos invertidos*: ($\bar{p} \vee \bar{q}$ en el caso de $p \vee q$).

Designamos esta transformación con el nombre de "reciprocidad" porque, puestas en forma de condicionales, dos operaciones recíprocas una de la otra constituyen condicionales entre proposiciones permutadas. Así, $p \vee q \leftrightarrow \bar{p} \supset q$ y $\bar{p} \vee \bar{q} \leftrightarrow q \supset \bar{p}$.

3º Su *correlativa,* que es $(p \,.\, q)$ para $(p \vee q)$ y recíprocamente. En el ejemplo elegido $p \,.\, q$ significará pues anfibio.

Definición 34. — *Llamaremos "correlativa" de una operación, la operación que se obtiene sustituyendo, en la forma normal correspondiente, los* ($\vee$) *por los* (.) *y recíprocamente, pero sin cambiar los signos.*

La correlativa de $(p \,.\, q) \vee (p \,.\, \bar{q}) \vee (\bar{p} \,.\, q)$ será pues:

$$(p \vee q) \cdot (p \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee q)$$

lo que corresponde pues a $(p \,.\, q)$.

Toda operación tiene pues una inversa (complementaria), una recíproca y una correlativa. Pero sólo las inversas son siempre distintas una de la otra, mientras que las recíprocas pueden ser idénticas entre sí o respecto a las inversas, lo mismo ocurre con las correlativas:

	(1) Operaciones directas:	(2) Inversas de (1)	(3) Recíprocas de (1)	(4) Correlativas de (1)
III	$p \vee q$	$\bar{p} \cdot \bar{q}$	$p \mid q$	$p \cdot q$
V	$p \mid q$	$p \cdot q$	$p \vee q$	$\bar{p} \cdot \bar{q}$
VI	$p \cdot q$	$p \mid q$	$\bar{p} \cdot \bar{q}$	$p \vee q$
IV	$\bar{p} \cdot \bar{q}$	$p \vee q$	$p \cdot q$	$p \mid q$
VII	$p \supset q$	$p \cdot \bar{q}$	$q \supset p$	$\bar{p} \cdot q$
IX	$q \supset p$	$\bar{p} \cdot q$	$p \supset q$	$p \cdot \bar{q}$
VIII	$p \cdot \bar{q}$	$p \supset q$	$\bar{p} \cdot q$	$q \supset p$
X	$\bar{p} \cdot q$	$q \supset p$	$p \cdot \bar{q}$	$p \supset q$
XI	$p \equiv q$	$p \mathrm{w} q$	$p \equiv q$	$p \mathrm{w} q$
XII	$p \mathrm{w} q$	$p \equiv q$	$p \mathrm{w} q$	$p \equiv q$
I	$p * q$	(o)	$p * q$	(o)
II	(o)	$p * q$	(o)	$p * q$
XIII	$p[q]$	$\bar{p}[q]$	$\bar{p}[q]$	$p[q]$
XIV	$\bar{p}[q]$	$p[q]$	$p[q]$	$\bar{p}[q]$
XV	$q[p]$	$\bar{q}[p]$	$\bar{q}[p]$	$q[p]$
XVI	$\bar{q}[p]$	$q[p]$	$q[p]$	$\bar{q}[p]$

Al comparar las distintas relaciones dadas entre las inversas, las recíprocas y las correlativas, se constata que son posibles tres casos:

Existe en primer lugar un conjunto de ocho operaciones que forman dos cuaternos, en los cuales cada uno presenta bajo una forma distinta una operación directa, una inversa, una recíproca y una correlativa (estos términos son naturalmente relativos, ya que cada operación es la inversa de su inversa, la recíproca de su recíproca y la correlativa de su correlativa):

	(1) Directas	(2) Inversas	(3) Recíprocas	(4) Correlativas
A.	$p \vee q$	$\bar{p} \cdot \bar{q}$	$p \mid q$	$p \cdot q$
B.	$p \supset q$	$p \cdot \bar{q}$	$q \supset p$	$\bar{p} \cdot q$

Existe por otra parte, un cuaterno de operaciones cuyas recíprocas son idénticas entre sí y las correlativas idénticas a las inversas:

	(1)	(2)	(3)	(4)
C.	$p \equiv q$	$p \mathbin{w} q$	$p \equiv q$	$p \mathbin{w} q$
	$p * q$	(o)	$p * q$	(o)

Finalmente, un último cuaterno de operaciones presenta las correlativas idénticas entre sí y las recíprocas idénticas a las inversas:

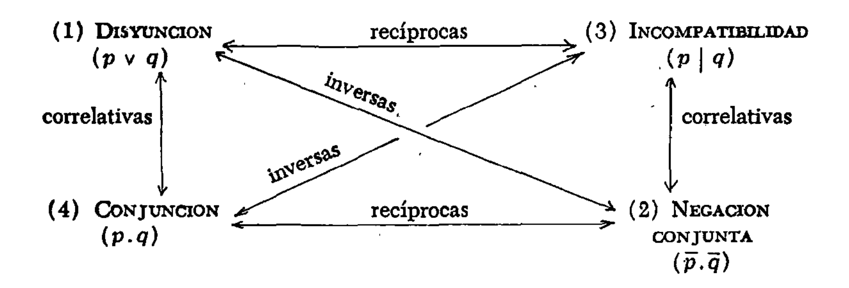
	(1)	(2)	(3)	(4)
D.	$p[q]$	$\bar{p}[q]$	$[\bar{p}]q$	$p[q]$
	$q[p]$	$\bar{q}[p]$	$\bar{q}[p]$	$q[p]$

Son estos cuatro cuaternos los que determinan la estructura real de las operaciones binarias. El último de dichos cuaternos (D) consiste en simples operaciones de afirmaciones y negaciones. El tercero (C) está constituido por las "equivalencias aditivas", positiva ($p \equiv q$) o negativa ($p \mathbin{w} q$, es decir $p \equiv \bar{q}$) y multiplicativas, positiva ($p * q$) o negativa (o). En cuanto a los dos primeros cuaternos (A y B), son los únicos que presentan las inversas, recíprocas y correlativas distintas entre sí. Son pues estas ocho operaciones las que desempeñarán el papel decisivo (es decir, constructivo) en la deducción. Para comprenderlo mejor, examinaremos más de cerca estos tres casos constituidos por los cuaternos A-B, por el cuaterno C y por D:

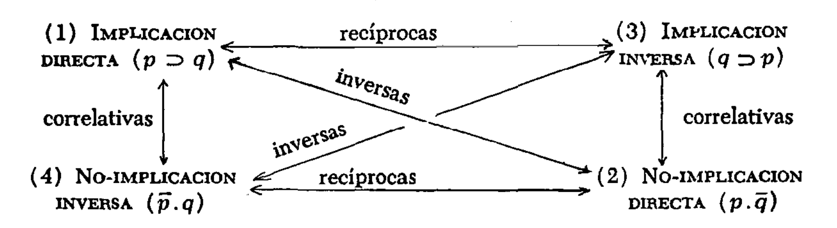
A y B: *Operaciones inversas, recíprocas y correlativas distintas.* —

Los dos primeros cuaternos están constituidos por operaciones cuyas formas normales disyuntivas son asimétricas, es decir, que se hallan formada por una o por tres conjunciones. Por otra parte, las operaciones (1) cuya forma normal disyuntiva presenta tres conjunciones (por ejemplo, $p \vee q$ ó $p \supset q$) tendrán por inversa (2) una operación de una sola conjunción (por ejemplo $\bar{p} \cdot \bar{q}$ ó $p \cdot q$) y recíprocamente. Las recíprocas, (3) presentarán igualmente formas normales disyuntivas de tres o de una sola conjunción, correspondientes a las precedentes ($\bar{p} \vee \bar{q}$ para $p \vee q$; $p \cdot q$ para $\bar{p} \cdot \bar{q}$, etc.). Las correlativas (4) serán entonces las recíprocas de las inversas, o, lo que equivale a lo mismo, las inversas de las recíprocas. Esta triple relación entre las inversas, las recíprocas y las correlativas se traducirá en síntesis por un cruzamiento entre las operaciones (1), (2), (3) y (4), todas distintas:

CUATERNO A



CUATERNO B



Tales son los mecanismos operatorios que transforman las ocho

operaciones binarias asimétricas según las diversas formas posibles de reversibilidad.

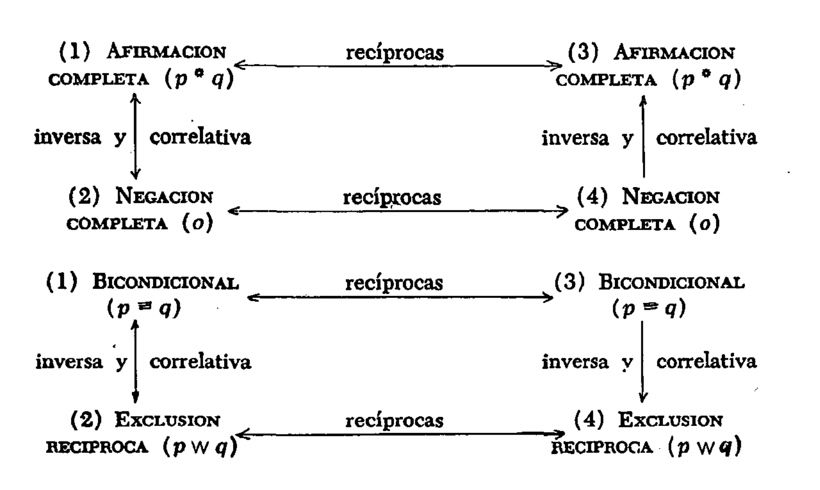
C: *Operaciones inversas distintas, pero operaciones recíprocas idénticas entre sí y operaciones correlativas idénticas a las recíprocas.* — Entre las operaciones cuyas formas normales disyuntivas presentan 0, 2 ó 4 pares de proposiciones (conjunciones), hay que distinguir todavía entre las que presentan una simetría según las conjunciones $(p\,.\,\bar{q})$ y $(\bar{p}\,.\,q)$, ambas verdaderas o ambas falsas, y las que no implican dicha simetría, es decir, que transforman p independientemente de q o a la inversa. La simetría $(p\,.\,\bar{q})$ y $(\bar{p}\,.\,q)$ supone entonces la identidad de las recíprocas entre sí, que caracteriza la equivalencia positiva o negativa $(p \equiv q)$ y $(p \,\mathrm{w}\, q)$, así como la afirmación y la negación completas. En efecto, la recíproca de $(p \equiv q) \longleftrightarrow (p\,.\,q) \vee (\bar{p}\,.\,\bar{q})$ es $(\bar{p}\,.\,\bar{q}) \vee (p\,.\,q)$ es decir, nuevamente $(p \equiv q)$; la de $(p \,\mathrm{w}\, q) \longleftrightarrow (p\,.\,\bar{q}) \vee (\bar{p}\,.\,q)$ es $(\bar{p}\,.\,q) \vee (p\,.\,\bar{q})$, es decir nuevamente $(p \,\mathrm{w}\, q)$, etc. Las correlativas son pues idénticas a las inversas. Por ejemplo, la correlativa de:

$$(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q}) \leftrightarrow (p * q)$$

es

$$(p \vee q) \cdot (p \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee q) \cdot (\bar{p} \vee \bar{q}) \leftrightarrow o$$

CUATERNO C



Se constata que no existe ya cruzamiento, puesto que sólo dos transformaciones sobre cuatro son distintas. Por el contrario, la ley señalada respecto de la recíproca de las inversas, en los cuaternos A y B, se continúa verificando: la operación (1) tiene por inversa (complementaria) una operación (2), que es la recíproca de la inversa (4) de la recíproca (3) de (1); dicho de otro modo, las operaciones recíprocas (1) y (3), que son idénticas entre ellas, tienen por inversas las operaciones (2) y (4) que son ellas mismas recíprocas (e idénticas entre sí).

D: *Operaciones recíprocas distintas una de la otra, pero idénticas a las inversas y operaciones correlativas no distintas entre sí.* — Faltan finalmente las operaciones que ignoran la simetría $(p . q)$ y $(\bar{p} . q)$, es decir, que transforman p independientemente de q ó a la inversa:

CUATERNO D

(1) y (4) AFIRMACION $p[q]$ (correlativas)	⟵ inversa y recíprocas ⟶	(2) y (3) NEGACION $\bar{p}[q]$ (correlativas)
(1) y (4) AFIRMACION $q[p]$ (correlativas)	⟵ inversa y recíprocas ⟶	(2) y (3) NEGACION $\bar{q}[p]$ (correlativas)

La relación de inversión se confunde pues aquí con la de reciprocidad, ya que se trata, en estas operaciones, de simples afirmaciones o negaciones. De lo que se desprende la identidad de las correlativas entre sí. En efecto, la correlativa de $p[q] \longleftrightarrow (p \cdot q) \vee (p . \bar{q})$ es $(p \vee q) . (p \vee \bar{q})$, lo que da nuevamente $p[q]$; etc. (ver proposiciones (191), (192), (195) y (196)). No obstante, la ley enunciada acerca de la recíproca de las inversas se verifica aún: la operación (1) tiene por inversa (2) la recíproca de la inversa (4) de su propia recíproca (3); dicho de otro modo, la operación directa (1) y su recíproca (3) tienen, respectivamente, por inversas dos operaciones (2) y (4) que son ellas mismas recíprocas una de la otra. Pero, en este caso D, la inversa y la recíproca son idénticas entre sí, al igual que las correlativas; solamente las recíprocas son distintas una de la otra, ya que coinciden con las inversas. Nos encontramos pues en presencia de una primera ley general de la lógica interproposicional, que llamaremos "ley de la doble reversibilidad" y que puede demostrarse como sigue:

Hipótesis y definiciones. — Sea $T =$ cuatro conjunciones de proposiciones, tales como $(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$, es decir una "afirmación completa" (o "tautología"). Sea (1) una operación cualquiera, formada por n conjunciones distintas, elegidas entre las precedentes, por lo tanto $n \leqslant 4$ (por ejemplo cero o tres). Una operación (2) llamada *inversa* (o complementaria) [1] de (1) ya que supone $T - n$ conjunciones distintas unas de las otras y distintas de las de (1). Una operación (3) llamada *recíproca* [2] de (1) que resultará de la negación de las proposiciones que intervienen en (1): presentará pues el mismo número de conjunciones que (1), distintas unas de las otras y correspondientes bi-unívocamente a las n conjunciones de (1), pero sin ser necesariamente distintas. Finalmente, la inversión de los signos de (2) dará una operación (4), formada por el mismo número $(T - n)$ de conjunciones que (2), distintas unas de las otras, correspondientes bi-unívocamente a las $T - n$ conjunciones de (2), pero sin ser necesariamente distintas de estas últimas [3].

Teorema I (ley de la doble reversibilidad). — *Las inversas de dos operaciones recíprocas son ellas mismas recíprocas, y las recíprocas de dos operaciones inversas entre sí, son ellas mismas inversas.*

Corolario. — *La inversa de la recíproca de una operación es idéntica a la recíproca de su inversa.*

Se trata en primer lugar de demostrar que la operación (4) que es por hipótesis la recíproca de (2), es decir de la inversa de (1), es necesariamente la inversa de (3), es decir de la recíproca de (1). Ahora bien, la transformación de (1) en (3) se obtiene por simple cambio de las afirmaciones (p ó q) y de las negaciones ($\bar{p}$ ó $\bar{q}$). Lo mismo ocurre con la transformación de (2) en (4). Por otra parte, la reunión de las conjunciones inherentes a las operaciones (1) y (2) da cuatro conjunciones distintas, cuya suma equivale a T, ya que $(1) = n$ conjunciones y $(2) = T - n$ conjunciones. Estas cuatro conjunciones serán distintas, puesto que las conjunciones que intervienen en (1) y en (2) son todas distintas unas de las otras: su reunión equivaldrá pues a la "afirmación completa" bajo su forma inicial T. Pero entonces, lo mismo ocurrirá con las conjunciones que intervienen en las operaciones (3) y (4), ya que sólo los signos (p y $\bar{p}$; q y $\bar{q}$) se invierten al pasar de (1) a (3) y de (2) a (4): la reunión de las

1 Esta definición de la inversa coincide con la definición 32 adoptada más adelante.

2 Esta definición de la recíproca coincide con la definición 33.

3 Esta definición de la operación correlativa (4) no tiene relación con la definición 34.

operaciones (3) y (4) dará pues igualmente cuatro conjunciones distintas; dicha reunión equivaldrá nuevamente a T, ya que la recíproca de una "afirmación completa" es aún una "afirmación completa". La operación (4) es pues la inversa de (3) puesto que ambas son complementarias respecto de T.

Más aún, al ser dos operaciones cualesquiera inversa una de la otra al mismo tiempo que sus recíprocas lo son, se deduce que dos operaciones (**b**) y (**d**), inversas a dos operaciones recíprocas una de la otra (**a**) y (**c**), son necesariamente ellas mismas recíprocas. En efecto, la reunión de las conjunciones comprendidas en (**a**) y en (**b**) equivale entonces a T, y lo mismo ocurre con las conjunciones comprendidas en (**c**) y en (**d**), la recíproca de T continúa siendo T misma: la operación (**d**) será pues la recíproca de (**b**), como (**c**) lo es de (**a**), ya que (**d**) comprende las conjunciones que faltan a (**c**) y (**b**) las que faltan a (**a**).

NOTA. — La demostración anterior es independiente del carácter distinto de las operaciones recíprocas e inversas, así como del de las operaciones recíprocas entre sí (las inversas son, por el contrario, necesariamente distintas). No hace referencia más que a la identidad de la "afirmación completa" y su recíproca: ahora bien, dicha identidad es evidente, ya que esta operación comprende por definición todas las conjunciones posibles y al invertir los signos no se cambia en nada al conjunto.

En lo que precede, no hemos introducido aún la noción de la operación "correlativa" como resultante de la sustitución de los ($\vee$) y los (.) en la forma normal considerada (definición 34). Se tratará pues de probar ahora que la correlativa (caracterizada según la definición 34) es la recíproca de la inversa o (lo que equivale a lo mismo) la inversa de la recíproca, y de dar cuenta de las diversas formas, distintas o no, de correlativas.

Definición. — *Introduzcamos ahora la definición 34: al estar dada una operación bajo su forma normal disyuntiva o conjuntiva, su "correlativa" será la operación resultante de la sustitución de los* ($\vee$) *y los* (.) *y recíprocamente, sin modificación de los signos de las proposiciones.*

Teorema II. — *La "correlativa" de una operación es la recíproca de su inversa. Cuando la recíproca de la operación se confunde con la inversa, la correlativa es entonces idéntica a la operación directa. Cuando la recíproca de una operación le es idéntica, la correlativa*

se confunde por el contrario, con la inversa. Cuando, finalmente, la recíproca es a la vez distinta de la operación directa y de la inversa; la correlativa constituye una cuarta operación distinta.

En efecto, según la ley de dualidad, la inversa (2) de una operación (1) está determinada por la inversión de los (v) y los (.), así como de los valores positivos y negativos de las proposiciones en cuestión. La recíproca (3) de la operación (1) resulta, por otra parte, de la inversión de dichos valores positivos y negativos de las proposiciones, sin modificación de la operación misma, es decir de los (v) y de los (.). Al ser la correlativa (4), por definición la operación resultante de la inversión de los (v) y los (.), sin modificación de los valores positivos y negativos de las proposiciones, será pues la recíproca de (2) que es la inversa de (1). Tres casos son entonces posibles:

a) La recíproca (3) es idéntica a la inversa (2). Entonces la recíproca de la inversa será la inversa de la inversa, es decir la operación directa.

b) La recíproca (3) es idéntica a la operación directa (1); entonces la recíproca de la inversa será la inversa misma: en efecto, si las inversiones de los valores positivos y negativos de las proposiciones no modifican la operación directa, tampoco modificarán la inversa, ya que esta es su complementaria respecto a *T*, y puesto que la "afirmación completa" *T* es idéntica a su recíproca.

c) Las operaciones directa (1), inversa (2) y recíproca (3) son distintas: entonces la recíproca de la inversa será distinta de las tres primeras operaciones, ya que la inversión de los valores positivos y negativos de las proposiciones modifican la operación (como lo prueba la distinción de 1 y de 3), y lo modifican conforme de un modo distinto a la complementariedad (como lo prueba la distinción de 2 y 3).

Corolario I. — *La recíproca de una operación es la inversa de la correlativa de esa misma operación: cuando la recíproca de la operación es verdadera, la correlativa es entonces falsa, y cuando la correlativa es verdadera, la recíproca es falsa.*

Ejemplo: Si una conjunción $(p.q)$ es verdadera, como es el caso de algunos vertebrados que tienen "a la vez branquias y pulmones" y su correlativa $(p \vee q)$ es verdadera ("branquias o pulmones, o ambos"), entonces la recíproca $(\bar{p}.\bar{q})$ (algunos vertebrados no tienen "ni branquias ni pulmones") es falsa. Por el con-

trario, cuando una conjunción $(p.q)$ es verdadera (algunos animales tienen "vértebras y una médula espinal") y su recíproca $(\bar{p}.\bar{q})$ también lo es (algunos animales no tienen "ni vértebras ni médula espinal"), entonces la correlativa $(p \vee q)$ es falsa: "o vértebras (sin médula espinal), o médula espinal (sin vértebras), o ambas".

Igualmente, si $(p \supset q)$ es verdadero y $(q \supset p)$ falso, entonces la correlativa $(\bar{p}.q)$ es verdadera: por ejemplo si mamífero implica vertebrado, sin que la recíproca sea verdadera, entonces "no mamífero y vertebrado" es correcta. Por el contrario, si $(p \supset q)$ y $(q \supset p)$ son ambos verdaderos (vertebrados implica médula espinal y recíprocamente) entonces $(\bar{p}.q)$ es falso (médula espinal sin vértebras).

Corolario II. — *La correlativa no constituye una operación distinta más que en el caso de las expresiones operatorias formadas por una o tres conjunciones.*

En efecto, sólo las expresiones formadas por una o tres conjunciones pueden tener una recíproca y una correlativa distintas de las operaciones directa e inversa, ya que las expresiones constituidas por la reunión de cuatro, dos o cero conjunciones no podrán transformarse en cuatro operaciones distintas por complementariedad, cambio de los signos de las proposiciones y permutación de los $(\vee)$ y los $(.)$.

Teorema III. — *Cuando en una expresión operatoria formada por la reunión de tres conjunciones, dos de dichas conjunciones expresan las partes comunes* $(p.q)$ *y* $(\bar{p}.\bar{q})$, *la correlativa está constituida entonces por la conjunción que expresa la parte no común* $(p.\bar{q})$ *ó* $(\bar{p}.q)$; *recíprocamente, cuando dos de las conjunciones en cuestión expresan las partes no comunes* $(p.\bar{q})$ *y* $(\bar{p}.q)$, *la correlativa está entonces constituida por la conjunción que representa una parte común* $(p . q)$ *ó* $(\bar{p}.\bar{q})$.

En efecto, en el caso de dos conjunciones que representen las partes comunes $(p . q)$ y $(\bar{p} . \bar{q})$, la recíproca de la expresión considerada conservará dichas conjunciones (la inversión de los signos dará simplemente $\bar{p} . \bar{q}$ y $p . q$) y no modificará entonces más que la tercera de las conjunciones presentes: al ser la correlativa la inversa de la recíproca, es pues esta tercera conjunción de la expresión inicial la que constituirá su correlativa. Por ejemplo, la recíproca de:

$$(p \supset q) \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$$

es:

$$(q \supset p) \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$$

la correlativa de $(p \supset q)$ será $(\bar{p} \,.\, q)$. En el caso en que dos de las conjunciones en cuestión representen las partes no comunes $(p \,.\, \bar{q})$ y $(\bar{p} \,.\, q)$, la recíproca de la expresión considerada conservará igualmente dichas conjunciones (la inversión de los signos las transforma en ellas mismas: $\bar{p}.q$ y $p.\bar{q}$) y no modificará más que la tercera de las conjunciones presentes: será nuevamente esta tercera conjunción la que constituirá la correlativa. Por ejemplo, la recíproca de

$$(p \vee q) \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$$

es

$$p \mid q \leftrightarrow (\bar{p} \cdot \bar{q}) \vee (p . \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$$

la correlativa de $(p \vee q)$ será $(p \,.\, q)$.

Corolario. — *La correlativa de una expresión operatoria de una sola conjunción está constituida por una expresión formada por tres conjunciones. Dos nuevas conjunciones se agregarán así a la primera: éstas expresarán las partes comunes* $(p \,.\, q)$ *y* $(\bar{p} \,.\, \bar{q})$ *si la conjunción inicial representa las partes no comunes* ($p.\bar{q}$ *ó* $\bar{p}.q$) *e inversamente.*

Ejemplo: La correlativa de $(p.\bar{q})$ es $(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q}) \leftrightarrow (q \supset p)$, mientras que la de $(\bar{p}.\bar{q})$ es $(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q}) \leftrightarrow (p \mid q)$.

NOTA. – La correlativa consiste así ya sea en agregar o bien en suprimir, en las expresiones consideradas, las equivalencias positivas $(p \,.\, q \vee \bar{p} \,.\, \bar{q})$ o negativas $(p \,.\, \bar{q} \vee \bar{p} \,.\, q)$. Se comprende entonces por qué, en el caso de las operaciones $(p \equiv q)$; $(p \mathbin{\mathrm{w}} q)$; $(p * q)$ o (o), que consisten ya en equivalencias positivas y negativas (aditivas y multiplicativas), la correlativa es idéntica a la inversa, ya que equivale a suprimir entonces dichas equivalencias o no-equivalencias. En el caso de las operaciones $p[q]$; $\bar{p}[q]$; $q[p]$; $\bar{q}[p]$, por el contrario, que están todas constituidas por una parte común ($p.q$ ó $\bar{p}.\bar{q}$) y por una parte no común ($p.\bar{q}$ ó $\bar{p}.q$), la correlativa es idéntica a la operación directa, puesto que no podría agregarse ni suprimirse, en tales expresiones mixtas, una equivalencia (positiva o negativa) íntegra, cuyas

dos cuplas de proposiciones sean ambas distintas de las de la expresión considerada.

Los teoremas II y III han precisado así la situación de la correlativa, pasemos ahora al análisis más detallado de las "recíprocas":

Recordemos en primer lugar la definición 33: *La recíproca de una operación es la misma operación efectuada sobre la negación de las proposiciones consideradas.*

Por ejemplo $(p \vee q)$ tiene por recíproca $(p \mid q)$ ya que:

$$(p \vee q) \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$$

y que:

$$\bar{p} \vee \bar{q} \; (\leftrightarrow p \mid q) \leftrightarrow (\bar{p} \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q})$$

Hay pues inversión de todos los signos, pero no de las operaciones.

Definición 35. – *La recíproca de una operación binaria equivaldrá a transformar el valor de p independientemente de q (o a la inversa) cuando p cambia de signo sin compensación de las afirmaciones y negaciones, mientras que los cambios de signo que afectan a q dan lugar a una compensación (o a la inversa).*

Tomemos como ejemplo: $p[q] \longleftrightarrow (p \,.\, q) \vee (p \,.\, \bar{q})$. La recíproca de $p[q]$ será $\bar{p}[q] \longleftrightarrow (\bar{p} \,.\, q) \vee (\bar{p} \,.\, \bar{q})$, el valor de p es transformado así sin compensación por esta negación, mientras que el cambio de q en $\bar{q}$ es compensado por la transformación de $\bar{q}$ en q.

Definición 36. – *La recíproca de una operación binaria equivaldrá a transformar simultáneamente el valor de p y de q, cuando el conjunto de los p y el de los q cambian ambos de signo con (o ambos sin) compensación de las afirmaciones y de las negaciones.*

Por ejemplo, la recíproca de $(p \,.\, q)$ es $(\bar{p} \,.\, \bar{q})$, p y q son transformadas simultáneamente, pero sin compensación. La recíproca de:

$$(p \equiv q) \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$$

es $(\bar{p} \cdot \bar{q}) \vee (p \cdot q) \leftrightarrow (p \equiv q)$, p y q son transformados simultáneamente uno en otro, pero sin compensación.

Teorema IV. — *Cuando la recíproca de una operación binaria transforma el valor de p independientemente de q, o a la inversa, esta recíproca es idéntica a la operación inversa.*

En efecto, si p (ó q) cambian sólo de valor, este cambio constituye una simple inversión ($\bar{p}$ por p ó a la inversa): la recíproca equivale pues a la inversa.

Por ejemplo, la recíproca de:

$$(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \leftrightarrow p[q]$$

es

$$(\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q}) \leftrightarrow \bar{p}[q]$$

operación que constituye su inversa.

Teorema V. — *Cuando los valores de p y de q son transformados simultáneamente por reciprocidad, ésta se halla sometida a las siguientes condiciones: 1º La recíproca de una expresión binaria formada por una sola conjunción es su complementaria en relación a una equivalencia directa ($p \equiv q$), si las preposiciones p y q son de igual signo, y en relación a una equivalencia inversa ($p \mathrm{w} q$, es decir, $p \equiv \bar{q}$ y $q \equiv \bar{p}$), si p y q son de signos distintos. 2º La recíproca de una expresión binaria cuya forma normal disyuntiva presente de dos a cuatro conjunciones está formada por conjunciones bi-unívocamente correspondientes, de las cuales cada una es la complementaria a su correspondiente en relación a una equivalencia directa ($p \equiv q$), si p y q son de igual signo, en caso dontrario, lo serán en relación a una equivalencia inversa ($p \mathrm{w} q$).*

En efecto, la recíproca de $(p . q)$ es por definición $(\bar{p} . \bar{q})$, y como la reunión $(p . q) \vee (\bar{p} . \bar{q})$ constituye una equivalencia directa $(p \equiv q)$, toda conjunción binaria de proposiciones de igual signo $(p . q)$ ó $(\bar{p} . \bar{q})$ tendrá por recíproca la conjunción complementaria en relación a la equivalencia directa: $(\bar{p} . \bar{q})$ para $(p . q)$ y $(p . q)$ para $(\bar{p} . \bar{q})$. Si la conjunción considerada es de signos distintos, $(p . \bar{q})$ o $(\bar{p} . q)$, la reunión de dos conjunciones recíprocas constituirá una exclusión o equivalencia inversa: $(p . \bar{q}) \vee (\bar{p} . q)$, es decir $(p \equiv \bar{q})$ y $(q \equiv \bar{p})$. Si esto es así para las conjunciones aisladas, lo será igualmente para cada conjunción que forme parte de una expresión normal

binaria constituida por dos, tres o cuatro conjunciones. Por ejemplo, la recíproca de $[(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)]$ es:

$$[(\bar{p} \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q})]$$

Las conjunciones correspondientes dan pues:

$$(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q}) \leftrightarrow (p \equiv q)\,; \qquad (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \leftrightarrow (p \mathbin{w} q)\,;$$

$$(\bar{p} \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \leftrightarrow (p \mathbin{w} q)$$

Corolario I. — *Cuando p y q cambian simultáneamente de valores, la recíproca de una expresión binaria que comprenda, en su forma normal disyuntiva, cuatro, dos (o cero) conjunciones, equivale a esa misma expresión.*

Así, las recíprocas de $(p * q)$; $(p \equiv q)$; $(p \mathbin{w} q)$ y (o) son $(p * q)$; $(p \equiv q)$; $(p \mathbin{w} q)$ y (o) [1]. En efecto, tales expresiones constituyen equivalencias directas $(p \equiv q)$ o inversas $(p \mathbin{w} q) \longleftrightarrow (p \equiv q) \vee$ $\vee\, (q \equiv \bar{p})$, o equivalencias dobles, $(p * q)$ comprende así tanto: $(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$ como $(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$ y (o) comprende $(o \mathbin{w} o)$ o $(\bar{o} \mathbin{w} \bar{o})$. Ahora bien, la recíproca de las expresiones binarias en las cuales p y q se transforman simultáneamente, está formada por conjunciones complementarias en relación a la equivalencia directa e inversa. Es decir, que la recíproca de $(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$ será $(\bar{p} \cdot \bar{q}) \vee (p \cdot q)$ y de $(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$ será $(\bar{p} \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q})$, lo que vuelve a conducir estas dos transformaciones a la expresión inicial.

Corolario II. — *En el caso de expresiones binarias normales (disyuntivas) formadas por tres conjunciones, la expresión recíproca conserva las dos conjunciones que constituyen ya sea (a) una equivalencia directa* $(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$, *ya sea (b) una equivalencia inversa* $(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$; *en cuanto a la tercera conjunción, será reemplazada por la conjunción complementaria en relación a la equivalencia inversa en el caso (a) o en relación a la equivalencia directa en el caso (b).*

En efecto, si la expresión considerada contiene tres conjunciones de las cuales dos de ellas constituyen por sí solas una equivalencia directa e inversa, estas dos conjunciones se conservarán tal cuales en

1 La recíproca de la negación total $(p \vee q) \cdot (p \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee q) \cdot (\bar{p} \vee \bar{q})$, es por definición $(\bar{p} \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee q) \cdot (p \vee \bar{q}) \cdot (p \vee q)$, es decir, la misma expresión.

la expresión recíproca, puesto que constituyen ya una equivalencia (en virtud del corolario I); en ese caso la tercera conjunción no podría transformarse más que en una conjunción complementaria en relación a la equivalencia inversa, si las dos primeras conjunciones constituyen juntas una equivalencia directa: en efecto, si las conjunciones $(p . q)$ y $(\bar{p} . \bar{q})$ están comprendidas ambas en estas dos primeras, la tercera no podría ser más que $(p . \bar{q})$ ó $(\bar{p} . q)$; inversamente, la tercera conjunción no podrá ser más que $(p . q)$ ó $(\bar{p} . \bar{q})$ si las dos primeras son $(p . \bar{q}) \vee (\bar{p} . q)$: su recíproca será pues complementaria en relación a la equivalencia directa.

Así, las formas normales disyuntivas de las operaciones recíprocas $(p \vee q)$ y $(p \mid q)$ contienen ya ambas las dos conjunciones $(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$, es decir, la equivalencia inversa: por lo tanto, la reciprocidad transforma $(p . q)$ en $(\bar{p} . \bar{q})$ o a la inversa. En cuanto a las implicaciones $p \supset q$ y $q \supset p$, sus formas normales disyuntivas contienen ambas las dos conjunciones $(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$, es decir, la equivalencia directa: la reciprocidad transforma entonces $p . \bar{q}$ (contenida en $q \supset p$) en $\bar{p} . q$ (contenida en $p \supset q$) o a la inversa.

Corolario III. — *Cuando una expresión binaria, en la cual la reciprocidad transforma simultáneamente p y q, es puesta bajo la forma de un condicional (positivo o negativo), su recíproca está entonces constituida por el condicional formado entre sus elementos permutados (implicación conversa, llamada inversa). La conjunción del condicional considerado y de su conversa da una equivalencia directa ($p \equiv q$), en el caso de implicaciones positivas entre proposiciones igualmente positivas ($p \supset q$), o de implicación negativa entre proposiciones de signos contrarios ($\overline{p \supset \bar{q}}$) y da una equivalencia inversa ($p \text{ w } q$, es decir $p \equiv \bar{q}$ y $q \equiv \bar{p}$), cuando alguna de estas dos condiciones no se cumple.*

La permutación de los términos del condicional resulta, en efecto, de la definición misma de la reciprocidad, ya que $p \supset q$ tiene por recíproca

$$(\bar{p} \supset \bar{q}) \leftrightarrow (q \supset p)$$

y $(q \supset p)$ tiene por recíproca $(\bar{q} \supset \bar{p}) \longleftrightarrow (p \supset q)$. De lo que se deduce entonces que la conjunción de las implicaciones positivas entre proposiciones positivas $p \supset q$ y $q \supset p$ da una equivalencia directa, ya que

$$(p \supset q)\cdot(q \supset p) \leftrightarrow (p \equiv q).$$

Lo mismo ocurrirá con las implicaciones negativas entre proposiciones de signos contrarios, ya que si se tiene a la vez $\overline{p \supset \bar{q}}$ y $\overline{\bar{p} \supset q}$, ello significa:

$$\overline{(p \supset \bar{q})}\cdot\overline{(\bar{p} \supset q)} \leftrightarrow (p\cdot q) \vee (\bar{p}\cdot\bar{q}) \leftrightarrow (p \equiv q)$$

ya que $(\overline{p \supset \bar{q}}) \longleftrightarrow (p \,.\, q)$ y que $(\overline{\bar{p} \supset q}) \longleftrightarrow (\bar{p} \,.\, \bar{q})$. Aparte de estos dos casos (y de la equivalencia directa misma), toda implicación negativa o toda implicación positiva entre proposiciones de signos contrarios, no podría dar evidentemente, en conjunción con su recíproca, más que una equivalencia inversa $(p \text{ w } q)$: en efecto, ya que $\overline{p \supset q} \longleftrightarrow p \,.\, \bar{q}$ y que $\overline{q \supset p} \longleftrightarrow q \,.\, \bar{p}$, la conjunción de dos no-implicaciones equivale a $(p \,.\, \bar{q}) \vee (\bar{p} \,.\, q)$, es decir a la equivalencia inversa; por otra parte, los condicionales entre proposiciones de signos contrarios $\bar{p} \supset q$; $\bar{q} \supset p$; $p \supset \bar{q}$ o $q \supset \bar{p}$ no podrían dar, por conjunción con sus recíprocos, más que combinaciones con signos distintos $p \,.\, \bar{q}$ o $\bar{p} \,.\, q$, es decir nuevamente equivalencias inversas. De ahí la tabla de la página 313.

Del teorema V y de sus corolarios se deriva pues el hecho fundamental de que la reciprocidad hace intervenir una complementariedad especial, relativa al bicondicional $(p \equiv q)$ y no a la afirmación completa $(p * q)$ como la complementariedad general que caracteriza a las operaciones inversas. Es esta complementariedad relativa al bicondicional, lo que explica las tres propiedades esenciales de la reciprocidad:

1º Que las expresiones operatorias que expresan por sí mismas una equivalencia directa $(p \equiv q)$, inversa $(p \text{ w } q)$ o compuesta $(p * q)$ y (o), son simétricas y, en consecuencia, idénticas a sus recíprocas.

2º Que la conjunción de dos condicionales conversos $[(p \supset q) \,.\, (q \supset p)]$ constituye un bicondicional.

3º Que las expresiones operatorias en los que la reciprocidad transforma simultáneamente p y q tienen por recíprocas, una vez transformadas en condicionales, el condicional formado entre sus elementos

Tabla de reciprocidades

I. Operaciones consideradas	II. Recíprocas de (I)	III. Condicionales correspondientes a (I)	IV. Condicionales correspondientes a (II)	V. Bicondicionales correspondientes a la conjunción de III y de IV
$p \vee q$	$\bar{p} \vee \bar{q}\ (\leftrightarrow p \mid q)$	$\bar{p} \supset q$	$p \supset \bar{q}$	$(\bar{p} \supset q)\cdot(p \supset \bar{q}) \leftrightarrow (p \equiv \bar{q})$
		$\bar{q} \supset p$	$q \supset \bar{p}$	$(\bar{q} \supset p)\cdot(q \supset \bar{p}) \leftrightarrow (q \equiv \bar{p})$
$p \cdot q$	$\bar{p} \cdot \bar{q}$	$\overline{p \supset \bar{q}}$	$\overline{\bar{p} \supset q}$	$(\overline{p \supset \bar{q}})\cdot(\overline{\bar{p} \supset q}) \leftrightarrow (p \equiv q)$
$p \supset q$	$\bar{p} \supset \bar{q}\ (\leftrightarrow q \supset p)$	$p \supset q$	$q \supset p$	$(p \supset q)\cdot(q \supset p) \leftrightarrow (p \equiv q)$
$p \cdot \bar{q}$	$\bar{p} \cdot q$	$\overline{p \supset q}$	$\overline{q \supset p}$	$(\overline{p \supset q})\cdot(\overline{q \supset p}) \leftrightarrow (p \equiv \bar{q})\cdot(q \equiv \bar{p})$
$p \equiv q$	$\bar{p} \equiv \bar{q}$	$p ⫔ q$	$\bar{p} ⫔ \bar{q}$	$(p ⫔ q).(\bar{p} ⫔ \bar{q}) \leftrightarrow (p \equiv p)$
$p \text{ w } q$	$\bar{p} \text{ w } \bar{q}$	$p ⫔ \bar{q}$	$q ⫔ p$	$(p ⫔ \bar{q})\cdot(q ⫔ \bar{p}) \leftrightarrow (p \equiv \bar{q}).(q \equiv \bar{p})$
$p * q$	$\bar{p} * \bar{q}$	$(p \vee \bar{p}) ⫔ (q \vee \bar{q})$ [1]	$(q \vee \bar{q}) ⫔ (p \vee \bar{p})$	$(p \vee \bar{q}) \leftrightarrow (q \vee \bar{p})$
o	o	$\bar{o} ⫔ o$	$o ⫔ \bar{o}$	$(o \equiv \bar{o}) \leftrightarrow (o \text{ w } o)$

1. En efecto $(p \vee \bar{p}) \supset (q \vee \bar{q})$ da $[(p \vee \bar{p})\cdot(q \vee \bar{q})] \vee [(o\cdot(q \vee \bar{q})] \vee [o \cdot o] \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$.

permutados. Es este tercer carácter el que motiva el término de reciprocidad atribuido a las transformaciones que designamos bajo ese nombre.

Se comprende, por otra parte, por qué las operaciones $p[q]$; $\bar{p}[q]$; $q[p]$ y $\bar{q}[p]$, tienen una recíproca idéntica a la inversa: es porque cada una de ellas está formada por una parte común ($p.q$ ó $\bar{p}.\bar{q}$) y una parte no común ($p.\bar{q}$ ó $\bar{p}.q$); al estar formadas por cuplas complementarias en relación a la equivalencia positiva ($p \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q}$) o negativa ($p . \bar{q} \vee \bar{p} . q$), la recíproca equivale en este caso a invertir la expresión entera (teorema IV).

Se advierte entonces el papel operatorio distinto de los cuatro cuaternos que hemos caracterizado al comienzo del § 31 y que corresponden a funciones deductivas bien diferenciadas. Mientras que el cuaterno D (recíprocas idénticas a las inversas) concierne solamente a las afirmaciones y negaciones, el cuaterno C (recíprocas idénticas entre sí) comprende los diversos bicondicionales y desempeña así un papel principalmente regulador en la deducción; con los cuaternos A (disyunciones y conjunciones positivas y negativas) y B (condicionales y no-condicionales), son por el contrario las operaciones propiamente constructivas las que entran en juego en las diferentes combinaciones que conducen a las equivalencias directas e inversas. En cuanto a la racionalidad del sistema, está asegurada íntegramente por las transformaciones reversibles que constituyen las inversiones, reciprocidades y correlatividades cuyo mecanismo fundamental reencontraremos en el seno del "agrupamiento" de las operaciones interproposicionales.

En efecto, la inversión se basa en una complementariedad en relación a la afirmación completa; la reciprocidad expresa, por su parte, una complementariedad en relación a la equivalencia positiva o negativa (teorema V); en cuanto a la correlatividad, representa la inversa de la reciprocidad (teorema I) y consiste, en consecuencia, en adjuntar o en suprimir, en las expresiones consideradas, las equivalencias positivas o negativas (teorema III). Ahora bien, la reunión de una equivalencia positiva ($\equiv$) y una equivalencia negativa (w) constituye precisamente una "afirmación completa" ($p * q$). De donde se deriva que la inversión, la reciprocidad y la correlatividad, unidas a la transformación nula (o idéntica), constituyen un sistema único, tal que dos cualesquiera de las tres primeras transformaciones da por

resultado la tercera, y tres cualesquiera de las cuatro transformaciones da la cuarta. Se obtiene así un grupo conmutativo de transformaciones relativo al conjunto de estas cuatro transformaciones.

Para demostrar este hecho esencial, adoptaremos la siguiente presentación.

Cada uno de los dieciseis operadores posibles entre dos proposiciones p y q puede ser caracterizado por un cuádruple $(abcd)$, donde $a, b, c, d \in [1,0]$ (ver tabla 98 bis). Llamaremos a', b', c', d' los valores opuestos a los de a, b, c, d, es decir que, por ejemplo, si $a = 1$, $a' = 0$ y si $a = 0$, $a' = 1$. En esas condiciones, la *inversa* puede considerarse como una transformación N tal que:

$$N(abcd) = (a'b'c'd')$$

La *recíproca* puede considerarse como una transformación R tal que:

$$R(abcd) = (dcba)$$

La *correlativa* puede considerarse como una transformación C tal que:

$$C(abcd) = (d'c'b'a')$$

Finalmente, introduciremos la transformación idéntica I tal que:

$$I(abcd) = (abcd)$$

Es posible entonces reformular los tres primeros teoremas que preceden.

Teorema I. — *Sean las dos operaciones interproposicionales* $(a_1b_1c_1d_1)$ *y* $(a_2b_2c_2d_2)$. *Si* $a_1 = d_2$, $b_1 = c_2$ y $d_1 = a_2$, *entonces* $N(a_1b_1c_1d_1) = RN(a_2b_2c_2d_2)$ y si $a_1 = a'_2$, $b_1 = b'_2$, $c_1 = c'_2$ *y* $d_1 = d'_2$, *entonces*

$$R(a_1b_1c_1d_1) = NR(a_2b_2c_2d_2)$$

Pruebas. — *La primera parte del teorema exige demostrar que* $N(d_2c_2b_2a_2) = RN(a_2b_2c_2d_2)$. *Pero, por definición de N, se tiene*

$$N(a_2b_2c_2d_2) = (a'_2b'_2c'_2d'_2)$$

Por otra parte, por definición de R, se tiene $R(a'_2b'_2c'_2d'_2) =$

$= (d'_2c'_2b'_2a'_2)$, *lo que no es otra cosa que* $N(d_2c_2b_2a_2)$.

Igualmente, la segunda parte del teorema conduce a demostrar que

$$R(a'_2b'_2c'_2d'_2) = NR(a_2b_2c_2d_2)$$

Ahora bien, por definición de R, se tiene $R(a_2b_2c_2d_2) = (d_2c_2b_2a_2)$ *y, por definición de N, se tiene* $N(d_2c_2b_2a_2) = (d'_2c'_2b'_2a'_2)$ *lo que no es otra cosa que* $R(a'_2b'_2c'_2d'_2)$.

Teorema II. — *Posee cuatro partes:*

(1) $C(abcd) = RN(abcd)$. *En efecto,* $N(abcd) = (a'b'c'd')$ *y*

$$R\ (a'b'c'd') = (d'c'b'a')$$

lo que es equivalente a $C(abcd)$.

(2) *Si* $R(abcd) = N(abcd)$, *entonces* $C(abcd) = I(abcd)$. *En efecto, la hipótesis equivale a establecer que* $(dcba) = (a'b'c'd')$, *o sea que* $d = a'$, $c = b'$, $b = c'$ *y* $a = d'$. *Por otra parte, como* $C(abcd) = (d'c'b'a')$ *se tiene, por sustitución,*

$$C\ (abcd) = (abcd) = I\ (abcd)$$

(3) *Si* $R(abcd) = I(abcd)$, *entonces* $C(abcd) = N(abcd)$. *La prueba es análoga a la precedente.*

(4) *Si* $R(abcd) \neq I(abcd) \neq N(abcd)$, *entonces* $C(abcd)$ *es distinta de las tres transformaciones precedentes. Supongamos que no sea ese el caso y que, por ejemplo,* $C(abcd) = R(abcd)$. *Ello equivaldría a decir que*

$$(d'c'b'a') = (dcba)$$

por lo tanto que $d' = d$, $c' = c$, $b' = b$ *y* $a' = a$, *lo que es incompatible con la definición de las letras con asterisco. Si se hubiera supuesto que* $C(abcd) = I(abcd)$, *se hubiese tenido* $(d'c'b'a') = (abcd)$, *ya fuese* $d' = a$, $c' = b$, $a' = d$ *y* $b' = c$ *o aún* $d = a'$, $c = b'$, $b = c'$

y $a = d'$. Ello significaría que, contrariamente a la hipótesis, se tendría $R(abcd) = N(abcd)$. La tercera eventualidad se trata de manera análoga.

Teorema III. — *Equivale a establecer las cuatro igualdades siguientes, que son inmediatas:*

(1) $C(1\ 1\ 0\ 1) = (0\ 1\ 0\ 0)$
(2) $C(1\ 0\ 1\ 1) = (0\ 0\ 1\ 0)$
(3) $C(1\ 1\ 1\ 0) = (1\ 0\ 0\ 0)$
(4) $C(0\ 1\ 1\ 1) = (0\ 0\ 0\ 1)$.

Los teoremas IV y V dan a la palabra "recíproco" un sentido un poco diferente de R, ya que la recíproca es susceptible de transformar los valores, no de la operación binaria misma, sino los de las proposiciones componentes. En contrapartida, si nos atenemos a las definiciones de las transformaciones I, N, R y C, tal como figuran aquí, se establecerá sin dificultades en:

Teorema IV. — *El conjunto de las cuatro transformaciones I, N, R y C constituye un grupo conmutativo en relación a su composición.*

Es posible obtener, en efecto, la siguiente tabla

	I	*N*	*R*	*C*
I	I	N	R	C
N	N	I	C	R
R	R	C	I	N
C	C	R	N	I

Esta tabla permite asegurar que:

1) La composición de dos elementos del conjunto es siempre un elemento del conjunto.

2) La composición es asociativa.

3) Cada elemento tiene un inverso (que es él mismo).

4) Existe un elemento neutro (que es I).

5) La composición es conmutativa.

El presente grupo no permite, por sí solo, pasar de uno de los cuaternos de operaciones (A a D) al otro, ni, en consecuencia, engendrar tampoco el detalle de las dieciseis operaciones binarias. Pero ex-

presa lo esencial de las transformaciones reversibles del sistema y fundamenta así la racionalidad. Es preciso añadir aún que este grupo cobra su significado por el hecho de expresar la coordinación, en una estructura única, de la inversa (N) y de la recíproca (R), es decir de las dos transformaciones definidas independientemente una de la otra. Representa pues mucho más que una simple tabla de doble entrada, y su alcance lógico radica en el hecho de que las transformaciones que lo constituyen actúan sobre las dieciseis operaciones, es decir sobre el conjunto de partes de un conjunto de cuatro elementos.

§ 32. LA CORRESPONDENCIA DE LAS OPERACIONES INTERPROPOSICIONALES CON UN MODELO DE OPERACIONES DE CLASES.

Hemos constatado en el § 28 que las operaciones interproposicionales, pese a mantenerse enteramente autónomas, admiten la realización de un modelo constituido por puras operaciones de clases: las dieciseis operaciones binarias corresponden así a las combinaciones que pueden derivarse de la intersección de dos clases y sus complementarias $(P \cup \bar{P}) \cap (Q \cup \bar{Q})$. ¿Existirá la misma correspondencia en el detalle de las transformaciones? Esto es lo que se tratará de mostrar brevemente.

Partamos de las formas normales y traduzcamos cada proposición p ó q por las clases P ó Q de los argumentos que las verifican, y cada proposición $\bar{p}$ ó $\bar{q}$ por las clases complementarias $\bar{P}$ y $\bar{Q}$. Traduzcamos, por otra parte, las operaciones ($\vee$) y (.) por la unión ($\cup$) y la intersección ($\cap$) de dichas clases. La forma disyuntiva de la "afirmación completa" corresponderá pues a:

(201) $$(P \cup \bar{P}) \cap (Q \cup \bar{Q}) = PQ \cup P\bar{Q} \cup \bar{P}Q \cup \bar{P}\bar{Q} \qquad (= U)$$

(Ver la figura 19, pág. 256.)
Llamaremos U la clase total:

$$U = PQ \cup P\bar{Q} \cup \bar{P}Q \cup \bar{P}\bar{Q}$$

Ahora bien, la traducción de las operaciones interproposicionales en operaciones de clases está asegurada inmediatamente por el hecho que la ley de dualidad, cuyo papel hemos visto en lógica proposicional, es una ley bien conocida de la teoría de conjuntos, referida sólo a relaciones de complementariedad, de reunión e intersección, derivada por lo tanto de la lógica de clases [1]. Se negará pues la expresión (201) invirtiendo simplemente todos las ($\cup$) y las ($\cap$), así como todos los signos (P y $\overline{P}$ ó Q y $\overline{Q}$), obteniéndose la correspondiente a la "negación completa" (ver las figuras 19 y 20):

(202) $$\overline{PQ \cup P\overline{Q} \cup \overline{P}Q \cup \overline{P}\overline{Q}} = (\overline{P} \cup \overline{Q}) \cap (\overline{P} \cup Q) \cap (P \cup \overline{Q}) \cap (P \cup Q) = 0$$

Será pues fácil obtener de cada una de las dieciseis operaciones binarias una segunda traducción en términos de clases, además de la expuesta en el § 28. Por una parte, toda expresión binaria corresponde, como ya hemos visto, a una de las disposiciones extraídas de (201); por ejemplo, a la expresión $(p \mid q)$ corresponde la combinación:

$$\overline{P}\overline{Q} \cup P\overline{Q} \cup \overline{P}Q$$

(ver la figura 23, pág. 260 y el ejemplo dado a propósito en términos de clases). Dicha disposición equivale pues a $U - PQ$, ya que la intersección PQ está excluida de la clase total U (ver figura 23). Pero, por otra parte, en virtud de (202), se tiene igualmente $\overline{PQ} = \overline{P} \cup \overline{Q}$, lo que corresponde en términos de clase a la proposición (151) $\overline{p \cdot q} \leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$:

(203) $$U - PQ = \overline{P}\overline{Q} \cup P\overline{Q} \cup \overline{P}Q$$

y

(203 *bis*) $$\overline{PQ} = \overline{P} \cup \overline{Q} = \overline{P}\overline{Q} \cup P\overline{Q} \cup \overline{P}Q$$

(ver fig. 23)

1 Fórmula de MORGAN.

Las tres expresiones $(U - PQ)$; $(\overline{PQ})$ y $(\overline{P}\overline{Q} \cup P\overline{Q} \cup \overline{P}Q)$ son pues idénticas en virtud de las proposiciones (201) y (202), lo que conduce a expresar la dualidad en términos de sustracción:

(204) $$\overline{PQ} = U - PQ$$

Este mecanismo formal permite entonces traducir en un modelo de operaciones de clases cada una de las proposiciones del § 30, así como las nociones introducidas en el § 31 y los teoremas que se relacionan con ellas.

Por ejemplo la proposición (162) $(p \mid q) \longleftrightarrow (p \supset \bar{q}) \longleftrightarrow (q \supset \bar{p})$, se traducirá por:

$$(p \mid q) : U - PQ; \qquad (p \supset \bar{q}) : P\overline{Q} \cup \overline{P}Q \cup \overline{P}\overline{Q};$$

$$(q \supset \bar{p}) : Q\overline{P} \cup \overline{Q}P \cup \overline{Q}\overline{P}$$

de donde se deriva:

(205) $$U - PQ = P\overline{Q} \cup \overline{P}\overline{Q} \cup \overline{P}Q = \overline{Q}P \cup \overline{Q}\overline{P} \cup Q\overline{P}$$

lo que se obtendrá también estableciendo $(p \supset \bar{q}) \longleftrightarrow \overline{p\,.\,q}$: $\overline{PQ} = \overline{P} \cup \overline{Q}$ (ver (203 bis)), ya que la implicación $p \supset \bar{q}$ es la negación de la no-implicación $p\,.\,\bar{\bar{q}}$ $(\longleftrightarrow p\,.\,q)$.

Igualmente la proposición (130) $(p \vee q) \longleftrightarrow (\bar{p} \mid \bar{q})$ corresponde a:

$$p \vee q : PQ \cup P\overline{Q} \cup \overline{P}Q \quad \text{y} \quad \bar{p} \mid \bar{q} : U - \overline{P}\overline{Q}$$

de lo que se desprende:

(206) $$PQ \cup P\overline{Q} \cup \overline{P}Q = U - \overline{P}\overline{Q}$$

La proposición (132) $(p \vee q) \longleftrightarrow (\bar{p} \supset q) \longleftrightarrow (\bar{q} \supset p)$ da asimismo:

(206 *bis*) $$PQ \cup P\overline{Q} \cup \overline{P}Q = U - \overline{P}\overline{Q} = U - \overline{Q}\overline{P}$$

ya que $(\bar{p} \supset q)$ excluye $(\bar{p}\,.\,\bar{q})$, es decir $\overline{P}\overline{Q}$ y que $(\bar{q} \supset p)$ excluye $(\bar{q}\,.\,\bar{p})$, es decir también $\overline{P}\overline{Q}$.

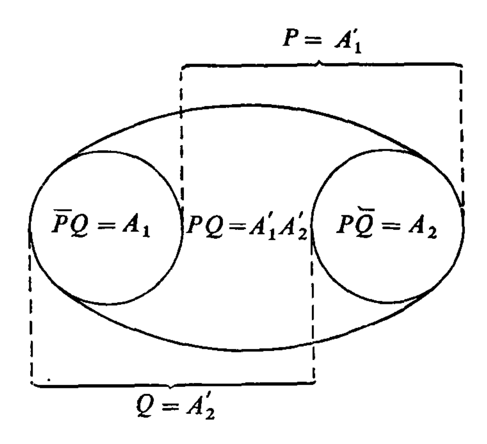


Fig. 36.

Esta proposición (132) corresponde en particular a la "vicariancia" de las clases $A_1 + A'_1 = A_2 + A'_2$ (ver proposición (23)). Consideremos, en efecto, $P = A'_1$ y $Q = A'_2$ (fig. 36). Se tendrá entonces

$$P\overline{Q} = A'_1\overline{A'_2} = A_2 \quad \text{y} \quad \overline{P}Q = \overline{A'_1}A'_2 = A_1.$$

De donde tenemos:

(207) $$B = A'_1A'_2 + A'_1\overline{A'_2} + \overline{A'_1}A'_2 = A'_1A'_2 + A_2A_1$$

De lo que resultará, ya que la implicación ($\supset$) corresponde a la inclusión ($\subseteq$):

(208) $$A_1 \subseteq A'_2 \text{ pues } A_2 = \overline{P}Q \quad \text{y} \quad A'_2 = Q$$

y

(208 *bis*) $$A_2 \subseteq A'_1 \text{ pues } A_2 = \overline{Q}P \quad \text{y} \quad A'_1 = P$$

El agrupamiento de vicariancias (II, § 13) encontrará así su correspondiente en la composición de las disyunciones $(p \vee q)$.

En cuanto a la proposición (159) $(p \supset q) \longleftrightarrow (\overline{p} \vee q)$, se tiene:

(209) $(p \supset q) : U - P\overline{Q} \quad \text{y} \quad (\overline{p} \vee q) : \overline{P}Q \cup \overline{P}\overline{Q} \cup PQ = U - P\overline{Q}$

Se ve por esta traducción en lenguaje de clases que las expresiones $(p \supset q)$ y $(\bar{p} \vee q)$ son rigurosamente equivalentes, pero a condición de ser puestas en forma de clases correspondientes a las formas normales.

La proposición (160) $(p \supset q) \longleftrightarrow (\bar{q} \supset \bar{p})$ corresponde igualmente, en términos de inclusión, a $(P \subseteq Q) \longleftrightarrow (\overline{Q} \subseteq \overline{P})$, es decir a:

$$(P \cup Q = Q) \leftrightarrow (\overline{Q} \cup \overline{P} = \overline{P})$$

lo cual se hace evidente observando la figura 25, página 260. Pero el signo $(\longleftrightarrow)$ no representa nuevamente una equivalencia más que en el sentido de la vicariancia, ya que sólo la intersección $\overline{P}Q$ es común a $\overline{P}$ y a Q. En términos de formas normales, por el contrario, se tiene simplemente:

(210) $$(p \supset q) : U - P\overline{Q}$$

y

$$(\bar{q} \supset \bar{p}) : (\overline{P}\overline{Q} \cup \overline{P}\overline{\overline{Q}} \cup \overline{\overline{P}}\overline{\overline{Q}}) = \overline{P}\overline{Q} \cup \overline{P}Q \cup PQ = U - P\overline{Q}$$

Las transformaciones (190) $(p \mathrm{w} q) \longleftrightarrow (\bar{p} \equiv q) \longleftrightarrow (\bar{q} \equiv p)$ son igualmente evidentes en lenguaje de clases:

(211) $$(p \mathrm{w} q) : U - PQ - \overline{P}\overline{Q}\,;$$

$$(\bar{p} \equiv q) : \overline{P}Q \cup P\overline{Q} = U - PQ - \overline{P}\overline{Q}\,;$$

$$(\bar{q} \equiv p) : P\overline{Q} + \overline{P}Q$$

Y así puede continuarse para cada transformación. La ventaja práctica de estas traducciones es la de permitir un cálculo rápido e intuitivo. Desde el punto de vista teórico, permiten ver el isomorfismo existente entre las operaciones interproposicionales y las intraproposicionales, pese a la autonomía de las primeras. Semejante convergencia hace presentir la de las estructuras de conjunto propias de cada uno de los dos niveles de la formalización lógica. Es lo que el examen de la axiomática de la lógica bivalente de proposiciones va a mostrarnos ahora.

CAPITULO VI

LOS FUNDAMENTOS DE LA DEDUCCION: LA AXIOMATICA Y LOS "AGRUPAMIENTOS" DE LA LOGICA BIVALENTE

Luego de haber analizado las operaciones interproposicionales fundamentales, se tratará ahora de deducir los fundamentos de la deducción. Deducir equivale a construir las conclusiones a partir de premisas por medio de las operaciones descritas anteriormente. La deducción supone pues la demostración de las transformaciones propias del cálculo proposicional, es decir la formulación de principios que aseguren el pasaje de lo verdadero a lo verdadero. Conviene estudiar pues ahora dicho principio, es decir, remontarse del cálculo operatorio a la estructura que lo fundamenta.

§ 33. PLANTEO DEL PROBLEMA

No hay más que una manera de demostrar en las ciencias deductivas: es la axiomatización, la cual presenta la inmensa ventaja de querer explicitarle todo y de reunir la materia formal en un número *minimum* de proposiciones primeras; estas son admitidas entonces sin demostración (axiomas), pero permiten seguir paso a paso la construcción ulterior, de la cual soportan todo el peso. Extraer los principios de la deducción supondrá pues en primera instancia examinar los axiomas en que se fundamenta el cálculo proposicional. Ahora bien, la axiomática de la lógica bivalente ha sido establecida desde hace largo tiempo: Russell, Whitehead, Nicod, Hilbert, Ackermann y Bernays han ligado sus nombres a análisis axiomáticos bien conocidos que hacen inútil una nueva discusión técnica del problema.

Pero, si bien la axiomática puede ser concebida, en el plano de las matemáticas puras, como el punto de partida primero de una teoría (sin que este carácter matemáticamente primero implique por ello un sentido epistemológico primero), no ocurriría lo mismo en el terreno de la lógica. En efecto, todo empleo del método axiomático supone la lógica, y establecer axiomáticamente el fundamento de la lógica consiste en fundamentar la lógica sobre sí misma en un círculo inexorablemente vicioso. Ello no supone naturalmente negar nada de la utilidad de la investigación axiomática, la que permanece indispensable para la disección de las conexiones en juego. Pero esta investigación no puede resolver el problema de los fundamentos, ya que los axiomas formulados por una axiomática no podrían constituirse en principios de la lógica sino una vez que la lógica misma haya intervenido en la construcción de dicha axiomática, es decir, una vez admitida implícitamente la lógica a través del empleo del único método que la presupone necesariamente (ya que tiende por su propia naturaleza a eliminar toda intuición).

Es por ello que Wittgenstein, y otros autores junto con él, tratan de alcanzar una evidencia lógica inicial a través de la intuición directa de las relaciones más elementales, para luego remontarse de estas conexiones iniciales a las operaciones superiores mediante un simbolismo concebido igualmente como beneficiario de la evidencia intuitiva. Ahora bien, hemos visto ya (§ 3) las dificultades de semejante empresa: ella presenta el doble inconveniente de hacerse solidaria de un realismo ingenuo, de naturaleza extralógica (e insostenible tanto desde el punto de vista físico como psicológico), así como de un atomismo lógico contrario a la existencia de totalidades operatorias propiamente formales.

Pero resta aún un tercer método que si bien no seguiremos sistemáticamente, retendremos del mismo los elementos pertinentes para nuestro análisis. Toda axiomática se basa, una vez definidas las expresiones formadas, en: 1º proposiciones primeras, o axiomas, indemostrables, pero a partir de los cuales pueden deducirse todas las demás proposiciones; 2º reglas formuladas de modo de asegurar precisamente esta deducción. Estas reglas permiten transformaciones (que corresponden psicológicamente a acciones, es decir, a manipulaciones) y se hallan relacionadas entre sí, al igual que lo están a las reglas que es posible derivar enseguida de los axiomas mismos. Pero este sistema de reglas así obtenido, si bien basta a la deducción, no asegura más que una explicación insuficiente del sistema de conjunto que consti-

tuyen las operaciones mismas, el cual permanece ordinariamente implícito. Se trata pues de explicitar el sistema de conjunto del cual emanan las operaciones y que utiliza necesariamente la axiomática. Supongamos que la lógica proposicional constituya una totalidad operatoria de modo que todas sus operaciones sean solidarias unas de las otras y presente, en tanto estructura de conjunto, una forma bien determinada: esta estructura tendrá pues sus propias leyes en tanto leyes de totalidad; en consecuencia, el detalle de las transformaciones dependerá de estas leyes mismas y no a la inversa. Serán pues estas leyes de totalidad las que constituirán los principios reales de la deducción y no únicamente los axiomas y las reglas, situados con razón en el punto de partida de la construcción, pero que presentan el inconveniente esencial de no explicitar el mecanismo total de las operaciones, respecto de las cuales aseguran simplemente su regulación.

Pero, si la hipótesis es correcta, es decir si este tercer método se revela eficaz, será preciso naturalmente que las leyes de totalidad se reflejen en el interior de los axiomas mismos, ya que estos expresan los aspectos esenciales del mecanismo operatorio. Dicho método supone pues una verificación posible, la cual consistirá en reencontrar en los axiomas admitidos por Russell, Hilbert o Nicod, el principio de totalidad, el cual puede, por otra parte, ser desarrollado explícitamente. Cada uno sabe, en efecto, que los axiomas en que se fundamenta una teoría están obligados a cumplir simultáneamente tres condiciones: ser no-contradictorios, completos y no obstante, independientes; deben constituir pues por sí solos un sistema (no-contradicción de los axiomas entre sí), pero cuyos elementos no se deduzcan unos de otros (independencia de los mismos axiomas). ¿Es qué consistirá pues semejante sistema si no en una totalidad operatoria en la cual la no-contradicción se hallará asegurada por la reversibilidad (el principio de no-contradicción ($p \cdot \bar{p} \leftrightarrow o$) implica ya la expresión de una composición reversible), y la independencia de los elementos lo estará por la diversidad necesaria de las operaciones, susceptibles, por otra parte, de composiciones entre ellas? Desde este punto de vista, resulta claro que los axiomas tales como $\vdash p \supset (p \vee q)$ ó $\vdash (p \vee p) \supset p$, elegidos por Russell a título de proposiciones primeras, no tienen nada de "primero" para el análisis operatorio: describen simplemente mecanismos tales como el encaje de la parte (p) en el todo ($p \vee q$), o de la parte ($p \vee p$) en ella misma (p), pero estos mecanismos no podrían existir

ni presentar un significado propio más que en su solidaridad mutua. Extraer los principios de la deducción equivaldrá pues a investigar qué es lo que está implicado en los axiomas más simples en los cuales ha sido reconocida la necesidad: si el método es eficaz, se encontrará entonces, en el seno mismo de los axiomas a los cuales Russell o Hilbert han reducido el cálculo proposicional, las leyes de esa estructura de conjunto requerida por la existencia misma de las operaciones. Se sabe, en particular, como Nicod ha reducido a un "axioma único" los diversos axiomas independientes de Russell, sin por ello suprimir la independencia misma: la proposición compleja resultante constituye una ocasión particularmente propicia para el análisis de la estructura operatoria de conjunto subyacente a toda axiomática logística.

Pero, luego de haber cumplido esta primera parte del programa, convendrá naturalmente tratar de construir directamente la estructura total que forman entre sí, por hipótesis, las operaciones interproposicionales bivalentes. Nos encontramos aquí en presencia de varias posibilidades, correspondientes a las que hemos examinado ya en lo concerniente a las operaciones de clases y de relaciones: se tratará de determinar por consiguiente si la forma de conjunto de la lógica bivalente constituye un reticulado, un grupo, o si es reducible a un simple agrupamiento.

§ 34. LOS AXIOMAS DE WHITEHEAD Y RUSSELL, DE HILBERT Y ACKERMANN.

Toda la lógica bivalente puede ser reducida a cuatro axiomas, que Hilbert y Ackermann escriben del siguiente modo[1]:

(212) Ax. I : $\vdash (p \vee p) \supset p$

(213) Ax. II : $\vdash p \supset (p \vee q)$

(214) Ax. III : $\vdash (p \vee q) \supset (q \vee p)$

(215) Ax. IV : $\vdash (p \supset q) \supset [(r \vee p) \supset (r \vee q)]$

1 HILBERT-ACKERMANN, 1949. El signo $\vdash$ significa que la expresión que sigue es un axioma o un teorema. En la interpretación por tablas de verdad ello quiere decir que toma siempre el valor 1.

Más precisamente, Russell añade a este conjunto un quinto axioma $\vdash [p \vee (q \vee r)] \supset [q \vee (p \vee r)]$, pero se ha demostrado que es reducible a los cuatro precedentes.

Estos cuatro axiomas se escriben del siguiente modo en la notación de Russell:

(216) Ax. I : $\vdash (\overline{p \vee p}) \vee p$

(217) Ax. II : $\vdash \bar{p} \vee (p \vee q)$

(218) Ax. III : $\vdash (\overline{p \vee q}) \vee (q \vee p)$

(219) Ax. IV : $\vdash (\overline{\bar{p} \vee q}) \vee [(\overline{r \vee p}) \vee (r \vee q)]$

Esta notación expresa, en efecto, el condicional $(p \supset q)$ por la alternativa $(\bar{p} \vee q)$ (ver proposición (159)). Hilbert, pese a fundamentar el cálculo proposicional sobre las relaciones $(\vee)$ y $(-)$, declara considerar la notación $(p \supset q)$ como una forma abreviada de la notación $(\bar{p} \vee q)$; al igual que la notación $(p \,.\, q)$ es una abreviatura de $\overline{\bar{p} \vee \bar{q}}$.

La notación de Frege, que traduce todo en implicaciones, da:

(220) Ax. I : $\vdash (\bar{p} \supset p) \supset p$ [1]

(221) Ax. II : $\vdash p \supset (\bar{p} \supset q)$

(222) Ax. III : $\vdash (\bar{p} \supset q) \supset (\bar{q} \supset p)$

(223) Ax. IV : $\vdash (p \supset q) \supset [(\bar{r} \supset p) \supset (\bar{r} \supset q)]$

Finalmente la de Brentano, que reduce todo a la negación y a la conjunción, da:

(224) Ax. I : $\vdash \overline{\overline{\bar{p} \cdot \bar{p}} \cdot \bar{p}}$

(225) Ax. II : $\vdash \overline{p \cdot \bar{p} \cdot \bar{q}}$

(226) Ax. III : $\vdash \overline{\overline{\bar{p} \cdot \bar{q}} \cdot \bar{q} \cdot \bar{p}}$

(227) Ax. IV : $\vdash \overline{\overline{p \cdot \bar{q}} \;\; \overline{\bar{r} \cdot \bar{p}} \;\; \bar{r} \cdot \bar{q}}$

Una vez admitido que estos cuatro axiomas, expresables según cualquiera de las cuatro notaciones precedentes, soportan todo el peso de la lógica bivalente, el problema que nos planteamos es el siguiente: ¿cuáles son las estructuras operatorias que se dan explícita o implícitamente, al elegir dichas proposiciones primeras? Cada uno de los axio-

1 Recordemos que los dos signos $\supset$ no tienen el mismo significado. El primero representa una operación (el condicional), mientras que el segundo representa una relación (la implicación). De un modo general, el condicional principal es el que está ligado a $\vdash$ que representa la relación de implicación, que notaremos $\longrightarrow$.

mas constituye, en efecto, la descripción de cierta forma de operación. Es lo que precisa Hilbert al traducir cada uno de ellos por una regla del cálculo. Pero, lo que nos interesa aquí no es saber cómo va a descenderse, partiendo de los axiomas, y considerándolos como reglas del cálculo, a la demostración de los teoremas particulares de la lógica proposicional: esa es la obra propia del axiomatista. Lo que nos importa, por el contrario, es remontarnos de los axiomas a su fundamento, por así decirlo, pre-axiomático, o dicho de otro modo a la estructura operatoria que ellos encubren pero que aplican, aunque implícitamente a menudo, a la deducción, pero que se trata de explicitar si se quiere alcanzar la estructura de conjunto que constituyen por su reunión. Ahora bien, esta estructura operatoria implica nueve aspectos distintos:

I. **El encaje de la parte en el todo.** — El axioma II, escrito en la forma (213) expresa el hecho fundamental que toda proposición p forma parte de un todo constituido por ella misma y otras proposiciones a las que se reúne de manera disyuntiva. Sea $p =$ "x_1 es Vertebrado" y $q =$ otra proposición cualquiera tal como "x_1 es acuático" o "x_1 es unicelular", etc., se tiene siempre $p \supset (p \vee q)$, es decir "si x_1 es vertebrado, es entonces vertebrado o acuático (o unicelular, etc.) o los dos a la vez": la proposición $p \supset (p \vee q)$ es por lo tanto siempre verdadera, ya que si $(p \cdot q)$ es falsa, se tiene por lo menos $(p \cdot \bar{q})$, y si $(p \cdot \bar{q})$ es falsa, se tiene al menos $(\bar{p} \cdot q)$: de donde se deriva $(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$.

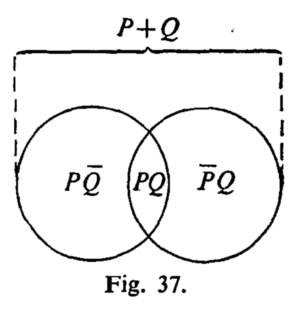


Fig. 37.

Traducido en lenguaje de clases, el axioma $p \supset (p \vee q)$ corresponde, en efecto, a la inclusión $P \subseteq (P \cup Q)$ (ver fig. 37), en la que $P \cup Q$ se descompone en $PQ \cup P\bar{Q} \cup \bar{P}Q$, una o dos de estas subclases puede ser nula (a condición que no sea PQ y $\bar{P}Q$ a la vez, ni PQ y $P\bar{Q}$ a la vez).

Se constata enseguida que este axioma es absolutamente general y puede incluso escribirse $p \supset (p \vee \bar{p})$, lo que corresponde a la inclusión de clases $P \subseteq (P \cup \bar{P})$: la clase de los argumentos que verifican a p está incluida en el universo del discurso formado por todos los argumentos que verifican a p (clase P) y por todos aquellos para

los cuales p tiene un valor falso (clase $\bar{P}$), sin *tertium* posible (principio de tercero excluido propio de la lógica bivalente).

Ahora bien, dicho axioma presenta un significado operatorio fundamental. Equivale a considerar cada proposición como una afirmación delimitada o parcial, incluida en una afirmación más extensa: esta desempeña así el rol de un todo en relación a la primera, que constituye de este modo, una parte integrante. Este encaje de la parte en el todo es seguramente el primer principio de toda lógica y pertenece en común tanto a la lógica proposicional como a la de clases y relaciones.

En lenguaje de disyunciones solas, el axioma II equivale a $\bar{p} \vee (p \vee q)$ (proposición (217)), ya que $p \supset q$ equivale a $(\bar{p} \vee q)$ (proposición (159)). En el ejemplo elegido, tendríamos "O bien x_1 no es vertebrado, o bien es vertebrado o acuático (o unicelular, etc.)". El modelo correspondiente de clases es entonces $\bar{P} \cup (P \cup Q) = (P \cup Q)$, o $\bar{P} \subseteq (P \cup Q)$, ya que si el conjunto referencial es $(P \cup Q) = (PQ \cup P\bar{Q} \cup \bar{P}Q)$ con PQ positivo o no, la clase $\bar{P}$ está comprendida en $P \cup Q$.

En lenguaje de implicaciones, el axioma II es $p \supset (\bar{p} \supset q)$ (proposición (221)) ya que $(p \vee q) \leftrightarrow (\bar{p} \supset q) \cdot (\bar{q} \supset p)$. En efecto, la expresión $(\bar{p} \supset q)$ significa $(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q})$ como la expresión $(p \vee q)$ misma. La expresión $p \supset (\bar{p} \supset q)$ corresponde pues a las relaciones de clases $P \subseteq (PQ \cup P\bar{Q} \cup \bar{P}Q)$. La expresión $\bar{q} \supset p$ da también $(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$ y corresponde a las mismas inclusiones.

Finalmente, en lenguaje de conjunciones y negaciones da:

$$(\overline{p \cdot \bar{p} \cdot \bar{q}}) \leftrightarrow (\bar{p} \vee \overline{\bar{p} \cdot \bar{q}}) \leftrightarrow p \supset (\overline{\bar{p} \cdot \bar{q}}) \leftrightarrow p \supset (p \vee q)$$

y corresponde a los mismos encajes de clases.

Sea cual sea la formulación adoptada, se constata que el axioma II expresa siempre el mismo encaje fundamental de la parte en el todo. Ya se lo traduzca en términos de extensión (clases), de comprensión (relaciones) o de simple aserción (proposiciones), constituye siempre la condición inicial de toda estructuración lógica.

II. **El encaje de la parte en sí misma (o del todo en sí mismo).** — Un segundo principio fundamental de la lógica es el que expresa el axioma I $(p \vee p) \supset p$; su rango muestra incluso que las axiomáticas de Russell y de Hilbert han hecho de él la primer proposición a admitir para construir el cálculo interproposicional. En efecto, según Russell, una proposición es "aquella que se implica a sí misma": $\vdash p \supset p$. Pero es dudoso que una proposición aislada (suponiendo que esta noción tenga un sentido) pueda implicarse a sí misma, ya que una proposi-

ción es siempre a la vez parte integrante de un conjunto (Axioma II) y totalidad en sí misma: esto es verdadero ya de las proposiciones llamadas "atómicas" o "elementales" que resultan desde un comienzo de la interferencia con otras proposiciones. Toda proposición implica pues simultáneamente otras proposiciones y ella misma.

Pero esta auto-implicación o encaje de la parte en sí misma, es distinta de la hétero-implicación o encaje de la parte en el todo, pese a que ambas son solidarias. En efecto, el axioma I se escribe $(p \vee p) \supset p$ y no $p \supset (p \vee p)$ o $p \equiv (p \vee p)$, pese a que estas dos expresiones sean también verdaderas. Pero la relación $(p \vee p) \supset p$ es la más notable de las tres, ya que expresa separadamente esta verdad, independientemente de $p \supset (p \vee q)$, que una proposición p reunida a sí misma $(p \vee p)$ implica su propia verdad, pero nada más que la verdad ya contenida en p sola: la auto-implicación es pues a la vez necesaria y tautológica. Corresponde en términos de clases, a la tautificación $A \cup A = A$ (proposición 20). Ahora bien, el encaje de la parte en el todo puede darse sin que implique por ello tautificación: en el caso de los números enteros finitos, se tiene $0 < 1$; $1 < 2$; y $n < n + 1$ (encaje de cada número en el siguiente), o incluso $n < (n + m)$, y no obstante se tiene $1 + 1 = 2$ y no $1 + 1 = 1$ (iteración y no tautología).

III. **La conmutatividad de la reunión de las partes.** — El axioma III $(p \vee q) \supset (q \vee p)$ expresa este tercer principio fundamental según el cual la reunión de los elementos p y q en un solo todo $(p \vee q)$ es independiente del orden y presenta, en consecuencia, la propiedad de la conmutatividad. Este principio constituye el equivalente, en el dominio de las operaciones interproposicionales, de lo que representa, en lógica de clases, la conmutatividad de la adición $(P \cup Q = Q \cup P)$, y en lógica de relaciones, la conmutatividad de la adición de relaciones simétricas: $(\overset{a}{\longleftrightarrow} + \overset{a'}{\longleftrightarrow}) (= \overset{a'}{\longleftrightarrow} + \overset{a}{\longleftrightarrow})$.

La traducción de esta relación en términos de disyunción:

$$(\overline{p \vee q}) \vee (q \vee p)$$

no agrega nada nuevo. Lo mismo ocurre con la notación $\overline{\overline{p \cdot \overline{q}} \cdot \overline{q} \cdot \overline{p}}$ que equivale exactamente a $\overline{p \vee q} \vee (q \vee p)$, según la regla de dualidad.

Por el contrario, la expresión $(\overline{p} \supset q) \supset (\overline{q} \supset p)$ introduce, de ma-

nera explícita, una relación contenida solamente en forma implícita en las expresiones precedentes: la reciprocidad. En efecto, si se tiene:

$$(\bar{p} \supset q) \supset (\bar{q} \supset p)$$

se tiene necesariamente también $(\bar{q} \supset p) \supset (\bar{p} \supset q)$, por lo tanto $(\bar{p} \supset q) \equiv (\bar{q} \supset p)$, ya que $(p \vee q)$ equivale simultáneamente a $(\bar{p} \supset q)$ y a $(\bar{q} \supset p)$ y lo mismo ocurre con $(q \vee p)$. La reciprocidad, que constituye un principio tan esencial como fundamental de la lógica, interviene, ya sea en una u otra forma, en cada operación, y resulta evidente que incluso en la notación en términos de pura disyunción, se tiene ya:

$$[(\overline{p \vee q}) \vee (q \vee p)] \leftrightarrow [(\overline{q \vee p}) \vee (p \vee q)]$$

lo que agrega un elemento de reciprocidad a la simple conmutatividad. Pero en el caso de las operaciones no conmutativas, como el condicional, el problema de la reciprocidad adopta una forma especial: es por ello que la expresión $(\bar{p} \supset q) \supset (\bar{q} \supset p)$, que es un sistema de condicionales, difiere de la expresión $(p \vee q) \supset (q \vee p)$ en que ambos términos $(p \vee q)$ y $(q \vee p)$, tomados aisladamente son equivalentes a $(\bar{p} \supset q)$ y $(\bar{q} \supset p)$ reunidos. Volveremos más adelante sobre la discusión de esta forma particular del axioma III, debida a las exigencias de la notación de Frege, en el Nº VIII donde trataremos el problema de la reciprocidad en general.

IV. **El orden de los encajes.** — Con la noción de orden, llegamos a ciertos principios que es necesario admitir a título de fundamentos de la lógica, pese a que no figuren explícitamente en los axiomas. Pero, si bien no son objeto de una formulación axiomática especial, por lo menos en lógica, (Hilbert enunció con cuidado los axiomas de orden entre los axiomas de la geometría), no por ello desempeñan un rol implícito menos evidente entre los cuatro axiomas discutidos aquí mismo (rol que aumenta incluso en importancia con el "axioma único" de Nicod, que los resume en uno solo).

Contrariamente a la operación de reunión de las partes $(p \vee q)$, que es conmutativa, los encajes de la parte en el todo suponen, en efecto, la presencia de un orden que se traduce en la no-conmutatividad

de la operación condicional. Así $(p \supset q)$ no equivale a $(q \supset p)$ porque la parte p se halla implicada en el todo q y no a la inversa. Por ejemplo, el axioma II se escribe $p \supset (p \vee q)$ y no $(p \vee q) \supset p$, este segundo enunciado no sólo no equivale al primero, sino que expresa además una aserción falsa, ya que $(p \vee q)$ implica sólo la verdad de p ó de q (con posibilidad, pero no necesidad, de la verdad simultánea de ambas proposiciones). El axioma II supone pues el orden $p \supset (p \vee q)$, por oposición al orden $(p \vee q) \supset p$, lo que equivale a decir que encierra la necesidad de una distinción general entre el orden $(p \supset q)$ y el orden $(q \supset p)$.

En efecto, si bien la noción de orden es extraña a la mayoría de las operaciones interproposicionales $(\vee)$, $(\cdot)$, (w), $(\equiv)$, $(|)$, se impone en cambio en el caso de los dos condicionales $(\supset)$ y $(\subset)$. ¿Se dirá entonces que el condicional $(p \supset q)$ equivale a la disyunción $(\bar{p} \vee q)$, es decir a una operación conmutativa? Pero ello implica justamente reconocer que el orden inverso $(q \supset p)$ equivale a otra disyunción, la cual es $(\bar{q} \vee p)$. El interés no estriba pues en que $(\bar{p} \vee q)$ pueda permutarse por $(q \vee \bar{p})$, sino en que las operaciones que contienen términos no permutables $(p \supset q)$ y $(q \supset p)$ corresponden a dos aserciones distintas $(\bar{p} \vee q)$ y $(p \vee \bar{q})$ que no son de ningún modo equivalentes.

La razón es clara: la operación $(p \vee q)$ expresa la reunión de las partes p y q en un mismo todo $(p \vee q)$, y esta reunión es independiente del orden, ya que se trata de partes correspondientes a un mismo nivel jerárquico. Por el contrario, $p \supset q$, y la serie $p \supset q; q \supset r; r \supset s$; etc., expresan una sucesión de encajes de la parte en el todo, concebido este todo como una nueva parte en un todo de rango superior. Estos encajes implican pues un orden, el cual corresponde a las inclusiones igualmente ordenadas $P \subseteq Q \subseteq R \subseteq S \subseteq \ldots$, etc.

V. **La intersección de las partes (o de las totalidades).** — A los principios del encaje (1), del auto-encaje (2) y de la conmutatividad de las operaciones de reunión (3), es preciso agregar otro principio que no se deriva de ellos (y que se deriva incluso tan poco que la silogística clásica lo ha dejado casi totalmente de lado): es el de la intersección posible, parcial o total, entre las proposiciones. Nuevamente en este caso, se trata de un principio no axiomatizado explícitamente pero que interviene en estado implícito en los axiomas II y

IV: la operación $(p \vee q)$ significa, en efecto, la eventualidad de tres asociaciones $(p \cdot q)$; $(p \cdot \bar{q})$ y $(\bar{p} \cdot q)$. Ahora bien, como hemos visto (ver figura 37 y el ejemplo), estas tres posibilidades corresponden a la intersección de las clases P y Q, cuya parte común es PQ y cuyas partes no-comunes son $P\bar{Q}$ y $\bar{P}Q$. La operación $(p \vee q)$ implica así la posibilidad de la conjunción $p \cdot q$ en tanto que intersección de las proposiciones parcialmente disyuntas.

VI. **La transitividad de los encajes.** — Tocamos aquí el fundamento principal de la deducción, cuyo principio está formulado explícitamente por el axioma IV. En efecto, al establecer:

$$\vdash (p \supset q) \supset [(p \vee r) \supset (q \vee r)]$$

se afirma que la asociación $(p \vee r)$ implica la asociación $(q \vee r)$ por intermedio de $(p \supset q)$.

Este axioma IV expresa así, en su forma más general, la transitividad de los encajes de parte a todo. Supongamos en efecto, que p implique q,

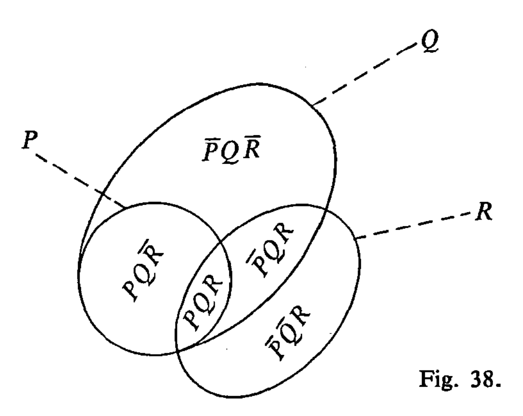


Fig. 38.

es decir que $\vdash p \supset q$. La regla del *modus ponens*[1] permite concluir que $\vdash (p \vee r) \supset (q \vee r)$, por lo tanto que $p \vee r$ implica $q \vee r$. Esta implicación es por otra parte más general que la implicación $(r \supset p) \rightarrow$ $\rightarrow (r \supset q)$ y conduce a ella como a un caso particular. Es lo que

1 La regla del *modus ponens,* dice que, a partir de dos premisas $\vdash p$ y $\vdash p \supset q$, puede concluirse $\vdash q$.

muestra intuitivamente el esquema de las inclusiones de clases correspondientes. El axioma IV puede corresponder, en primer lugar, a la figura 38, donde se tiene:

(228) $$(p \supset q) \rightarrow [(p \vee r) \supset (q \vee r)]$$

entonces $$(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot \bar{r}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot \bar{r})$$

Pero el axioma se mantiene verdadero si la asociación $(\bar{p} \cdot q \cdot r)$ es nula (fig. 39).

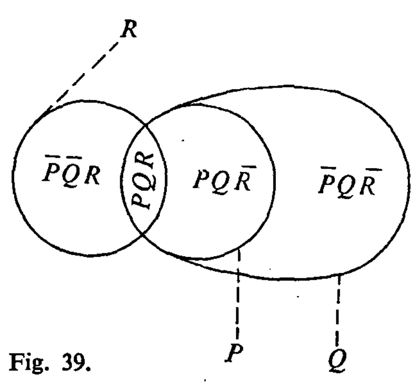


Fig. 39.

Se mantiene igualmente verdadero si la asociación $(\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot r)$ es reemplazada por $(\bar{p} \cdot q \cdot r)$, es decir si $r \supset q$ (fig. 40).

Permanece finalmente verdadero si $(\bar{p} \cdot q \cdot r)$ es anulado, lo que reduce la alternatíva $(p \vee r)$ a $(r \supset p)$. En este caso (fig. 41), los encajes son simplemente:

(229) $$[(p \supset q) \cdot (r \supset p)] \rightarrow (r \supset q)$$

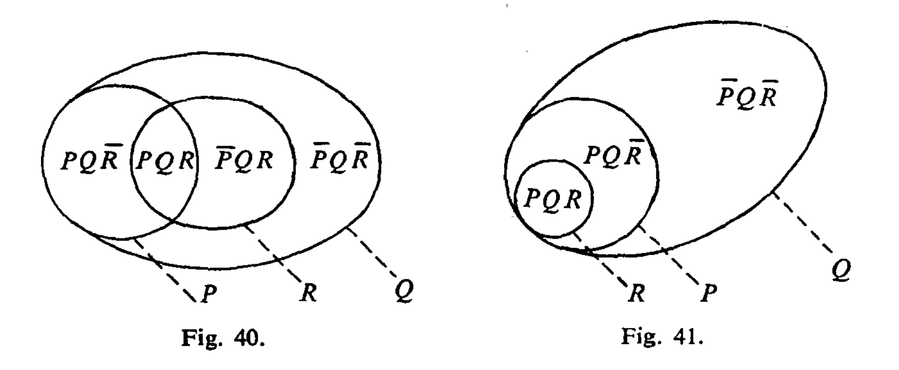


Fig. 40. Fig. 41.

Lo que muestra también la formulación de Frege (proposición (223)):

$$(p \supset q) \rightarrow [(\bar{r} \supset p) \supset (\bar{r} \supset q)]$$

en la que basta reemplazar la negación $\bar{r}$ por una proposición positiva r, para sustituir $(r \supset p)$ por $(r \vee p)$.

El axioma IV, en la expresión elegida por Russell y Hilbert, representa pues la transitividad de los encajes de la parte en el todo bajo su forma más general.

VII. **La complementariedad o reversibilidad simple.** — Si bien los axiomas I-IV desarrollan explícitamente las relaciones de las partes respecto del todo, la conmutatividad de las operaciones de reunión y la transitividad de los encajes, no tienen en cuenta en cambio una relación fundamental, implícita en la formulación de Hilbert (proposiciones (212) a (215)), pero que interviene en el simbolismo de las demás formulaciones (proposiciones (216) a (227)): es la relación de complementariedad, principio de la negación de las operaciones inversas, y, en consecuencia, uno de los fundamentos básicos de toda deducción.

Hilbert mismo precisa que toma la expresión $(p \supset q)$ a título de de abreviatura de $(\bar{p} \vee q)$, es decir que la negación $\bar{p}$ interviene en sus axiomas al igual que la afirmación p. Ahora bien, la negación $\bar{p}$ equivale a dividir el campo de valores considerado en dos sub-clases complementarias P y $\bar{P}$, de modo de tener $(p \text{ w } \bar{p})$ (principio de tercero excluido propio de la lógica bivalente).

Por otra parte, la complementariedad no se refiere solamente a una proposición aislada (p y $\bar{p}$), sino a una relación como tal. Por ejemplo, la relación $\overline{\bar{p} . \bar{q}}$ que interviene en la proposición (226) (axioma III en la notación de Brentano), equivale a la expresión $(p \vee q)$ de la proposición (214), ya que negar $(\bar{p} . \bar{q})$, es decir "ni p ni q", equivale a afirmar $(p \vee q)$, es decir "p ó q". Del mismo modo establecer $(p \supset q)$, equivale a excluir $(p . \bar{q})$, etc. Ahora bien, estas negaciones de relaciones se basan igualmente en la complementariedad: si $(\bar{p} . \bar{q})$ es la negación de $(p \vee q)$ y *viceversa*, es porque $(p \vee q)$ equivale a $(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$, es decir a tres conjunciones cuya reunión representa la complementaria de $(\bar{p} . \bar{q})$ en relación a la afirmación completa o tautología.

$$(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q}).$$

En otros términos, la complementariedad constituye el fundamento, o uno de los dos fundamentos, de la reversibilidad. Ahora bien, si el sistema de encajes, con su transitividad, da cuenta de la fecundidad de las composiciones operatorias, la reversibilidad por su parte, bajo la forma de complementariedad, es la única que asegura su coherencia y no-contradicción, al obligarlo a establecer $(p \cdot \bar{p} \leftrightarrow o)$ y $(p \leftrightarrow \bar{\bar{p}})$. Desde este punto de vista, el principio de no-contradicción $(p \cdot \bar{p} \leftrightarrow o)$ no es sino la expresión de la composición conjuntiva entre una operación directa (afirmación p) y su inversa (negación $\bar{p}$), composición cuya característica particular es la de tener por producto la operación idéntica (o). Lo mismo ocurre cuando una operación binaria, por ejemplo $(p \vee q)$, es compuesta conjuntivamente con su inversa $(\bar{p} \cdot \bar{q})$, el producto resulta ser la negación completa o "contradicción" (o):

(230) $$(p \vee q) \cdot (\bar{p} \cdot \bar{q}) \leftrightarrow (o)$$

Es pues indispensable mostrar el papel fundamental que desempeña implícitamente la reversibilidad simple (complementariedad) en el mecanismo operatorio encerrado en los axiomas I-IV: no solamente cada uno de ellos encierra la negación $(p \vee q)$, que es una reversibilidad monádica, sino que la misma obligación en que se encuentran, de no ser contradictorios entre sí, implica una reversibilidad binaria de la forma (230), que constituye la expresión misma de la no-contradicción entre las operaciones bi-proposicionales en tanto tales.

VIII. **La reciprocidad.** — Existe, por otra parte, una segunda forma de reversibilidad: es la que se invoca al designar el condicional $(q \supset p)$ con el nombre de condicional inverso en relación a $(p \supset q)$. Se trata pues de un nuevo principio esencial del cual no podría prescindirse al desentrañar los fundamentos de la deducción: la reciprocidad. La reciprocidad constituye también una complementariedad, pero en relación a $(p \equiv q)$ y no a la afirmación completa $(p * q) = (p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$, lo que equivale a decir que la reunión conjuntiva de dos operaciones recíprocas equivale a una equivalencia: $(p \supset q) \cdot (q \supset p) \leftrightarrow (p \equiv q)$.

La reciprocidad se halla implícita en el axioma III, ya que si:

$$\vdash (p \vee q) \supset (q \vee p)$$

se tiene también $\vdash (q \vee p) \supset (p \vee q)$, por lo tanto, $(p \vee q) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow (q \vee p)$. Ahora bien, si escribimos el axioma III en la formulación de Frege, tenemos:

(231) $(\bar{p} \supset q) \rightarrow (\bar{q} \supset p)$; pero también $(\bar{q} \supset p) \rightarrow (\bar{p} \supset q)$;

por lo tanto $(\bar{p} \supset q) \leftrightarrow (\bar{q} \supset p)$

La realización de un modelo correspondiente en operaciones de clases es particularmente instructiva en este punto. Se tendrá, en efecto:

$$(\bar{P} \subseteq Q) \leftrightarrow (\bar{Q} \subseteq P)$$

(Ver proposiciones (206 bis), (207), (208) y (208 bis) y la figura 36).

Ahora bien, se advierte que esta equivalencia no es una identidad, sino que forma parte de una identidad cuya forma completa es (fig. 42):

$$PQ \cup (\bar{P}Q \cup P\bar{Q}) = (P\bar{Q} \cup PQ) \cup \bar{P}Q$$

(en la cual PQ puede ser nulo).

Esta expresión, que es por lo tanto la forma completa de:

$$(\bar{P} \subseteq Q) = (\bar{Q} \subseteq P)$$

constituye, como se ve, lo que hemos llamado una vicariancia en el dominio de la lógica de clases (cap. II, § 13). Ahora bien, la vicariancia o sustitución complementaria, constituye en sí misma, como se recordará, el principio de las relaciones simétricas, es decir, justamente de las equivalencias.

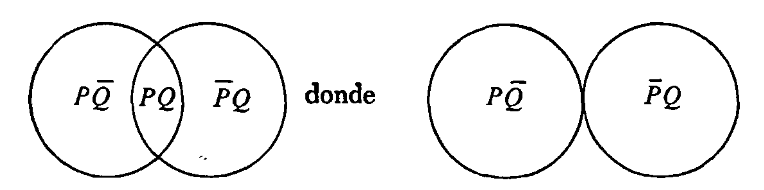


Fig. 42.

De un modo general, la reciprocidad representa pues la reversibilidad aplicada a las relaciones: o bien traduce directamente la equivalencia, o bien expresa una complementariedad en relación a la equivalencia.

IX. **La sustitución.** — La sustitución no podría evidentemente formularse como un axioma, pero como es indispensable para la deducción, se lo ubica entre las reglas. Es cierto que algunos autores dan la impresión de prescindir de la misma. Lo que ocurre es que en lugar de axiomas, que son expresiones que pertenecen al sistema, utilizan esquemas de axiomas, los cuales pertenecen a la metalengua que permite construir el sistema. Pero la sustitución no se halla por ello menos presente en tanto operación: está simplemente en la definición de las variables sintácticas que sirven para escribir los esquemas de axiomas [1].

§ 35. EL AXIOMA UNICO DE J. NICOD, Y LA ESTRUCTURA DE CONJUNTO DE LA LOGICA BIVALENTE.

Encajes aditivos (v) o multiplicativos (.) de la parte en el todo y en sí misma, transitividad ordenada de dichos encajes, conmutatividad de la reunión de las partes, reversibilidad por complementariedad o reciprocidad y sustituciones, tales son pues los caracteres generales del mecanismo operatorio que suponen, pero no explicitan completamente, los axiomas de Russell y Hilbert. El fundamento de la deducción debe pues buscarse en la estructura de conjunto que supone semejante sistema de operaciones, se trata pues, en consecuencia, de deducir en qué consiste su necesaria solidaridad.

Ahora bien, para poder llegar del análisis separado de los diversos

1 Ver por ejemplo Grize, 1969, pág. 7.

aspectos operatorios enumerados precedentemente a la reconstitución sintética del sistema total que ellos caracterizan, no hay necesidad de abandonar el terreno de la axiomática misma, podemos pues continuar aplicando el mismo método de disección operatoria, aplicado entonces a los cuatro axiomas (I-IV), reunidos ahora en una sola fórmula. Los axiomas de una teoría deductiva deben ser a la vez completos, compatibles e independientes, su condensación en una fórmula única permite, en efecto, deducir directamente la estructura de conjunto que constituyen entre sí. El trabajo se ve a este respecto enormemente facilitado por el hecho de que se ha llegado a realizar esta fusión de las cuatro expresiones distintas en una sola expresión sintética. Partiendo de los axiomas de Russell y Whitehead, J. Nicod tuvo, en 1916, una idea del más alto interés [1]: reunirlos en un axioma único que agruparía el conjunto de las operaciones requeridas para construir la lógica proposicional y constituiría así el fundamento necesario y suficiente de toda deducción.

No siempre se ha comprendido el alcance del descubrimiento de Nicod, y ello se debió en parte a que se asoció su éxito al de Sheffer, quien había obtenido anteriormente una traducción de todas las operaciones interproposicionales en lenguaje de incompatibilidad (ver § 30, en V). Algunos, con M. Boll, hablan de la "síntesis de Sheffer-Nicod" [2] como del triunfo de la reducción de la diversidad a la unidad. Otros ven en ello una simple "curiosidad" (como dijo Hilbert de la notación única de Sheffer [3]), o una complicación de hecho, como precio a una simplificación aparente [4]. Su interés nos parece por el contrario, derivarse del hecho que, obligado a concentrar en una sola fórmula las operaciones contenidas en los axiomas enumerados precedentemente, el "axioma único" pondrá en relación cinco proposiciones distintas (p, q, r, s y t), mientras que los axiomas I a III no relacionaban sino dos proposiciones y el axioma IV sólo tres. Ahora bien, reunir en un solo todo operatorio n proposiciones distintas, equivale a mostrar como los axiomas completos, pero independientes, van a disponerse entre sí para constituir una estructura. Desde este punto de vista nos situaremos pues para estudiarlo tratando al mismo tiempo

1 El manuscrito de Nicod, 1917, fue enviado en octubre de 1916.
2 Boll, 1948, pág. 221.
3 Hilbert-Ackermann, 1949
4 Serrus, 1945, págs. 95-96.

de intentar discernir en él la estructura de conjunto de la lógica bivalente.

Veamos en primer lugar dicho axioma. Su forma original es:

(232) $$P \mid \pi \mid Q$$

expresión en la que se tiene, dado que $\bar{p} = \mathrm{d}f p \mid p$:

$$P = \mathrm{d}f\ p \mid (q \mid r), \quad \pi = \mathrm{d}f\ t \mid \bar{t} \quad \text{y} \quad Q = \mathrm{d}f\ (s \mid q) \mid (\overline{p \mid s}).$$

como por otra parte:

$$p \supset q = \mathrm{d}f\ p \mid (q \mid q) \qquad \text{y} \qquad p \cdot q = \mathrm{d}f\ (p \mid q) \mid (p \mid q),$$

se deduce:

$$p \mid (q \mid r) \leftrightarrow p \supset (q \cdot r) \qquad \text{y} \qquad t \mid \bar{t} \leftrightarrow t \supset t.$$

por lo tanto

(233) $$[p \mid (q \mid r)] \mid [(t \mid \bar{t}) \cdot (s \mid q) \mid (\overline{p \mid s})$$

o también:

$$\leftrightarrow [p \supset (q \cdot r)] \supset \{ (t \supset t) \supset [(s \mid q) \supset (p \mid s)] \}.$$

Por otra parte (proposición (137)): $(p \mid q) \leftrightarrow (p \supset \bar{q})$. Por lo tanto:

$$(s \mid q) \leftrightarrow (q \mid s) \leftrightarrow (q \supset \bar{s}) \quad \text{y} \quad (p \mid s) \leftrightarrow (p \supset \bar{s}).$$

De donde:

(234) $$[p \supset (q \cdot r)] \supset \{ (t \supset t) \supset [(q \supset \bar{s}) \supset (p \supset \bar{s})] \}.$$

Por otra parte, se tiene $(\overline{p \mid s}) = (p \cdot s)$ ya que la conjunción es la inversa de la incompatibilidad. De donde se deduce:

$$(q \mid s) \supset (p \mid s) \leftrightarrow (p \cdot s) \supset (q \cdot s) \qquad \text{ya que} \qquad p \supset q = \bar{q} \supset \bar{p}$$

Por lo tanto:

(235) $[p \supset (q \cdot r)] \supset \{ (t \supset t) \cdot [(p \cdot s) \supset (q \cdot s)] \}$

Es en esta última forma como Russell[1], Boll[2] y Serrus[3] escriben el axioma de Nicod. Pero esta formulación es menos fuerte que la de las proposiciones (233) y (234), ya que las conjunciones $(p . s)$ y $(q . s)$ no bastan para determinar todas las relaciones entre p, q y s que precisan las incompatibilidades e implicaciones: si se tiene $(q \supset s)$, las conjunciones $(p . s)$ y $(q . s)$ no excluyen la conjunción $(\bar{q} . s)$.

Por otra parte, resulta claro que si se tiene $(q \mid s)$ verdadero en la proposición (233), no se puede tener simultáneamente $(q . s)$ verdadero en (235), si se trata de la misma proposición s (ya que $q \mid s = \overline{q . s}$). Dejaremos pues en su forma clásica la proposición (235) y escribiremos del siguiente modo las proposiciones (233) y (234):

(236) $[p \supset (q \cdot r)] \supset \{ (t \supset t) \cdot [(q \mid \bar{s}) \supset (\bar{s} \mid p)] \}$

y

(237) $[p \supset (q \cdot r)] \supset \{ (t \supset t) \cdot [(q \supset s) \supset (p \supset s)] \}$

De igual modo, las proposiciones (235), (236) y (237) son equivalentes para la misma proposición s, que está afirmada en (235) y en (237) y negada en (236).

Dicho esto, tratemos ahora de analizar su estructura de conjunto. Examinaremos sucesivamente: 1º las relaciones entre p, q y s; 2º la posición de la proposición r; 3º la de la proposición t, y 4º la correspondencia entre la estructura deducida y la de los "agrupamientos".

1º Las relaciones entre las proposiciones p, q y s son simples, ya que $(p \supset q)$ está dado en la proposición (235) y $(q \supset s)$ en la proposición (237). Si hacemos corresponder las clases P, Q y S a los argumentos que verifican p, q y s, se tiene directamente el encaje

1 Russell, 1928, pág. 183.
2 Boll, 1948, pág. 86.
3 Serrus, 1945, pág. 95.

$P \subseteq Q \subseteq S$, o bien la equivalencia $P = Q = S$, o una combinación de ambos $P = Q \subseteq S$ o $P \subseteq Q = S$.

En los tres casos tenemos pues:

$$(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q) \leftrightarrow q \qquad \text{y} \qquad (q \cdot s) \vee (\bar{q} \cdot s) \leftrightarrow s$$

pero $(\bar{p} \,.\, q)$ y $(\bar{q} \,.\, s)$ pueden ser nulos en caso de equivalencia (ver la fig. 43).

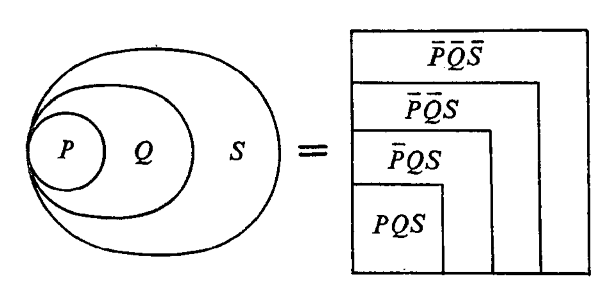


Fig. 43.

2° En cuanto a la posición de r, los datos son: $p \supset (q \cdot r)$, luego $p \supset r$, es decir $(p \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot \bar{r})$. No puede haber pues más que dos tipos de relaciones entre r y q: un condicional $(r \supset q)$; $(q \supset r)$; un bicondicional $(r \equiv q)$; o una disyunción $(r \vee q)$. Cualquier otra relación excluiría, en efecto, $p \supset (q \cdot r)$.

En el caso de la figura 44, se tendrá entonces una serie de encajes $(p \supset q)$; $(q \supset r)$; $(r \supset s)$ o $(p \supset r)$; $(r \supset q)$; $(q \supset s)$ o $(p \supset q)$; $(q \supset s)$; $(s \supset r)$; etc., con la posibilidad de un bicondicional en lugar de cualquiera o de todas estas implicaciones. Habrá pues que agregar simplemente un eslabón más a la serie $p \supset \supset (q \supset s)$, pero se tendrá aún una serie correspondiente a un simple agrupamiento aditivo de clases.

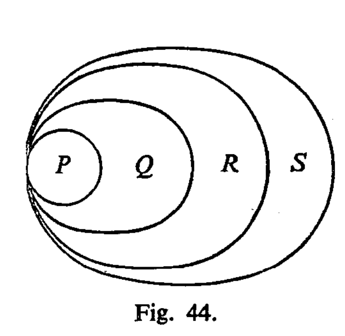


Fig. 44.

En el caso $(r \vee q)$, por el contrario, se tendrá $(q \cdot r) \vee (q \cdot \bar{r}) \vee (\bar{q} \cdot r)$. Pero como se tiene $(q \supset s)$ (proposición (237)),

se tendrá también $(r \vee s)$ [1] y las conjunciones $(q \, . \, r)$ y $(q \, . \, \bar{r})$ tomarán la forma $(q \, . \, \bar{r} \, . \, s)$ y $(q \, . \, r \, . \, s)$. Se obtendrá así, por eliminación de $(q \, . \, \bar{s})$, que es contradictoria con $(q \supset s)$, las seis combinaciones:

$$(q \cdot r \cdot s) \vee (\bar{q} \cdot r \cdot s) \vee (\bar{q} \cdot r \cdot \bar{s}) \vee (q \cdot \bar{r} \cdot s) \vee (\bar{q} \cdot \bar{r} \cdot s) \vee (\bar{q} \cdot \bar{r} \cdot \bar{s})$$

Lo que equivale a decir que las disyunciones $(q \vee r)$ y $(r \vee q)$ y el condicional $(q \supset s)$ corresponden a un agrupamiento multiplicativo de clases que se puede representar en forma de una tabla de doble entrada:

	QS	$\bar{Q}S$	$\bar{Q}\bar{S}$
R	QSR	$\bar{Q}SR$	$\bar{Q}\bar{S}R$
$\bar{R}$	$QS\bar{R}$	$\bar{Q}S\bar{R}$	$\bar{Q}\bar{S}\bar{R}$

Y, como se tiene $p \supset (q \cdot r)$, la clase P estará ella misma incluida en la clase QRS, de donde se derivan dos sub-clases $PQRS$ y $\bar{P}QRS$ (ver fig. 45).

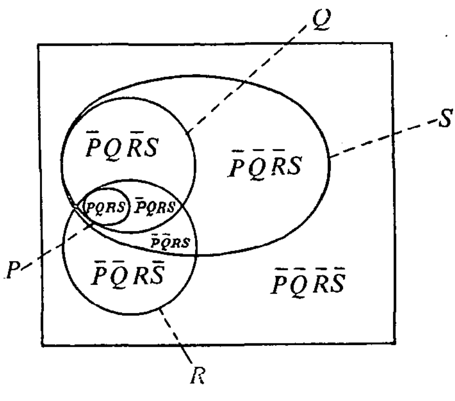


Fig. 45.

En síntesis, una de dos: o bien r implica q y s (o es implicada por q y por s) y la estructura dada corresponde entonces a un agrupa-

1 La expresión $(q \supset s) \supset [(q \vee r) \supset (r \vee s)]$ no es otra, en efecto, sino el axioma IV, que se reencuentra naturalmente en el axioma único, puesto que éste lo reúne a los axiomas I-III.

miento aditivo de clases (fig. 44), o bien hay disyunción entre r y q, y por lo tanto también entre r y s, y las clases correspondientes constituyen un agrupamiento multiplicativo (ver fig. 45).

3º La conclusión que se desprende es pues que el "axioma único" supone dos estructuras posibles:

a) La primera consistiría en una serie de implicaciones de encajes: $(p \to q); (q \to r); (r \to s)$ y $(s \to t)$, o cualquier otro orden al respecto $(p \to q)$; $(p \to r)$ y $(q \to s)$.

b) La segunda conservaría los encajes $(p \to q)$; $(p \to r)$; $(q \to s)$ y $p(\text{o } q, \text{o } r \text{ o } s) \to t$, pero introduciría la disyunción $(q \vee r) \to (r \vee s)$.

En ambos casos, el axioma único correspondería a una estructura de clases elementales: al agrupamiento aditivo de clases ($P \subset Q \subseteq$ $\subseteq R \subseteq S \subseteq T$, o según otro orden), o al agrupamiento de multiplicaciones bi-unívocas:

$$PQST \cup \bar{P}QST \cup \overline{PQ}ST \cap (R \cup \bar{R})$$

Nos falta mostrar que esta correspondencia es bi-unívoca, es decir que, por una parte, si se traducen los agrupamientos de clases en términos de proposiciones, volvemos al axioma de Nicod y que, por otra parte, si se expresa este axioma en términos de implicaciones primarias $(p \to q)$ y secundarias [llamaremos así las implicaciones $(p' \to q)$ definidas por las proposiciones (170) a (172)], se constituye un agrupamiento interproposicional isomorfo a los agrupamientos de clases correspondientes.

Partamos del primero de estos dos casos posibles: aquel en que las implicaciones $(p \to q)$; $(q \to r)$; $(r \to s)$ y $(s \to t)$ corresponden a los encajes de clases $P \subseteq Q \subseteq R \subseteq S \ldots$ Como se recordará la forma completa de dicho agrupamiento es una serie de divisiones dicotómicas en clases primarias y secundarias, como por ejemplo:

$$P + P' = Q; \quad Q + Q' = R; \quad R + R' = S; \quad S + S' = U$$

Volvamos a traducir entonces estas relaciones de clases en términos de proposiciones y preguntémonos qué significan las clases secundarias P', Q', R' y S'. Ahora bien, acabamos de ver (en III) que toda implicación $(p \to q)$, es decir $(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$, encubre una relación ternaria que implica la intervención de una "implicación se-

cundaria'' $(p' \rightarrow q)$. En efecto, si la conjunción $(\bar{p} \cdot q)$ no es nula, es decir si $(p \rightarrow q)$ no se confunde con $(q \rightarrow p)$, es decir con $(p \leftrightarrow q)$, se tiene entonces necesariamente:

$$(p \supset q) \rightarrow [(p \supset q) \cdot (p' \supset q)] \quad \text{o} \quad p' \leftrightarrow \bar{p} \cdot q.$$

(*cf.* proposición (170)).

Ejemplo: Si $p =$ "x_1 es vertebrado" implica $q =$ "x_1 es un animal" sin que q implique p, la implicación $(p \rightarrow q)$ implica ella misma la verdad de la proposición $p' \leftrightarrow \bar{p} \cdot q$ (= "x_1 es un animal no-vertebrado") de modo que $p' =$ "x_1 es un invertebrado" implica $q =$ "x_1 es un animal".

Se tendrá pues, ya que $p' \leftrightarrow (\bar{p} \cdot q)$:

$$[(p \supset q) \cdot (p' \supset q)] \rightarrow [q \subsetneqq (p \vee p')]$$

(*cf.* proposición (171)), o más simplemente: $(p \vee p' \leftrightarrow q)$.

Igualmente tendremos:

$$(q \supset r) \rightarrow [q \vee q' \equiv r]; \text{ etc.}$$

Se ve entonces inmediatamente que las clases secundarias P', Q', R' y S' del agrupamiento $P \subseteq Q \subseteq R \subseteq S \subseteq U$ corresponden a estas proposiciones secundarias p', q', r' y s' de los encajes de implicaciones. Se tendrá pues, en caso que $p \rightarrow q$; $q \rightarrow r$; $r \rightarrow s$ y $s \rightarrow t$, un agrupamiento de las proposiciones mismas, cuya forma será:

(238) $(p \vee p') \leftrightarrow q$; $(q \vee q') \leftrightarrow r$; $(r \vee r') \leftrightarrow s$; $(s \vee s') \leftrightarrow t$; etc.

Ahora bien, como las proposiciones p y p' son, por definición, exclusivas, ya que $p' \leftrightarrow (\bar{p} \cdot q)$, se extraerán de estos encajes (238) las siguientes incompatibilidades:

(239) $(p \mid p')$; $(q \mid q')$; $(r \mid r')$; etc.

Por otra parte, como se tiene $(p \supset q)$ y $(p \supset r)$, se deduce de ello:

(240) $(p \mid q')$; $(p \mid r')$; $(p \mid s')$

Las negaciones $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$ y $\bar{s}$ corresponderán entonces a la siguiente tabla:

(241)
$$\begin{aligned} \bar{p} &\leftrightarrow p' \vee q' \vee r' \vee s' \vee t' \ldots \\ \bar{q} &\leftrightarrow q' \vee r' \vee s' \vee t' \ldots \\ \bar{r} &\leftrightarrow r' \vee s' \vee t' \ldots \\ \bar{s} &\leftrightarrow s' \vee t' \ldots, \text{etc.} \end{aligned}$$

Finalmente, de $(s \vee s' \leftrightarrow t)$, se extrae:

(242)
$$(s \vee s' \equiv t) \rightarrow (t \supset t)$$

De lo que resulta entonces:

$$[p \supset (q \cdot r)] \leftrightarrow \{ (t \supset t) \cdot [(q \mid \bar{s}) \supset (p \mid \bar{s})] \}$$

o

$$[p \supset (q \cdot r)] \leftrightarrow \{ (t \supset t) \cdot [(q \supset s) \supset (p \supset s)] \}$$

Por lo tanto, el axioma único es idéntico al agrupamiento (238) en caso de basarse en una serie de implicaciones (caso 1).

Si ahora (caso 2), en lugar del dilema $(p \vee p') \leftrightarrow q$, que constituye una dicotomía particularmente simple, se hace intervenir el trilema $(q \vee r)$ entonces $(s \vee r)$, el agrupamiento tomará la siguiente forma:

(243)

	pq	$\bar{p}q$	$\bar{p}\bar{q}s$	$\bar{p}\bar{q}\bar{s}$
r	pqr	$\bar{p}qr$	$\bar{p}\bar{q}rs$	$\bar{p}\bar{q}r\bar{s}$
$\bar{r}$	$pq\bar{r}$	$\bar{p}q\bar{r}$	$\overline{pqr}s$	$\overline{pqrs}$

donde $\bar{p} \leftrightarrow p' \vee q' \vee s' \ldots$; $\bar{q} \leftrightarrow q' \vee s' \ldots$; $\bar{r} \leftrightarrow s' \vee \ldots$; y $\bar{s} \leftrightarrow r'$

Habrá pues una serie doble de encajes en lugar de una sola serie, pero es evidente que se tendrá nuevamente un agrupamiento (volveremos más adelante sobre esta forma en el § 39).

En síntesis, cuando se fusiona en una sola expresión los cuatro axiomas de los cuales Russell y Hilbert extrajeron toda la lógica de

proposiciones bivalentes, el axioma único que resulta de ello equivale a uno o dos agrupamientos interproposicionales isomorfos a los agrupamientos de clases correspondientes [1]. Este axioma expresa pues una serie de encajes ordenados de las partes respecto al todo, transitivos a causa de las implicaciones, reversibles ya que

$$[(q \mid \bar{s}) \supset (p \mid \bar{s})] \leftrightarrow [(p \cdot s) \supset (q \cdot s)]$$

y que aseguran la reciprocidad $(t \rightarrow t)$. El axioma único pone pues en evidencia cada uno de los nueve caracteres que hemos deducido en el § 34 a propósito de los cuatro axiomas de Russell y Hilbert, reuniéndolos bajo la forma de un "agrupamiento". Tal resultado es, por sí solo, extremadamente significativo, ya que pese a la posibilidad de otras axiomáticas, el axioma único basta para soportar todo el peso de la lógica bivalente.

No obstante, dos problemas permanecen aún en suspenso. ¿No sería posible llegar más lejos aún, reduciendo las operaciones de esta lógica a una estructura reversible relacionada con los grupos del álgebra de Boole? Y en caso que dicha reducción no fuese realizable, ¿cuál sería entonces la relación entre el "agrupamiento" implicado en el axioma único de Nicod y los reticulados propios de la teoría matemática de los conjuntos?

§ 36. ¿CONSTITUYEN UN GRUPO LAS OPERACIONES DE LA LOGICA BIVALENTE? EL ALGEBRA DE BOOLE.

El fin que perseguimos, y que conviene mantener claramente presente, es pues caracterizar la estructura de conjunto que abarca *todas* las operaciones de la lógica bivalente, y que constituye, en consecuencia, su *fundamento*. Según los axiomatistas, esta lógica se basa en los axiomas mismos que se dan en el punto de partida. Ciertamente, pero estos axiomas, por ser a la vez independientes, compatibles y completos, constituyen una estructura por sus propias conexiones: es en consecuencia dicha estructura la que representa el fundamento real de la lógica, ya que las partes no podrían existir fuera del todo del cual

1 Ver, para más detalles, el artículo Piaget, 1948.

son abstraídas. El fin que perseguimos no es pues determinar qué estructuras pueden construirse con las operaciones de la lógica bivalente, sino cuál es la estructura *total* de la que dependen *cada una* de dichas operaciones.

Una primera respuesta nos ha sido proporcionada por el análisis del axioma único de Nicod: dicho axioma manifiesta una estructura de "agrupamiento". Pero no todo está dicho con ello, ya que el agrupamiento, que constituye un reticulado reversible, se asemeja a la vez al reticulado por sus encajes de las partes en la totalidad y al grupo por su reversibilidad. Se trata pues de continuar el ensayo de reducción tanto en una como en otra dirección y ver si los grupos y reticulados que aparecen en las operaciones de la lógica bivalente no serían de una naturaleza tal que pudiesen dar cuenta de *todas* esas operaciones.

Existen en primer lugar dos grupos conocidos en las operaciones que conducen a los conjuntos y que son susceptibles de aplicación a nivel interproposicional: el de las disyunciones exclusivas (w) y el de las equivalencias (≡). Como es sabido, uno de los fundadores de la lógica matemática, G. Boole, elaboró en 1847 y luego en 1854 un álgebra basada en la adición disyuntiva de las clases [1], cuyo excepcional interés no ha dejado de ser reconocido. En particular, B. A. Bernstein [2], en 1924-1925, mostró que el álgebra de Boole constituía un grupo desde el punto de vista de la operación de reunión de las partes no comunes (w), así como su dual, la equivalencia o reunión de las partes comunes (≡). El grupo de las equivalencias es, por otra parte, de evidente importancia, conociéndose el rol que, entre otros, le atribuye G. Bouligand. Estos grupos (w) y (≡) forman pues ambos un "cuerpo" o sistema de dos grupos.

I. **El grupo de las disyunciones exclusivas.** — Los sub-conjuntos de un conjunto forman, como hemos visto en el § 10, un grupo aditivo desde el punto de vista de la operación consistente en la reunión de las partes no comunes. Se reencuentra un grupo semejante en el cálculo proposicional desde el punto de vista de la operación $(p \text{ w } q)$:

1. *Operación directa:* $(p \text{ w } q)$; $(q \text{ w } r)$; etc.
2. *Operación inversa:* $(p \text{ w } p) \leftrightarrow o$; $(q \text{ w } q) \leftrightarrow o$; etc. En efecto:

1 Boole, 1847 y Boole, 1854.
2 Bernstein, 1924.

(244) $$p \mathrm{w} p \leftrightarrow (p \cdot \bar{p}) \mathrm{w} (\bar{p} \cdot p) \leftrightarrow (o) \mathrm{w} (o) \leftrightarrow o$$

3. *Operación idéntica:* o. **En efecto:**

(245) $$(p \mathrm{w} o) \leftrightarrow p \quad \text{y} \quad (p \mathrm{w} p) \leftrightarrow o$$

4. *Asociatividad:*

(246) $$[p \mathrm{w} (q \mathrm{w} r)] \leftrightarrow [(p \mathrm{w} q) \mathrm{w} r)]$$

Dos cualesquiera de las operaciones del conjunto tienen por producto una operación del conjunto: hay pues evidentemente un grupo, pero un grupo en el cual la operación directa constituye su propia inversa cuando es aplicada a una parte común $(p \mathrm{w} p)$. Entre las expresiones a considerar tengamos en cuenta:

(247) $$(p \mathrm{w} p) \mathrm{w} p \leftrightarrow p$$

En efecto, $(p \mathrm{w} p) \leftrightarrow o$ y $(p \mathrm{w} o) \leftrightarrow p$

(248) $$(\bar{p} \mathrm{w} \bar{q}) \leftrightarrow (p \mathrm{w} q)$$

En efecto, $(\bar{p} \mathrm{w} \bar{q}) \leftrightarrow (\bar{p} \cdot \bar{\bar{q}}) \mathrm{w} (\bar{\bar{p}} \cdot \bar{q}) \leftrightarrow (\bar{p} \cdot q) \mathrm{w} (p \cdot \bar{q})$

(249) $$(p \mathrm{w} \bar{p}) \leftrightarrow U$$

(donde U es la totalidad considerada) y sobre todo:

$$(p \mathrm{w} q) \leftrightarrow x; \quad \text{entonces } (p \mathrm{w} x) \leftrightarrow q \text{ y } (q \mathrm{w} x) \leftrightarrow p$$

Recordemos por otra parte, que si p y q son totalmente disyuntas, se tiene:

$$(p \mathrm{w} q) \leftrightarrow (p \equiv \bar{q}) = (\bar{p} \equiv q)$$

(*cf.* proposición (190))

En efecto, $(p \mathrm{w} q) \leftrightarrow (p \cdot \bar{q}) \mathrm{w} (\bar{p} \cdot q)$. Ahora bien, $(p \equiv \bar{q}) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow (p \cdot \bar{q}) \mathrm{w} (\bar{p} \cdot \bar{\bar{q}})$ y $(\bar{p} \equiv q) \leftrightarrow (\bar{p} \cdot q) \mathrm{w} (\bar{p} \cdot \bar{q})$.

Se constata así que la operación $(p \le q)$, pese a constituir el elemento de un grupo, equivale a una equivalencia entre una de las dos proposiciones exclusivas y la negación de la otra (lo que no puede aplicarse evidentemente a tres proposiciones salvo que una sea la negación de las otras dos, etc.). La operación $(p \equiv q)$ constituirá así (como lo hemos visto ya en el § 30) la negación de $(p \le q)$.

II. **El grupo de bicondicionales**[1]. — Sea ahora la operación $(p \equiv q)$ que significa $(p \equiv q) \leftrightarrow [(p \cdot q) \le (\bar{p} \cdot \bar{q})]$. Para marcar mejor su parentesco con la operación $(p \le q)$ de la que acabamos de recordar que constituye su negación, escribiremos también $(p \overline{\le} q)$. Y, para evitar las confusiones que podrían producirse al comparar ambos tipos de operaciones, hablaremos de las proposiciones $(r \overline{\le} s)$, es decir $(r \equiv s)$, ya que $(p \le q)$ es contradictoria con $(p \overline{\le} q)$. Definiremos así:

$$(r \equiv s) = \mathrm{d}f\,(r \overline{\le} s) \leftrightarrow (r \cdot s) \le (\bar{r} \cdot \bar{s})$$

Las equivalencias $(r \equiv s)$, es decir $(r \overline{\le} s)$ forman pues un grupo cuyas operaciones son:

1. *Operación directa:* $r \overline{\le} s$ (luego $r \equiv s$); $s \overline{\le} t$ (luego $s \equiv t$); etc.

2. *Operación inversa:* es idéntica a la operación directa, ya que cada equivalencia abarca la totalidad del sistema considerado:

(251)
$$r \overline{\le} r \text{ (por lo tanto } r \equiv r) \leftrightarrow (r \cdot r) \le (\bar{r} . \bar{r})$$
$$r \overline{\le} s \text{ (por lo tanto } r \equiv s) \leftrightarrow (r \cdot s) \le (\bar{r} . \bar{s})$$

Etc.

3. *Operación idéntica:* es pues el sistema total U. En efecto, el producto de las operaciones directa e inversa, que son idénticas una respecto a la otra, es siempre U, ya que:

(252)
$$r \overline{\le} r \text{ (por lo tanto } r \equiv r) \leftrightarrow (r \cdot r) \le (\bar{r} \cdot \bar{r}) \leftrightarrow r \le \bar{r} \leftrightarrow U$$

(*cf.* proposición (249)).

1 Se habla también del grupo de equivalencias, utilizando el nombre de la relación $\leftrightarrow$ en lugar del de la operación $\equiv$.

Por otra parte, U compuesto con un elemento cualquiera lo deja invariante, ya que la parte común entre dicho elemento y el todo U es ese elemento mismo:

(253) $$r \cdot U \leftrightarrow r; \quad s \cdot U \leftrightarrow s; \quad \bar{r} \cdot U \leftrightarrow \bar{r}; \quad \text{etc.}$$

4. *Asociatividad:*

(254) $$[(r \,\overline{\mathrm{w}}\, s) \,\overline{\mathrm{w}}\, t] \leftrightarrow [r \,\overline{\mathrm{w}}\, (s \,\overline{\mathrm{w}}\, t)]$$

es decir, $[(r \equiv s) \equiv t] \leftrightarrow [r \equiv (s \equiv t)]$.

Pero hay que señalar que el término o no forma parte del grupo. En efecto, $r \,.\, o \leftrightarrow o$, lo que anula r sin retorno.

Notemos aún una expresión interesante, que es la recíproca de (190):

(255) $$(r \,\overline{\mathrm{w}}\, s) \leftrightarrow (r \,\mathrm{w}\, \bar{s}) \leftrightarrow (\bar{r} \,\mathrm{w}\, s)$$

En efecto, la expresión $(r \equiv s)$ es la exclusión de r y de $\bar{s}$, ya que

$$(r \,\overline{\mathrm{w}}\, s) \leftrightarrow (r \cdot s) \,\mathrm{w}\, (\bar{r} \cdot \bar{s}) \quad \text{y que} \quad (r \,\mathrm{w}\, \bar{s}) \leftrightarrow (r \cdot \bar{\bar{s}}) \,\mathrm{w}\, (\bar{r} \cdot \bar{s})$$

III. **Significación de los grupos precedentes.** — El primero de estos dos grupos no podría dar cuenta por sí solo del conjunto de las transformaciones proposicionales, ya que la operación fundamental del mismo conduce a la reunión de las partes no comunes, es decir, a los elementos disociados de sus encajes y no a estos en tanto tales. En efecto:

1. La *operación directa* $(p \,\mathrm{w}\, q)$ se define por $(p \cdot \bar{q}) \,\mathrm{w}\, (\bar{p} \cdot q)$, consiste esencialmente en negar la implicación de p por q ó de q por p, ya que $p \cdot \bar{q} \leftrightarrow \overline{p \supset q}$ y $\bar{p} \cdot q \leftrightarrow \overline{q \supset p}$. La disyunción exclusiva constituye así la reunión de dos no-implicaciones, las tres operaciones binarias $(p \,\mathrm{w}\, q)$; $(p \cdot \bar{q})$ y $(\bar{p} \,.\, q)$ son las únicas que no suponen ni $(p \,.\, q)$ ni $(\bar{p} \,.\, \bar{q})$. Ahora bien, sin duda alguna la operación más importante de toda deducción es la implicación: no se comprendería entonces cómo el grupo de las exclusiones bastaría por sí solo como fundamento, ya que la implicación $(p \rightarrow q)$ es la reunión de una parte común $(p \,.\, q)$ y una parte no común $(\bar{p} \,.\, q)$.

2. El *bicondicional* no forma parte del grupo, pese a que en el sistema completo de las proposiciones se tenga:

(256) $$(p \mathrm{w} q) \leftrightarrow (p \equiv \bar{q}).$$

3. Los *auto-encajes* $(p \vee p) \leftrightarrow p$ o $(p \cdot p) \leftrightarrow p$ tampoco forman parte del grupo: ahora bien, ellos son necesarios para el mecanismo operatorio de la lógica interproposicional (axioma I de Russell y Hilbert).

En síntesis, el grupo de las disyunciones exclusivas conduce sólo a los elementos aislados de sus encajes pero no a estos en tanto tales. Se encuentra así mucho más cercano (ver § 10 y 26) a las estructuras numéricas que a la lógica de la implicación. Como lo ha mostrado Herbrand, es, en efecto, isomorfo al sistema de los números enteros módulo 2, es decir, a los números 0 y 1 considerados como equivalentes a todos los números pares e impares.

En cuanto al grupo de las equivalencias, conduce por el contrario a las partes comunes, por oposición a las partes disyuntas. Proporciona así el complemento exacto de lo que falta al grupo de las exclusiones; sólo que, por este mismo hecho, se halla a su vez privado de los elementos propios del primer grupo, los que le serán necesarios para expresar la totalidad de las transformaciones bivalentes.

1. Al igual que el bicondicional (≡) no forma parte del grupo I pese a ser necesario para expresar sus transformaciones, del mismo modo la disyunción exclusiva (w) no forma parte del grupo II, pese a ser necesaria a la expresión $(r \equiv s) \leftrightarrow (r \cdot s) \mathrm{w} (\bar{r} \cdot \bar{s})$. En efecto, si $r \equiv s$, entonces $(r \,.\, s)$ y $(\bar{r} \,.\, \bar{s})$ son disyuntas, sin que esta disyunción exclusiva forme parte como tal de las operaciones del grupo.

2. Los auto-encajes $(p \,.\, p) \leftrightarrow p$ forman, esta vez, parte del grupo, pero no así (o). En efecto, al ser la operación idéntica del grupo el todo U, no podría ser invertido bajo la forma $(\bar{U} = o)$. El (o) escapa así al grupo pese a ser necesario al sistema completo de las operaciones bivalentes, por ejemplo en la forma $p \cdot \bar{p} \leftrightarrow o$.

3. De un modo general, el grupo de las equivalencias se limita a reunir las equivalencias, pero sin explicarnos por qué hay equivalencia.

Ahora bien, las transformaciones en las cuales la equivalencia aparece como producto, por ejemplo $(p \mathrm{w} q) \leftrightarrow x$, tienen tanta importancia como la equivalencia misma.

En síntesis, el grupo de las disyunciones exclusivas (w) conduce sólo a las partes no comunes del sistema de conjunto de las proposiciones, y el grupo de las equivalencias ($=$ ó $\overline{w}$) no conduce sino a las partes comunes, cada uno es pues, por sí solo, insuficiente para fundamentar la totalidad de las operaciones interproposicionales. Así, $(p \supset q)$ da $(p \vee q) \leftrightarrow (\bar{p} \cdot q)$ desde el punto de vista de la reunión de las partes no comunes, y $(p \overline{w} q) \leftrightarrow (p \cdot q)$ desde el punto de vista de las partes comunes; ahora bien, la esencia de la operación de implicación es precisamente reunir en un solo todo $(p \rightarrow q)$ las partes comunes $(p \,.\, q)$ y $(\bar{p} \cdot \bar{q})$ y las partes no comunes $(\bar{p} \cdot q)$, es decir

$$(p \supset q) \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}).$$

La cuestión es entonces saber si no se podrían fusionar estos dos grupos en un sistema único que diese cuenta de dicha totalidad operatoria.

IV. **El anillo de las disyunciones exclusivas y las conjunciones, y la insuficiente unidad del sistema.** — Fundamentar la lógica bivalente en la noción de grupo equivaldría a caracterizar un grupo único cuyas composiciones abarcasen todas las transformaciones interproposicionales, y especialmente todas las manifestaciones de la reversibilidad (cuya importancia esencial hemos visto en el capítulo VI). En efecto, la operación inversa de un grupo, compuesta con la operación directa, da la operación idéntica: de ahí los tres mecanismos operatorios de progresión, de retorno y de referencia a un punto de origen invariante, cuya solidaridad fundamenta la coherencia de los sistemas [1]. Ahora bien, en el caso de la disyunción exclusiva, cada operación elemental es su propia inversa, teniendo por idéntica o: sea $(p \,\mathrm{w}\, p) \leftrightarrow o$. En el caso de la equivalencia, cada operación elemental es también su propia inversa, pero teniendo como idéntica el todo: sea

$$(r \equiv r) \leftrightarrow (r \,\overline{\mathrm{w}}\, r) \leftrightarrow r \,\mathrm{w}\, \bar{r} \leftrightarrow U.$$

Resulta claro entonces que las dos inversiones $(p \,\mathrm{w}\, p) \leftrightarrow o$ y $p \,\overline{\mathrm{w}}\, p \leftrightarrow U$ tienen algún parentesco, ya que la operación $(\overline{\mathrm{w}})$, es decir $(\equiv)$, es la inversa (en el sentido de la complementaria) de la

1 JUVET, 1936.

operación (w), y se traduce por $(p \text{ w } \bar{p})$, es decir, por la simple negación de *p*. Puede entonces escribirse:

$$[(p \text{ w } p) \leftrightarrow o] \rightarrow [(p \text{ w } \bar{p}) \leftrightarrow U] \quad (257)$$

¿No sería posible entonces reducir el conjunto del sistema a un grupo único? Sólo que como dicho sistema debe conducir simultáneamente sobre las partes no comunes y sobre las partes comunes, es indispensable completar la operación fundamental (w) por una operación auxiliar (.) de modo que se tenga:

$$(p \text{ w } q) \leftrightarrow (p \cdot \bar{q}) \text{ w } (\bar{p} \cdot q)$$

$$(r \text{ w } \bar{s}) \leftrightarrow (r \cdot \bar{\bar{s}}) \text{ w } (\bar{r} \cdot \bar{s}) \leftrightarrow (r \cdot s) \text{ w } (\bar{r} . \bar{s})\text{; luego } r \leftrightarrow s$$

Se tendrán entonces las siguientes operaciones, fáciles de traducir en el doble lenguaje de las disyunciones exclusivas y de las conjunciones (ambas operaciones resultan igualmente necesarias):

1. *Operaciones directas*: $(p \text{ w } q) \leftrightarrow (p \cdot \bar{q}) \text{ w } (\bar{p} \cdot q)$, y:

$$(r \text{ w } \bar{s}) \leftrightarrow (r \cdot s) \text{ w } (\bar{r} \cdot \bar{s})$$

2. *Operaciones inversas*: $(p \text{ w } p) \leftrightarrow p \cdot \bar{p} \leftrightarrow o$.

3. *Operación idéntica*: (o) ya que $(p \text{ w } p) \leftrightarrow o$ y $(p \text{ w } o) \leftrightarrow p$.

Resulta fácil, por otra parte, traducir todas las operaciones interproposicionales en dicho lenguaje. Se tendrá pues:

$$(p \vee q) \leftrightarrow (p \text{ w } q) \text{ w } (p \cdot q) \quad (258)$$

$$(p \mid q) \leftrightarrow (p \text{ w } q) \text{ w } (\bar{p} \cdot \bar{q}) \quad (259)$$

$$(p \supset q) \leftrightarrow (p \text{ w } \bar{q}) \text{ w } (\bar{p} \cdot q) \quad (260)$$

$$(q \supset p) \leftrightarrow (p \text{ w } \bar{q}) \text{ w } (p \cdot \bar{q}) \quad (261)$$

Etc.

Pero, se constata que la unicidad del sistema no es entonces más que aparente. Como lo ha dicho B. A. Bernstein, esta reconstrucción del álgebra de Boole supone tres operaciones fundamentales: dos binarias (w) y (.), y una monádica (—). Ahora bien, un grupo que se

adjunte una operación auxiliar no constituye ya un solo grupo sino un "anillo". En este caso, se está en presencia de un anillo conmutativo desde el punto de vista del par de operaciones (w) y (.), la operación aditiva sería la disyunción exclusiva (w) y la multiplicativa la conjunción (.). Tal estructura dualista sería interesante para la lógica si ambas operaciones del anillo pudieran reducirse a un solo operador respecto al cual no constituyesen sino dos expresiones reversibles, pero no podría dar cuenta de la forma total de las operaciones interproposicionales más que bajo esa condición.

Ahora bien, podría parecer, en primera instancia, que fuese ese el caso, ya que en cierto número de ejemplos las expresiones $(\text{w}\, p)$ y $(.\, \bar{p})$ son sustituibles al igual que $(\text{w}\, \bar{p})$ y $(\cdot p)$, estas dos cuplas constituirían entonces las dos operaciones del anillo unidas a la negación. En efecto, la exclusión de p sea $(\text{w}\, p)$ equivale a la reunión con $\bar{p}$, sea $(.\, \bar{p})$ y recíprocamente. Por ejemplo:

(262) $$(p \text{ w } p) \leftrightarrow (p \cdot \bar{p}) \leftrightarrow o$$

(263) $$(p \cdot U) \leftrightarrow (p \text{ w } o) \leftrightarrow p \quad \text{ya que} \quad \bar{U} \leftrightarrow o$$

Parecería entonces que se pudiese constituir el grupo único cuya existencia acabamos de poner en duda. Pero cierto número de obstáculos se oponen a ello en forma conjunta. En efecto:

1º La exclusión recíproca (w) y la conjunción (.) no son asociativas una respecto a la otra.

Ejemplo: Sea $(p \cdot \bar{p}) \text{ w } q \leftrightarrow (o \text{ w } q) \leftrightarrow q$, que es verdadero en todos los casos. Pero, $p \cdot (\bar{p} \text{ w } q)$ da $p \cdot (o) \leftrightarrow o$ si p y q son totalmente disyuntos $(\bar{p} \text{ w } q)$, pues entonces $(p \equiv q)$ y $(q \text{ w } q \leftrightarrow 0)$. Por otra parte, $p \cdot (\bar{p} \text{ w } q)$ da $p \cdot (p \cdot q)$ si se tiene $(p \vee q)$. La misma expresión da $[p \cdot (\bar{p} \text{ w } q \equiv p)] \leftrightarrow p$, si se tiene $p \supset q$, etc. Las dos expresiones $[(p \cdot \bar{p}) \text{ w } q]$ y $[p \cdot (\bar{p} \text{ w } q)]$ no son pues equivalentes, lo que significa que no hay asociatividad.

2º El pasaje de un miembro al otro de las ecuaciones con inversión de los signos y las operaciones $(\text{w}\, p)$ y $(\cdot \bar{p})$ o $(.\, p)$ y $(\text{w}\, \bar{p})$ no es siempre posible:

Ejemplo: $(p \text{ w } p) \leftrightarrow p \cdot \bar{p}$ dará $(p \leftrightarrow p \cdot \bar{p} \cdot \bar{p})$, o sea $(p \leftrightarrow o)$; $p \cdot p \leftrightarrow p$ daría el absurdo $p \leftrightarrow p \text{ w } \bar{p}$, por lo tanto $p \leftrightarrow U$. Igualmente $(U \text{ w } \bar{p}) \leftrightarrow p$ daría $U \leftrightarrow p \cdot p$ o $\bar{p} \leftrightarrow p \cdot o$, por cambio de $(\text{w } U)$ en $(.U)$ es decir $(.o)$.

La razón de estas resistencias encierra un gran interés teórico: son las operaciones tautológicas $p \cdot p \leftrightarrow p$ y $\bar{p} \cdot \bar{p} \leftrightarrow \bar{p}$ las que se oponen a las transferencias de un miembro a otro de la ecuación, mientras que la transferencia es posible en el caso de operaciones no tautológicas. Encontramos pues aquí la misma dificultad que habíamos comentado a propósito de los "agrupamientos" de clases (§ 10 y reglas I-IV).

3º Lejos de constituir un grupo único, las operaciones $(\mathrm{w}\, p)$ y $(\cdot \bar{p})$ ó $(\mathrm{w}\, \bar{p})$ y $(.\, p)$, suponen dos operaciones idénticas. En efecto:

a) $(p \mathrm{\ w\ } p) \leftrightarrow o$ y $(p \mathrm{\ w\ } o) \leftrightarrow p$, es decir (o) = idéntica para el grupo de las partes no comunes.

b) $(p \cdot p) \mathrm{\ w\ } (\bar{p} \cdot \bar{p}) \leftrightarrow U$ y $p \cdot U \leftrightarrow p$, es decir U = idéntica para el grupo de las partes comunes.

Ahora bien, es evidente que semejante dualidad de las idénticas impide la reducción del sistema a un grupo único. Podría responderse que ambas idénticas son equivalentes, ya que se tiene (263):

$$(p \mathrm{\ w\ } o) \leftrightarrow (p \cdot U) \leftrightarrow p$$

es decir, que en este caso $(\mathrm{w}\, o) = (\cdot U)$.

Pero esta equivalencia entre $(\mathrm{w}\, o)$ y $(.\, U)$ no es sino aparente y parcial. En efecto, decir que $(\mathrm{w}\, o)$ (= ó nada) y $(.U)$ (= y todo) constituyen una misma operación, no es verdadero ni desde el punto de vista de su significado, ni tampoco desde el punto de vista formal. Desde el primer punto de vista, "x_1 es un vertebrado o nada" o "x_1 es a la vez un vertebrado y una parte del todo" son dos aserciones bien distintas. La razón estriba (y esto nos conduce al mecanismo formal) en que p mantiene la misma relación $p\, .\, (q, r, s, \ldots, U) \leftrightarrow p$ con una serie de otras totalidades incluidas unas en otras, antes de mantenerla con el sistema total considerado U. Puede pues escribirse:

$$p \supset q; \quad q \supset r; \quad r \supset s; \quad \ldots; \quad p, q, r, s, \ldots \supset U$$

Se advierte entonces que $p\, .\, U \leftrightarrow p$ no es sino el caso más general de una serie de "idénticas especiales" (tautificaciones y absorciones):

(264) $(p \cdot p) \leftrightarrow p$; $(p \cdot q) \leftrightarrow p$; $(p \cdot r) \leftrightarrow p$; $(p \cdot s) \leftrightarrow p$; $\ldots$; $(p \cdot U) \leftrightarrow p$

Si la idéntica $(.\, U)$ es considerada equivalente a $(\mathrm{w}\, o)$, debería

ocurrir lo mismo para cada proposición p, q, r, etc., en relación a sí misma e igualmente cada proposición implicada (q, r, ...) respecto de sus implicantes. La idéntica $(p \,.\, U) \longleftrightarrow p$, no representa pues sino la más general de las "idénticas especiales" tal como se las encuentra en un "agrupamiento", y no constituye de ningún modo una operación idéntica única. No hay pues correspondencia bi-unívoca entre $(\mathrm{w}\, o)$ y $(.\, U)$, sino que $(\mathrm{w}\, o)$ corresponde a una serie de idénticas especiales que dejan a p invariante. Ahora bien, son precisamente estas idénticas especiales las que restringen la movilidad del sistema, como lo hemos visto en 2º.

V. **Conclusión.** — En síntesis, resulta claro que los dos grupos de operaciones (w) y ($\equiv$) no podrían fundirse en uno solo, y que el sistema de conjunto constituido por la lógica de proposiciones bivalentes no podría pues reducirse a un grupo. La razón esencial estriba en que la consideración de los encajes de parte a todo, de los que se ocupa la lógica, impone la existencia de idénticas especiales (tautificación, reabsorción y absorción), que distinguen los agrupamientos de los grupos. Sólo considerando aparte las exclusiones recíprocas (w) y las equivalencias ($\equiv$) pueden constituirse dichos grupos, ya que en ese caso se aislan los elementos de sus inclusiones y se limitan los encajes hasta la equivalencia: es decir, no se consideran sino las partes no comunes o las partes comunes, mientras que todo encaje supone ambas a la vez (como lo hemos visto en el caso de la implicación que une $\bar{p} \cdot q$ a $p \cdot q$). Así para la lógica, la expresión $(p \,\mathrm{w}\, q) \leftrightarrow x$ (tomada de B. A. Bernstein) constituye una expresión total y única, en la cual la relación $(p \,\mathrm{w}\, q)$ es indisociable de la relación $(\equiv x)$; por el contrario, si quisiera hacérsela entrar en los grupos de Boole-Bernstein habría que disociar las relaciones (w) y ($\equiv$) para tratarlas en forma aislada. Más aún, desde el punto de vista de las operaciones interproposicionales las dos expresiones $(p \,\mathrm{w}\, q)$ y $(p \equiv q)$ traducen operaciones que son la inversa una respecto de la otra; pero al quererlas reunir en un solo todo operatorio y fundir en un solo sistema los dos grupos complementarios, se reintroducen los encajes y junto con ellos, necesariamente, las idénticas especiales que se oponen a la construcción de un grupo único.

Por el contrario, es evidente que si bien el cuerpo formado por el grupo de las exclusiones recíprocas y el de las equivalencias no basta para abarcar la totalidad de las operaciones interproposicionales, des-

empeña no obstante un papel esencial en dicha estructura de conjunto[1]. De una manera general, el producto de dos grupos es un "grupo de cuatro", tal como aquel cuyo rol entreviéramos en la lógica proposicional (teorema VI del § 31). Ahora bien, las equivalencias positivas (≡) y negativas (w) constituyen grupos y determinan por otra parte, las reciprocidades y correlatividades (teoremas III y V del § 31): intervienen así, junto con la negación que las opone una a la otra (w es la complementaria de ≡) en el grupo de las cuatro transformaciones que expresa los diversos aspectos de la reversibilidad interproposicional. Pero, este grupo de cuatro (teorema VI), si bien es fundamental desde el punto de vista de la reversibilidad, no basta para dar cuenta del conjunto de los encajes mismos, ya que no abarca las "idénticas especiales", debidas a la existencia de los auto-encajes, ni, en consecuencia, todas las relaciones elementales en las que intervienen dichas operaciones "idénticas especiales".

§ 37. LA REDUCCION DE LA LOGICA PROPOSICIONAL A UN RETICULADO.

Si retornamos pues a los encajes como tales, por oposición a la reunión de las partes, ya sea comunes o no comunes, las operaciones fundamentales de la lógica bivalente no estarán ya representadas por la cupla de la exclusión (w) y de la conjunción (.), sino más bien por la de la disyunción inclusiva (v) y la conjunción (.). Estas dos operaciones ponen especialmente en evidencia las "idénticas especiales" o auto-encajes $(p \vee p)$ y $(p \cdot p)$ que se oponían a la reducción de las operaciones precedentes a un grupo único.

Dejemos de lado por un instante el problema de la reversibilidad, que constituye la esencia de la noción de grupo, y tratemos de determinar el sistema de conjunto constituido por las disyunciones y conjunciones reunidas. Ahora bien, dicho sistema presenta una estructura bien definida, llamada en teoría de conjuntos "conjunto reticulado", "reticulado", "treillis" o "lattice"(1'). Un reticulado se caracteriza por

1 Grize, 1963.

(1') Piaget menciona los distintos vocablos "ensemble réticulé" (que correspondería a: "conjunto reticulado"); "réseau", "treillis" y "lattice" que designan todos la estructura matemática del reticulado. En la primera edición del Traité emplea la palabra "réseau", en la presente (1971) utiliza con preferencia la palabra "treillis". El vocablo "lattice" es empleado sobre todo en lengua inglesa. Nosotros hemos decidido traducirlo por "reticulado".

cierto número de propiedades que hemos descrito en el § 10 (en II) en términos generales. Escribámoslas ahora en el lenguaje de la lógica proposicional. Si recordamos la definición de dos "manipulaciones" designadas con los nombres de *supremum* e *infimum*, constatamos que las operaciones (v) e (.) corresponden respectivamente a estas dos definiciones y cumplen las siete condiciones siguientes[1]:

1. $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$ — 1 *bis* $(p \cdot q) \leftrightarrow (q \cdot p)$
2. $(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ — 2 *bis* $p \cdot (q \cdot r) \leftrightarrow (p \cdot q) \cdot r$
3. $(p \vee p) \leftrightarrow p$ — 3 *bis* $(p \cdot p) \leftrightarrow p$

4. y 4 bis Si $(p \vee q) \leftrightarrow q$, entonces $(p \cdot q) \leftrightarrow p$ e, inversamente, si $(p \cdot q) \leftrightarrow p$, entonces $(p \vee q) \leftrightarrow q$.

Estando dadas dos proposiciones cualesquiera, su *supremum*, sea $(p \vee q)$ y su *infimum*, sea $(p . q)$, estarán pues unívocamente determinados. El sistema de proposiciones en su conjunto constituye así un reticulado.

Pero, si los dos grupos que acabamos de considerar (§ 37) eran demasiado cerrados para soportar todo el peso de la lógica proposicional, el reticulado aparece, por el contrario, como un sistema demasiado amplio, que no muestra de cerca el detalle de las transformaciones, sino que se contenta con describir sus caracteres generales sin alcanzar su mecanismo mismo.

1º En efecto, la laguna esencial de la noción de reticulado, desde el punto de vista de sus aplicaciones a la lógica, es la de contentarse con una reversibilidad atenuada. Un reticulado no supone ninguna operación inversa, ya que el *infimum* no mantiene una relación de inversión estricta con el *supremum*. En el caso del reticulado de las operaciones interproposicionales, las dos operaciones que desempeñan el papel de límites superior e inferior, la disyunción (v) y la conjunción (.) no son ni las complementarias (inversas) ni las recíprocas una de la otra, sino simplemente las "correlativas" (definición 34 y § 31). Ciertamente, la correlativa es la inversa de la recíproca. Puede

1 Heyting, 1948.

pues pasarse (por negación de p y de q) de la operación $(p \vee q)$ a su recíproca $(\bar{p} \vee \bar{q})$, y, por negación de esta, a la correlativa.

Pero ni la negación de una proposición $(\bar{p})$, ni la de una operación $(\overline{\bar{p} \vee \bar{q}} \leftrightarrow p \cdot q)$ son operaciones constitutivas del reticulado: son proposiciones como las otras, que se hallan pues "limitadas" como ellas, pero no son condiciones necesarias para la existencia de un reticulado. De los tres tipos de transformaciones fundamentales de la lógica interproposicional (ver § 31), las inversiones, reciprocidades y correlatividades, el reticulado formado por las disyunciones y conjuntos sólo conoce la tercera. Ahora bien, las dos primeras son esenciales a toda deducción.

2º Se podría concebir, es cierto, la operación consistente en disociar el *supremum* del *infimum*. Se tendría así:

$$(p \vee q) \cdot (\overline{p \cdot q}) \leftrightarrow (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \leftrightarrow (p \mathrm{w} q)$$

Pero se vuelve entonces al sistema de las partes no comunes y de las partes comunes, discutido en el § 36.

3º El reticulado no supone, por otra parte, ninguna operación tal que, estando dado un límite superior $(p \vee q)$ y una de las dos proposiciones que intervienen en él (p), la otra puede ser unívocamente determinada. Supongamos que esta operación consista en negar p, sea $(\cdot \bar{p})$. ¿Se tendrá entonces $(p \vee q) \cdot \bar{p} \leftrightarrow q$? Pero, si se toma la operación $(p \vee q)$ en el sentido general de una reunión entre p y q que constituye simplemente su *supremum*, nada nos dice acerca de las relaciones detalladas de p y de q: se sabe solamente que una por lo menos de las tres conjunciones $(p \cdot q)$ ó $(p \cdot \bar{q})$ ó $(\bar{p} \cdot q)$ es verdadera, pero sin saber cuál o cuáles. Puede existir pues entre p y q: **a**) una relación de disyunción completa: $(p \cdot \bar{q}) \mathrm{w} (\bar{p} \cdot q)$; **b**) una relación de disyunción incompleta: $(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$ con verdad de las tres posibilidades; **c**) una relación de implicación $(q \supset p)$: $(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q})$; **d**) una relación de implicación $(p \supset q) : (p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q)$; **e**) una relación de equivalencia $(p \equiv q)$: $(p \,.\, q)$. Por lo tanto, $(p \vee q) \cdot \bar{p}$ dará $(\bar{p} \cdot q)$ en los casos **a**), **b**) y **d**) y (o) en los casos **c**) y **e**).

4º En cuanto a la posibilidad de reencontrar una de las dos proposiciones, sea q, a partir del límite inferior $(p \,.\, q)$, la indeterminación

es aún mayor, ya que $(p.q)$ no es sino la parte común a p y a q: esta parte $(p . q)$ puede pues abarcar ya sea las dos proposiciones, o una de ellas solamente, o incluso ser nula (si $p \mid q$).

5º No hay más que un caso en que la inversión es posible de manera unívoca: es aquel en que se tiene $(p \vee q) \leftrightarrow q$ y por consecuente $(p \cdot q) \leftrightarrow p$. La reunión $(p \vee q)$ está entonces dicotómicamente repartida en $(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q)$, de donde tenemos:

$$[(p \vee q) \cdot (\overline{p \cdot q})] \leftrightarrow (\bar{p} \cdot q) \quad \text{y} \quad [(p \vee q) \cdot (\overline{\bar{p} \cdot q})] \leftrightarrow (p \cdot q).$$

Pero en este caso, p está incluida en q, lo que permite dividir la proposición q en sus dos constituyentes: $p \leftrightarrow (p \cdot q)$ y $p' \leftrightarrow (\bar{p} \cdot q)$. Sólo que en ese caso, la estructura del reticulado se halla precisamente limitada en el sentido del agrupamiento.

En síntesis, el reticulado es una estructura demasiado general para expresar las transformaciones especiales de la lógica de proposiciones. El reticulado se aplica, en efecto, a las estructuras más diversas, por ejemplo a los números enteros, al espacio proyectivo, etc. Por su generalidad misma, expresa un mecanismo lógico esencial de inclusión de la parte en el todo y de intersección correlativa. Pero deja de lado la reversibilidad que constituye la característica más específica de toda transformación lógica.

§ 38. EL PASAJE DEL RETICULADO AL AGRUPAMIENTO.

La conclusión que se desprende de este doble análisis de los grupos de Boole-Bernstein y del reticulado interproposicional de las disyunciones y las conjunciones, es que ni una ni otra de ambas estructuras de conjunto dan cuenta adecuadamente de la totalidad de las operaciones de la lógica bivalente: los grupos porque no conducen a los encajes como tales, y el reticulado porque sacrifica la reversibilidad. El problema de la estructura de conjunto de las operaciones interproposicionales estriba pues en unir en un solo sistema los encajes propios del reticulado y la reversibilidad del grupo. Ahora bien, añadir las "idénticas especiales" a un grupo, equivale a ampliar la estructura, mientras que añadir la reversibilidad a un reticulado equivale simplemente a especializarlo. Se trata pues de construir reticulados reversi-

bles. Por lo tanto, en lugar de las operaciones (w) y (≡) de los grupos de Boole-Bernstein, o de las operaciones (w) y (.) del anillo resultante de su reunión, y de las operaciones (v) y (.) que caracterizan al reticulado, se tratará de fundamentar la estructura que abarque la totalidad de las operaciones bivalentes sobre las dos operaciones $(\vee p)$ y $(\cdot\bar{p})$, es decir, sobre la disyunción a título de operación directa y sobre la negación conjunta que constituye su inversa en el sentido de la complementariedad simple. Semejante elección corresponde, como se ve, a la ley de dualidad

$$(p \vee q) \leftrightarrow (\overline{\bar{p}\cdot\bar{q}}) \quad \text{y} \quad (\bar{p}\cdot\bar{q}) \leftrightarrow (\overline{p \vee q}).$$

Si $\bar{p}$ es la complementaria de p y si T es la reunión de p y de $\bar{p}$ (o de q y de $\bar{q}$, etc.), se tiene entonces:

1. *Operación directa:* $(p \vee \bar{p}) \leftrightarrow T.$
2. *Operación inversa:* $(p\cdot\bar{p}) \leftrightarrow o.$
3. *Idéntica general:* (v) o, ya que $p\cdot\bar{p} \leftrightarrow o$ y $p \vee o \leftrightarrow p.$
4. *Idénticas especiales:* $(p \vee p) \leftrightarrow p$ y $(p \vee T) \leftrightarrow T.$

El juego de las operaciones directas e inversas y de la idéntica general única presenta entonces la misma reversibilidad que el grupo, mientras que las idénticas especiales corresponden a los auto-encajes del reticulado.

En efecto, la reversibilidad de $(\vee p)$ y de $(\cdot\bar{p})$ permite deducir de $(p \vee \bar{p} \leftrightarrow T)$, por transferencia de un miembro al otro, las igualdades:

$$\bar{p} \leftrightarrow T\cdot\bar{p} \quad \text{y} \quad p \leftrightarrow T\cdot\bar{\bar{p}} \leftrightarrow T\cdot p$$

De donde se deriva la transformación fundamental del reticulado:

$$[(p \vee T) \equiv T] \rightarrow [(p\cdot T) \equiv p]$$

Por otra parte, resulta claro que la relación entre p y T constituya una implicación, ya que $T \leftrightarrow (p\cdot T) \vee (\bar{p}\cdot T)$ y que $\bar{p}\cdot\bar{T} \leftrightarrow o$ (ya que $\bar{T} \leftrightarrow o$). Basta entonces introducir una serie de intermediarios entre p y T, bajo la forma $p \supset q$; $q \supset r$; $r \supset s$; $s \supset \ldots \supset T$, para que se tenga (proposición (238)) una serie tal que:

$$p \vee p' \leftrightarrow q; \qquad q \vee q' \leftrightarrow r; \qquad r \vee r' \leftrightarrow s; \qquad \ldots$$

y que (proposición (241)) se pueda igualar $\bar{p}$ a $(\bar{p} \leftrightarrow p' \vee q' \vee r' \ldots)$. Se transforma así el reticulado en una estructura reversible, conservando sus propiedades fundamentales, pero agregándole, junto con la reversibilidad, las transformaciones fundamentales de la lógica interproposicional. Ahora bien, es precisamente este sistema el que abarca, como hemos visto en el § 35, el axioma único de Nicod, y que constituye lo que hemos llamado un "agrupamiento".

La estructura de conjunto específica de la lógica bivalente no es pues ni el grupo, demasiado cerrado para abarcar las operaciones de auto-encaje, ni el reticulado, demasiado amplio para dar cuenta de la reversibilidad, sino el agrupamiento que concilia la reversibilidad con los encajes de parte a todo. Es lo que vamos a ver ahora en detalle.

§ 39. EL AGRUPAMIENTO DE LAS OPERACIONES INTERPROPOSICIONALES.

Contrariamente a los agrupamientos intraproposicionales, que se reparten en ocho formas distintas (operaciones aditivas y multiplicativas, de clases o de relaciones, primarias y secundarias), es posible reducir la totalidad de las operaciones interproposicionales a un agrupamiento único, cuyas formas diversas se componen directamente unas a partir de las otras. Procederemos así según cinco etapas, comenzando como acabamos de verlo, por las relaciones de una sola proposición respecto al sistema al cual pertenece (A), luego desarrollando los agrupamientos de implicaciones (B), el de las operaciones binarias en general (C) y el de las composiciones ternarias, etc. (E), pasando por el grupo de las cuatro transformaciones de inversión (D).

A. Las relaciones de una proposición con el sistema del cual forma parte. — Partamos de una sola proposición *p*, no a título de elemento atómico, sino por el contrario para marcar las relaciones que mantienen sus transformaciones con el conjunto del sistema del cual forma parte. Sea pues una proposición cualquiera (*p*); sin introducir todavía la negación a título de operación, llamaremos $\bar{p}$ la proposición que es verdadera cuando *p* es falsa y que es falsa cuando *p* es verdadera.

Pueden definirse entonces las siguientes operaciones, que constituyen ya por sí solas un "agrupamiento":

1. La *operación directa* será la afirmación de p reunida disyuntivamente ($\vee p$) a cualquier otra proposición del sistema (por el momento sólo conocemos $\bar{p}$) :

(265) $$p \vee \bar{p} = T$$

(donde T es la proposición siempre verdadera).

Puede constatarse que, para una sola proposición p y su complementaria $\bar{p}$ respecto de T, la operación directa equivale al principio de tercero excluido.

2. La *operación inversa* será la negación de p reunida conjuntivamente ($\cdot\bar{p}$) a cualquier otra proposición del sistema (es decir, por el momento a p):

(266) $$p \cdot \bar{p} = o$$

Para una sola proposición y su negación, la operación inversa equivale así al principio de no-contradicción.

3. Existe una *operación idéntica general* única, que será 1º el producto de dos operaciones directa e inversa, y que 2º no modificará ninguna proposición con la que se la componga. La escribiremos ($\vee$)o. Sea [1]:

(267) $p \cdot \bar{p} = o$; $p \vee o = p$; $\bar{p} \vee o = \bar{p}$; $T \vee o = T$; $o \vee o = o$

4. Existen *operaciones idénticas especiales* que no modifican las operaciones con las que son compuestas. Son:

(268) $p \vee p = p$; $\bar{p} \vee \bar{p} = \bar{p}$ y $\bar{p} \cdot \bar{p} = \bar{p}$ (tautificaciones)

(269) $p \vee T = T$ (reabsorción), es decir $p \vee (p \vee \bar{p}) = (p \vee \bar{p})$

1 En este parágrafo y en el siguiente, conservamos la notación de los agrupamientos de la primera edición.

5. *Estas composiciones son asociativas*, con las mismas reservas que se han hecho respecto de los agrupamientos intraproposicionales:

$$(270) \qquad p \vee (\bar{p} \vee o) = (p \vee \bar{p}) \vee 0 = T$$

Por el contrario:

$$(271) \qquad p \vee (p \cdot \bar{p}) \neq (p \vee p) \cdot \bar{p}$$

ya que $p \vee (p \cdot \bar{p}) = p \vee o = p$ y $(p \vee p) \cdot \bar{p} = p \cdot \bar{p} = o$.

Es pues la dualidad de funciones de $p \vee p$ (tautificación) y de $p \vee o$ (operaciones directa e idéntica general) lo que restringe únicamente la asociatividad.

6. Una vez admitidas estas definiciones, puede invertirse la operación inversa del mismo modo que se invierte la operación directa. La *inversión de una operación* se representará por una barra situada por encima de la expresión dada, sea $(\overline{\vee p}) = (\cdot \bar{p})$. La inversión de la operación inversa conducirá pues a la operación directa:

$$(272) \qquad (\overline{\vee p}) = (\cdot \bar{p}) \qquad y \qquad (\overline{\cdot \bar{p}}) = (\vee p)$$

transformación que escribiremos: $(\bar{\bar{p}} = p)$.

Importa considerar cuidadosamente la diferencia existente entre la inversión de una negación, es decir la negación de la operación de negación $(\overline{\cdot \bar{p}})$ y la simple repetición de una negación, es decir la idéntica especial $\bar{p} \cdot \bar{p} = \bar{p}$.

7. Las operaciones fundamentales $(\vee p)$ y $(\cdot \bar{p})$ han sido mostradas así en su reversibilidad, pueden introducirse ahora dos nuevas operaciones que resultan de las precedentes. Si p forma parte de T sin ser equivalente, se tiene $(p \vee \bar{p}) = T$ (proposición (265)). Puede entonces intentarse invertir $(\vee \bar{p})$ de modo de establecer la relación existente entre (p) y (T), sea $p = T \cdot (\overline{\vee \bar{p}}) = T \cdot \bar{\bar{p}} = T \cdot p$. Con lo que se llega a definir la nueva cupla operatoria:

$$(273) \qquad (\overline{\vee \bar{p}}) = (\cdot p) \qquad y \qquad (\overline{\cdot p}) = (\vee \bar{p})$$

Su significación es la siguiente. Si se establece $(p \vee T) = T$ (270), la disyunción $(p \vee T)$ encierra la existencia de partes comunes entre

(p) y (T), sea $(p \,.\, T)$ y de partes no comunes $(T \,.\, \overline{p})$. La conjunción $(T \,.\, p)$ aparece entonces como una inversión parcial en el seno de la disyunción, por negación de las partes no comunes $(\overline{\vee \overline{p}})$. Inversamente, la inversión de la conjunción $(.\,\overline{p})$ consiste en una reintroducción de la parte no-común $(\vee \overline{p})$. La correlatividad que conduce de $(p \vee T)$ a $(p \,.\, T)$ no es pues otra cosa más que una inversión parcial en el seno de la operación fundamental $(\vee)$.

7 *bis.* Notemos que las transformaciones $(\vee p)$, $(.\,\overline{p})$, $(\vee \overline{p})$ y $(.\,p)$ caracterizan por sí solas los operadores directo, inverso, recíproco y correlativo de un "grupo de cuatro" (ver teorema VI, pág. 327), independientemente de las idénticas especiales.

8. Las operaciones $(.\,p)$ y $(\vee \overline{p})$ analizadas suponen también sus propias idénticas especiales. Como hemos visto ya $\overline{p} \vee \overline{p} = \overline{p}$ (en (268)). En cuanto a $(.\,p)$ se tiene:

(274) $$p \cdot p = p \text{ (tautificación)}$$

(275) $$p \cdot T = p \quad \text{o} \quad \overline{p} \cdot T = \overline{p} \quad \text{(absorción)}$$

Dicho de otro modo, toda proposición $(p, \overline{p}$ ó $T)$ unida a sí misma o a otra proposición incluida en ella, deja a esta invariante. La proposición $(\overline{p} \,.\, T = \overline{p})$ presenta al respecto dos significaciones equivalentes: *a*) si afirmo la parte común a $T(= p \vee \overline{p})$ y a p, no añado nada a $(\overline{p})$; *b*) si niego p en el seno de $T(= p \vee \overline{p})$, no afirmo más que p.

9. La más general de las idénticas especiales (275), es decir $(.\,T)$ equivale pues a la *idéntica general* $(\vee o)$, no tanto como producto de la directa por la inversa (primera función de la idéntica general, ver 3º), sino en tanto deja invariante toda otra operación (segunda función de la idéntica general): $(p \vee o) = (p . T)$; $(\overline{p} \vee o) = (\overline{p} \cdot T)$; etc. Desde este segundo punto de vista, pero sólo desde este segundo punto de vista, puede invertirse T en $\overline{T} = O$ y O en $\overline{O} = T$.

10. La relación de equivalencia $(\rightleftarrows)$ forma parte del sistema y expresa la sustitución posible de las expresiones que forman los dos miembros de la equivalencia considerada, por lo tanto, la verdad de su reciprocidad. Esta nueva operación se deduce, en efecto, de las precedentes:

$$(276) \qquad (p \equiv p) = (p \cdot p) \vee (\bar{p} \cdot \bar{p})$$

11. Puede entonces *transferirse* de un miembro a otro de una equivalencia todo término $(\vee p)$ bajo la forma $(.\,\bar{p})$ y todo término $(.\,p)$ bajo la forma $(\vee \bar{p})$, o recíprocamente. Estas transferencias se hallan sin embargo limitadas por las mismas reglas que en los agrupamientos de clases (§ 10, en III: reglas I-IV): importa pues seguir cierto orden entre las tautificaciones y las simplificaciones antes de las transferencias. Por ejemplo $(p \vee p) = (p\,.\,p)$ no puede dar lugar a ninguna transferencia antes de las reabsorciones $(p = p)$. Por el contrario $(p = p)$ dará $(p.\bar{q} = o)$ ó $(\bar{p} = \bar{p})$, etc.

12. Tales transferencias se traducen por el empleo de la *regla de dualidad.* Las transformaciones $\overline{p \vee p} = \bar{p}\cdot\bar{p}$; $\overline{\bar{p}\cdot\bar{p}} = p \vee p$; $\overline{p\cdot p} = \bar{p} \vee \bar{p}$; $\overline{\bar{p} \vee \bar{p}} = p\cdot p$; $\overline{p \vee \bar{p}} = \bar{p}\cdot p$; $\overline{\bar{p}\cdot p} = p\cdot \vee \bar{p}$; etc., no constituyen otra cosa, en efecto, más que la expresión de las distintas formas precedentes de inversión.

Se tienen entonces las siguientes composiciones, las que, unidas a las precedentes, constituyen un agrupamiento (designemos por las transformaciones:

$$(p \vee \bar{p} = T) \rightarrow (p = T\cdot p) \rightarrow (\bar{p} = T\cdot\bar{p})$$

o:

$$(\overline{p \vee \bar{p}} = \bar{T}) \rightarrow (\bar{p}\cdot p = o)$$

$$(p\cdot\bar{p} = o) \rightarrow (p = p) \rightarrow (\bar{p} = \bar{p})$$

o

$$(p\cdot\bar{p} = \bar{o}) \rightarrow [(\bar{p} \vee p) = T)$$

$$(p\cdot o = o) \rightarrow (T = \bar{p} \vee T)$$

Etc.

De la composición $(p \vee \bar{p} = T) = (p = T\,.\,p) = (\bar{p} = T\,.\,\bar{p})$, puede deducirse que T se halla siempre afirmado cuando (p) es verdadero, pero sin reciprocidad, ya que (T) está también afirmado en el caso $(\bar{p})$. Se dirá entonces que (p) implica (T), es decir $(p \supset T)$:

$$(277) \qquad (p \supset T) = (p\cdot T) \vee (\bar{p}\cdot T) \vee (p\cdot\bar{T})$$

(donde $\bar{T} = o$, por lo tanto $\bar{p}\,.\,o = o$), de ahí la equivalencia:

Esta última expresión representa la "afirmación" de T.

B. Los agrupamientos de implicaciones. — Subdividamos ahora el sistema T en totalidades incluidas:

$$p \supset q; \quad q \supset r; \quad r \supset s; \quad s \supset \ldots; \quad u \supset T$$

Lo que equivale a decir que la proposición (q) desempeñará respecto de (p) el mismo papel que desempeñaba (T) en las composiciones precedentes (265) a (277); que (r) desempeñará respecto de (q) el mismo papel que (q) respecto de (p); etc. Es fácil pues generalizar las transformaciones del agrupamiento precedente a conjuntos multiproposicionales tan ricos en elementos como se quiera. Pero es preferible, para la claridad de la exposición, disociar las operaciones $(\vee\, p)$ y $(.\,\bar{p})$ de las operaciones $(.\,p)$ y $(\vee\, p)$. Describamos pues en primer lugar las distintas formas que puede tomar el agrupamiento multiproposicional, para reunirlas luego en un solo todo.

Forma I. — No consideraremos pues, bajo el nombre de forma I, más que las operaciones fundamentales $(\vee\, p)$; $(.\,\bar{p})$ y $(=)$, y generalizaremos directamente a la serie de implicaciones $p \supset q$; $q \supset r$; etc., las relaciones establecidas entre p, $\bar{p}$, T y o en el caso $p \supset T$ (proposición (277)).

Por otra parte, si $(p \supset q)$ significará, en virtud de (277), que:

$$(p \supset q) = (p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$$

y que (277 bis) $q = (p\,.\,q) \vee (\bar{p}\,.\,q)$. Llamemos (p') la complementaria de (p) respecto de (q) de modo que $(p' = \bar{p}\,.\,q)$. Tendremos pues:

$$(p \supset q) \supset [(p \supset q).(p' \supset q)] \text{ y } (p \supset q) \supset [(p \vee p') = q]$$

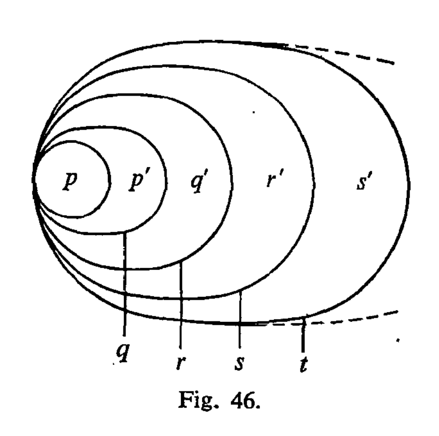


Fig. 46.

Se reconocen las proposiciones (170)-(172) del § 30.

Se tendrá igualmente (fig. (46)):

$r = (q \vee q')$ donde $(q' = \bar{q} \cdot r)$;
$(s = r \vee r')$ donde $(r' = \bar{r} \cdot s)$;

De donde:

(278) Si $p \supset q$; $q \supset r$; $r \supset s$; etc.
entonces $[(p \vee p') = q]$;$[(q \vee q') = r]$;
$[(r \vee r') = s]$; etc.

Esta forma I del agrupamiento de implicaciones corresponde al agrupamiento aditivo de clases (§ 12). Por ejemplo, $p =$ "x es un felino" y $q =$ "x es un carnicero", donde $p' =$ "x es un carnicero no felino"; $r =$ "x es un mamífero", donde $q' =$ "x es un mamífero no carnicero"; $s =$ "x es un vertebrado" y $r' =$ "x es un vertebrado no mamífero", etc.

De donde se derivan las siguientes composiciones que constituyen un "agrupamiento":

1. La *operación directa* $(\vee p)$ consiste en reunir una proposición p a otra proposición del sistema (278) disyunta de p, de manera de obtener una equivalencia: por ejemplo $p \vee p' = q$.

1 *bis.* La afirmación de una sola proposición equivale a una operación directa que conduce a esa proposición: así (p) equivale a $(\vee p)$, o más precisamente a $p \vee p$ (ver 4).

2. La *operación inversa* $(.\bar{p})$ consiste en reunir la negación de una proposición p a otra proposición del sistema:

$$\bar{p} \cdot \bar{p}' = \bar{q} \qquad \text{o} \qquad (r \cdot \bar{p} = p' \vee q')\text{; etc.}$$

2 *bis.* La negación de una sola proposición equivale a una operación inversa: $\bar{p}$ equivale a $(.\bar{p})$ y a $\bar{p} . \bar{p}$. De donde la doble negación $\bar{\bar{p}} = p$ equivale a $\overline{(.\bar{p})} = p$ ó a $\overline{(\bar{p} \cdot \bar{p})} = (p \vee p)$.

2 *ter.* El pasaje de una proposición de un miembro al otro de una equivalencia equivale a una operación inversa:
si $(p \vee p') = q$, entonces $p = q . \bar{p}'$ y $p' = q . \bar{p}$; igualmente $(p \vee p') \cdot \bar{q} = o$

3. La *operación idéntica general* ($\vee o$) constituye el producto de las operaciones directa e inversa: $p \cdot \bar{p} = o$.

La idéntica general no modifica las operaciones con las cuales es compuesta: $p \vee o = p$; $\bar{p} \vee o = \bar{p}$; ya que $p \vee (p \cdot \bar{p}) = p$ y $\bar{p} \vee (p \cdot \bar{p}) = p$.

4. Las *idénticas especiales* son la tautificación y la reabsorción:

Tautificación: $(p \vee p = p)$; $(\bar{p} \vee \bar{p}) = \bar{p}$; $\bar{p} \cdot \bar{p} = \bar{p}$.

Reabsorción: Si $(p \supset q)$, entonces $(p \vee q) = q$.

4 *bis*. La existencia de las idénticas especiales requiere la aplicación de las mismas reglas de composición que en los agrupamientos de clases (§ 10). Por ejemplo $(p \vee p) = p$ no podría dar $p = (p \cdot \bar{p})$ por transferencia de $(\vee p)$ en $(\cdot \bar{p})$. Pero $p = p$ da $o = p \cdot \bar{p}$.

5. La *asociatividad* está limitada a los elementos disyuntos, luego de todas las tautificaciones y reabsorciones.

Las composiciones del agrupamiento son pues las siguientes (ver la figura 46):

(279)
$$(p \vee p') = q$$
$$[(p \vee p' = q) \vee q'] = [(p \vee p' \vee q') = r]$$
$$[(q \vee q' = r) \vee r'] = [(p \vee p' \vee q' \vee r') = s]$$
$$[(r \vee r' = s) \vee s'] = [(p \vee p' \vee q' \vee r' \vee s') = t]$$

Etc.

De donde:

(280)
$$(p \vee p') = (r \cdot \bar{p}') \quad \text{ó} \quad (p' \vee q') = (r \cdot \bar{p})$$
$$(p \vee r') = (s \cdot \bar{p}' \cdot \bar{q}') \quad \text{ó} \quad (p' \vee r') = (s \cdot \bar{p} \cdot \bar{q}')$$

Etc.

(281) Si $p = q \cdot \bar{p}'$ y $p' = q \cdot \bar{p}$ entonces $(p \cdot p' = o)$

De donde resulta, ya que $p \cdot q = \bar{p}' \cdot q$ y $p' \cdot q = \bar{p} \cdot q$, la incompatibilidad $p \mid p'$:

(282) $[(\bar{p} \vee \bar{p}')(= p \mid p')] = [(\bar{p} \cdot p') \vee (p . \bar{p}') \vee (\bar{p} . \bar{p}')] = (p \mathrm{w}\, p' \mathrm{w}\, \bar{q})$

y

(283) $$q = (p \mathrm{w}\, p')$$

(284) si $(p \supset q)$ y $r = (q \mathrm{w}\, q')$ entonces $p \mid q'$, etc..

Se constata pues que: 1º Cada una de las proposiciones, ya sean primarias (p, q, r, etc.), ya sean secundarias (p', q', r', etc.) implica las proposiciones primarias de rango superior: $p' \supset t$ ó $r \supset u$, etc. 2º Recíprocamente cada proposición primaria implica las proposiciones que la componen, pero en tanto que conjunto: $s \supset (p \vee p' \vee r')$. 3º Toda proposición puede deducirse de las de rango superior por negación de sus complementarias: $(q' = t . \bar{s}' . \bar{r}' . \bar{q})$. 4º Finalmente, cada proposición (primaria o secundaria) es incompatible con su complementaria, así como con las proposiciones secundarias de rango superior $r \mid r'$; $r \mid s'$; $r \mid t'$; etc., igualmente $r' \mid r$; $r' \mid s'$; $r' \mid t'$; etc. (*cf.* (281) a (284)).

Estos cuatro tipos de inferencias, unidas a la conjunción $(p . q)$ (resultante de $q = p \cdot q \vee p' \cdot q$), bastan para fundamentar toda la silogística clásica, como lo veremos en el capítulo VII: $(p \supset q)$ corresponde, en efecto, al universal afirmativo; $(p \mid q')$ al universal negativo; $(p . q)$ al particular afirmativo y $(\bar{p} . q)$ al particular negativo.

Notemos finalmente que, en virtud de la definición de $p' = \bar{p} . q$, la disyunción $(p \vee p')$ equivale siempre a una disyunción exclusiva (por oposición a $p_1 \vee p_2$ que utilizaremos en la *forma* III y que será un trilema). Pero no podría elegirse la operación (w) como operación fundamental del agrupamiento, ya que se tendría entonces $(p \mathrm{w}\, p = o)$ en lugar de $(p \vee p = p)$ y si $(p \supset q)$, $(p \mathrm{w}\, q = p_1)$ y no $(p \vee q = q)$.. Por oposición al grupo de Boole-Bernstein, el agrupamiento exige, en efecto, una operación fundamental capaz de dar cuenta de los encajes $(p \vee q = q)$ y auto-encajes $(p \vee p)$ así como de las reuniones disyuntivas $(p \vee p' = q)$..

Forma II. — La segunda forma del agrupamiento de implicaciones tiene por operación directa la conjunción $(. p)$ y por inversa la expresión $(\vee \bar{p})$. Notemos en primer lugar que es fácil dar esta *forma* II a la *forma* I escribiendo:

$$(p \vee p' = q) = [(p \supset q) \cdot (p' \supset q) = q]$$

Pero si la *forma* I corresponde al agrupamiento de la adición de clases ($A + A' = B$; $B + B' = C$; etc.), la *forma* II es la única apta para traducir en operaciones interproposicionales el agrupamiento de la adición de relaciones asimétricas transitivas:

$$\overset{a}{\rightarrow} + \overset{a'}{\rightarrow} = \overset{b}{\rightarrow}; \quad \overset{b}{\rightarrow} + \overset{b'}{\rightarrow} = \overset{c}{\rightarrow}; \text{ etc.}$$

por ejemplo:

$$(A \subseteq B) + (B \subseteq C) = (A \subseteq C); \quad (A \subseteq C) + (C \subseteq D) = (A \subseteq D); \text{ etc.}$$

En efecto, si llamamos p la proposición que afirma $(A \subseteq B)$, p' la proposición que afirma $(B \subseteq C)$ y q la proposición que afirma $(A \subseteq C)$, se constata que no podría escribirse $(p \supset q)$ ni $(p' \supset q)$ como en el caso en que

$$p = «\, x_1 \in A \,» \quad \text{y} \quad q = «\, x_1 \in B \,»,$$

sino que, para expresar la relación entre $(A \subseteq B)$, $(B \subseteq C)$ y $(A \subseteq C)$, es decir entre p, p' y q, es preciso establecer $(p \cdot p') \supset q$; ya que p no implica q más que unida a p' y p' no implica q sino unida a p. Pero recíprocamente se tiene también $(q \supset p \cdot p')$. De lo que se deduce (ver figura 47, página siguiente):

(285) $$(p \cdot p') = q; \quad (q \cdot q') = r; \quad (r \cdot r') = s; \text{ etc.}$$

En cuanto a la operación inversa, no podría ser $p = q \cdot \bar{p}'$ ó $p' = q \cdot \bar{p}$, ya que no se podría afirmar simultáneamente la verdad de q y la falsedad de uno de sus componentes necesarios (por ejemplo afirmar que "C es más grande que B y que A" y al mismo tiempo excluir que "C es más grande que B". Por el contrario, y conforme a lo que hemos visto más arriba (proposición (273)), la inversa de $(\,.\,p)$ será $(\vee\,\bar{p})$:

(286) $$p = (q \vee \bar{p}'); \quad p' = (q \vee \bar{p}); \quad \bar{q} = (\bar{p} \vee \bar{p}'); \text{ etc.}$$

En efecto $(\bar{p} \vee \bar{p}') = (p \mid p')$, lo que es equivalente a $\bar{q}$ (= la falsedad de q equivale a la incompatibilidad de los elementos en los

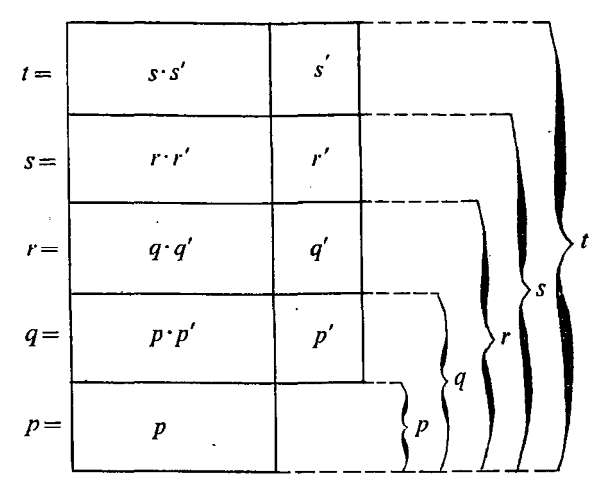


Fig. 47. [1]

cuales la conjunción define la verdad de q). Por otra parte, la inversión de la inversa, sea $\overline{\overline{p}} \vee \overline{\overline{p'}} = \overline{\overline{q}}$, significa que $(p.p' = q)$.

Ahora bien, las expresiones $(q \vee \overline{p})$ o $(q \vee \overline{p'})$ tienen un sentido preciso, que equivale a $(p \supset q)$ y a $(p' \supset q)$ (ver proposición (159)). Lo que equivale a decir que aislando p' de la expresión $(p \vee p' = q)$, se afirma simultáneamente que p' implica $(p \supset q)$ y que $(p \supset q)$ implica p' (la equivalencia $=$ significa en efecto, $\supseteq$); igualmente aislando p se afirma que p implica $(p' \supset q)$ y que $(p' \supset q)$ implica p. Es notable encontrar así semejantes equivalencias (286) a título de operaciones inversas del agrupamiento, que expresan en términos de implicaciones el encadenamiento de las relaciones asimétricas transitivas: se recordará, en efecto, que la inversa de la relación $A \subseteq B$

1 La figura 47 se lee como sigue. Cada casillero que contiene $(p.p')$ o $(q.q')$; $(r.r')$; *etc.*, representa la intersección entre el casillero situado por debajo de él y el casillero situado a su derecha. Por ejemplo, el casillero $(p.p')$ es la intersección de (p) y de (p'); el casillero $(q.q')$ es la intersección de $q = (p.p')$ y de (q'); el casillero $(r.r')$ es la intersección de $r = (q.q')$ y de r', etc.

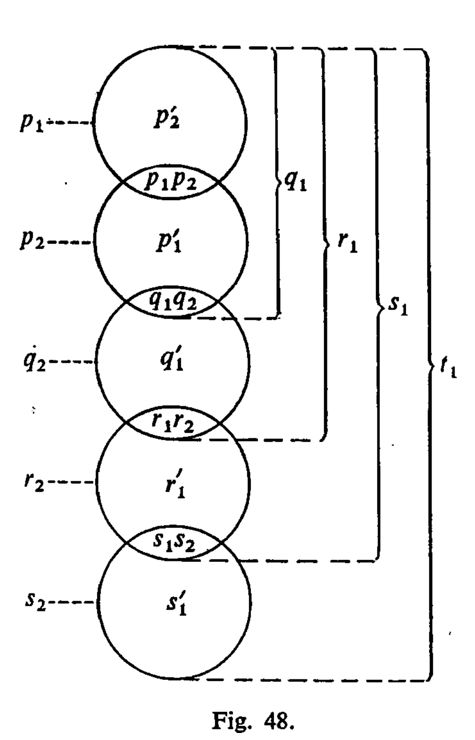


Fig. 48.

es su conversa $B \supseteq A$, y que el producto de la desigualdad $(A \subseteq B)$ y de su inversa $(B \supseteq A)$ era la equivalencia $(A = A)$. Así, la reversibilidad de los agrupamientos de relaciones, que es una reciprocidad y no una negación por complementariedad, corresponde en el plano interproposicional a una inversión propiamente dicha $(\cdot \bar{p}) = (\vee \bar{p})$, pero que expresa igualmente una reciprocidad en las implicaciones y no la negación de las proposiciones intervinientes. Nada podría ilustrar mejor este hecho que la correspondencia de dicha *forma* II con una seriación, en la cual todos los elementos se obtienen en función de las diferencias ordenadas, por oposición a los encajes simples de las clases no ordenadas.

Forma III. — La *forma* I del agrupamiento de implicaciones relaciona q a dos proposiciones constituyendo un dilema $(p \vee p') = \cdot q$, es decir, dos implicaciones complementarias $(p \supset q)$ y $(p' \supset q)$. La *forma* II relaciona más estrechamente p y p' por la conjunción $(p \cdot p') = q$, de donde se tiene $p \underset{\subset}{\supset} (p' \supset q)$ y $p' \underset{\subset}{\supset} (p \supset q)$. Veamos ahora el caso en que q está formada por dos proposiciones p_1 y p_2 que no serán ya completamente disyuntas ni enteramente conjuntas, sino que estarán relacionadas por una disyunción no exclusiva $(p_1 \vee p_2)$. Estas proposiciones elementales se implicarán, en consecuencia [1], en la forma

1 Como se recordará el trilema $(p \vee q)$ es equivalente a $\bar{p} \supset q$ y a $\bar{q} \supset p$ (proposición 132).

$(\bar{p}_1 \supset p_2)$ y $(\bar{p}_2 \supset p_1)$. Si llamamos p'_1 la proposición $(\bar{p}_1 \cdot q)$ y p'_2 la proposición $(\bar{p}_2 \cdot q)$, tendremos entonces la doble implicación[1]:

(287) $$(p_1 \vee p_2) = (p'_1 \supset p_2) \cdot (p'_2 \supset p_1)$$ (ver la figura 48)

y la reciprocidad:

(288) $$(p_1 \vee p_2) = (p'_1 \mid p'_2)$$

ya que $p'_1 = (\bar{p}_1 \cdot q)$ y $p'_2 = (\bar{p}_2 \cdot q)$.

Nos encontramos entonces en presencia de un agrupamiento de la siguiente forma (uno de los dos casos posibles que abarca el axioma de Nicod):

(289) $$\begin{aligned} &(p_1 \vee p_2) = q_1 \\ &(q_1 \vee q_2) = (p_1 \vee p_2 \vee q_2) = r_1 \\ &(r_1 \vee r_2) = (p_1 \vee p_2 \vee q_2 \vee r_2) = s_1 \\ &(s_1 \vee s_2) = (p_1 \vee p_2 \vee q_2 \vee r_2 \vee s_2) = t_1 \end{aligned}$$

Etc.

Se tiene entonces:

(290) $$\begin{aligned} q_1 &= (p_1 \cdot p_2) \vee (p_1 \cdot p'_2) \vee (p'_1 \cdot p_2) \\ r_1 &= (q_1 \cdot q_2) \vee (q_1 \cdot q'_2) \vee (q'_1 \cdot q_2) \end{aligned}$$

De lo que se desprende que las inversas serán:

(291) $$\bar{q} = \bar{p}_1 \cdot \bar{p}_2; \qquad p_1 = q_1 \cdot \overline{(p_2 \cdot p'_1)}; \qquad p_2 = q_1 \cdot \overline{(p_1 \cdot p'_2)}$$

La idéntica general es:

(292) $$q \cdot \bar{q} = o, \quad \text{es decir} \quad (p_1 \vee p_2) \cdot (\bar{p}_1 \cdot \bar{p}_2) = o$$

y las idénticas especiales: $p_1 \vee p_1 = p_1$; $p_1 \vee q_1 = q_1$; etc.

Veamos un ejemplo concreto. Sea p_1 = "x pertenece a una clase de parentesco por filiación (que llamaremos P_1)" y p_2 = "x pertenece a una clase de parentesco por alianza (P_2)". Se tiene entonces

1 Se reconoce la vicariancia de clases. Si $p'_1 = A_1$; $p'_2 = A_2$; $p_1 = A'_1$ y $p_2 = A'_2$, se tiene $(A_1 + A'_1 = A_2 + A'_2)$, de modo que $A_1 \subseteq A'_2$ y $A_2 \subseteq A'_1$. Por otra parte, se tiene A_1 / A_2.

$p_1 \vee p_2 = q_1$ (un individuo puede verificar a la vez p_1 y p_2, c uno sin el otro). Si $P_1 + P_2 = Q_1$, se tiene por otra parte, $q_1 =$ "x pertenece a la clase Q_1"; al casarse uno de los miembros de Q_1, se tiene una nueva clase de parentesco por alianza Q_2, de lo que se deriva $q_2 =$ = "x Q_2 y $(q_1 \bar{v} q_2) = r_1$, etc.

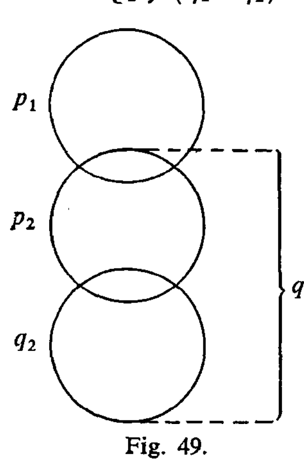


Fig. 49.

Las composiciones interesantes son en primer lugar las incompatibilidades:

(293) $(p'_1 \mid p'_2) \cdot (q'_1 \mid q'_2) \supset (p'_1 \mid q'_1)$

Igualmente se tiene $(p'_1 \mid r'_1)$; $(p'_1 \mid s'_1)$; etc. Y sobre todo, si llamamos q_3 la reunión $q_3 = (p_2 \vee q_2)$, se tendrá

(294) $(p_2 \supset q_3) \supset [(p_1 \vee p_2) \supset (p_1 \vee q_3)]$

(Ver la figura 49).

Esta implicación (294) constituye el axioma IV de Russell y Hilbert:

$$(p \supset q) \supset [(r \vee p) \supset (r \vee q)].$$

Las *formas* I y III del agrupamiento de implicaciones condensan así los axiomas I a IV de la lógica bivalente. El axioma I, $(p \vee p) \supset p$ expresa la operación idéntica especial del agrupamiento $(p \vee p) = p$; el axioma II, $p \supset (p \vee q)$, expresa el encaje de la parte en el todo $(p \vee p') = q$, así como la reabsorción $(p \vee q) = q$; el axioma III, $(p \vee q) \supset (q \vee p)$, expresa la conmutatividad de la reunión $(\vee)$ en que se basan las *formas* I y III del agrupamiento; y el axioma IV traduce la transitividad de las composiciones (proposición (294)). Es por ello que hay identidad entre las *formas* I y III del agrupamiento y el axioma único de Nicod, como lo hemos visto en el § 35.

Forma IV. — Introduzcamos ahora una complicación más. Admitamos que las proposiciones elementales p_1 y p_2, que constituyen q con sus complementarias p'_1 y p'_2 no se componen ya solamente (como en la *forma* III) según la operación: $[(p_1 p_2) \vee (p_1 p'_2) \vee (p'_1 p_2) = q]$ sino que q comprende además $(p'_1 p'_2)$. Se tendrá entonces una nueva disposición correspondiente a la operación que hemos denominado "afirmación completa" y (simbolizado por el signo $*$):

(295) $q = (p_1 * p_2) = (p_1 p_2) \vee (p_1 p'_2) \vee (p'_1 p_2) \vee (p'_1 p'_2)$

y se podrá agrupar así una serie de afirmaciones completas:

$$(p_1 * p_2) = q_1; \quad (q_1 * q_2) = r_1; \quad (r_1 * r_2) = s_1; \text{ etc.}$$

Lo que nos vuelve a conducir a las operaciones clásicas de la lógica bivalente basadas en las "tautologías" binarias, ternarias, etc. [1].

1. *Operaciones directas:*

(296)
$$
\begin{aligned}
(p * q) &= (p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q}) \\
(p * q) * r &= (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot \bar{r}) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot r) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot \bar{r}) \\
&\quad \vee (\bar{p} \cdot q \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot \bar{r}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \bar{r}) \\
(p * q * r) * s &= (p \cdot q \cdot r \cdot s) \vee (p \cdot q \cdot r \cdot \bar{s}) \vee (p \cdot q \cdot \bar{r} \cdot s) \\
&\quad \vee (p \cdot q \cdot \bar{r} \cdot \bar{s}) \vee \ldots, \text{ etc. (16 combinaciones)} \\
(p * q * r * s) * t &= (p \cdot q \cdot r \cdot s \cdot t) \vee (p \cdot q \cdot r \cdot s \cdot \bar{t}) \vee \ldots, \text{ etc.}
\end{aligned}
$$

(32 combinaciones)
etc.

2. La *operación inversa* presenta aquí un interés particular, dado que la *forma* IV del agrupamiento (y en cierta medida también la *forma* III) combina en un solo todo las operaciones $(\vee p)$ y $(.\, p)$, así como sus inversas $(\cdot \bar{p})$ y $(\vee \bar{p})$. La operación directa significa así una adjunción simultánea de nuevos $(.)$ y de nuevos $(\vee)$, como en el pasaje de $(p * q)$ a $(p * q * r)$. Se comprende entonces en qué consistirá la operación inversa, que escribiremos:

(297) $$(p * q) \mathbin{\bar{*}} r = (p * q) \qquad \text{o} \qquad (p * q) \mathbin{\bar{*}} q = (p \vee \bar{p})$$

Descompongamos ahora la expresión directa $(p * q)$:

$$p * q = \left\{ \begin{matrix} p \cdot q \\ p \cdot \bar{q} \\ \bar{p} \cdot q \\ \bar{p} \cdot \bar{q} \end{matrix} \right\} = [(p \cdot (q \vee \bar{q})] \vee [\bar{p} \cdot (q \vee \bar{q})]$$

1 Para no complicar el simbolismo, retomaremos las letras que utilizamos en el § 31 (entendiéndose que p'_1 se escribirá así $\bar{p}$; que p_2 se escribirá q y que p'_2 se notará $\bar{q}$, etc.).

Para invertir $(q \vee \bar{q}')$ en $\{[p\cdot(q \vee \bar{q})] \vee [\bar{p}\cdot(q \vee \bar{q})]\}$ basta entonces invertir $[\cdot(q \vee \bar{q})]$ en $[\vee (\bar{q}\cdot\bar{\bar{q}})]$, es decir en $[\vee (\bar{q}\cdot q)] = \vee (o)$, De lo que se deduce:

(298) $$[(p * q) \bar{*} q] = [(p \vee \bar{p}) \vee (o)] = (p \vee \bar{p})$$

Dicha operación corresponde pues, en el dominio de las operaciones de clases, a la división lógica o abstracción ($PQ : Q = P$), que significa: "abstracción hecha de Q, el producto PQ se reduce a P". En términos de operaciones interproposicionales, la operación inversa equivale pues a invertir simultáneamente (.) y ($\vee$) por oposición a ($\cdot^-$) solo ó a ($\vee^-$) solo.

3. La *operación idéntica general* es pues:

(299) $$(* \, p) \bar{*} (p) = (\vee)\, o$$

4. Las *idénticas especiales* son:

(300) $$(p * p) = p; \quad (p * q) * p = (p * q); \text{ etc.}$$

5. *Asociatividad:* reglas habituales.

En síntesis, las cuatro formas de agrupamientos de implicaciones derivan todas de las mismas operaciones elementales que el agrupamiento inicial estudiado en (A). No hay nada más, en efecto, en esas cuatro formas, que la extensión progresiva de las mismas operaciones $(\vee\, p)$ y $(.\, p)$ de donde se derivan $(\cdot\bar{p})$ y $(\vee\, \bar{p})$: la *forma* II es correlativa de la *forma* I que prolonga ella misma directamente el agrupamiento (A), la *forma* III introduce dos implicaciones recíprocas, mientras que la *forma* I no conoce sino una, y la *forma* IV reúne en un solo todo las operaciones desarrolladas en las formas precedentes. No existe pues sino un solo agrupamiento bajo cuatro formas distintas, ya que las inversas, recíprocas y correlativas $(\vee\, p)$; $(\cdot\bar{p})$; $(\cdot p)$ y $(\vee\, \bar{p})$ son componibles unas a partir de las otras.

C. El agrupamiento de las dieciseis combinaciones binarias. — Bastará aplicar ahora las operaciones de la *forma* I a las conjunciones de proposiciones engendradas por la *forma* IV (ver proposición (295)), que escribiremos $(p * q = p\cdot q \vee p\cdot\bar{q} \vee \bar{p}\cdot q \vee \bar{p}\cdot\bar{q})$, para obtener una nueva forma del mismo agrupamiento general: la que reúne unas a otras las dieciseis combinaciones binarias analizadas en el curso del capítulo V.

En efecto, al estar dadas las ocho cuplas posibles de las operaciones binarias complementarias, si se reúnen sus términos, ya sea por la operación $[\vee (pq)]$ o bien por la operación $[\,.\,(\overline{pq})]$, se desprende que estas cuplas darán en el primer caso la afirmación total $(p * q)$ y en el segundo la negación total (o):

(301)

$$
\begin{array}{llll}
(p \vee q) \vee (\bar{p}\cdot\bar{q}) = (p * q) & (p \vee q)\cdot(\bar{p}\cdot\bar{q}) = o & \text{ya que} & (\bar{p}\cdot\bar{q}) = (\overline{p \vee q}) \\
(p \mid q) \vee (p\cdot q) = (p * q) & (p \mid q)\cdot(p\cdot q) = o & \text{ya que} & (p \mid q) = (\overline{p\cdot q}) \\
(p \supset q) \vee (p\cdot\bar{q}) = (p * q) & (p \supset q)\cdot(p\cdot\bar{q}) = o & \text{etc.} & \\
(p \subset q) \vee (\bar{p}\cdot q) = (p * q) & (p \subset q)\cdot(\bar{p}\cdot q) = o & & \\
(p * q) \vee (o) = (p * q) & (p * q)\cdot(o) = o & & \\
(p = q) \vee (p \mathbin{w} q) = (p * q) & (p = q)\cdot(p \mathbin{w} q) = o & & \\
p[q] \vee \bar{p}[q] = (p * q) & p[q] \cdot \bar{p}[q] = o & & \\
q[p] \vee \bar{q}[p] = (p * q) & q[p] \cdot \bar{q}[p] = o & &
\end{array}
$$

La existencia de tales equivalencias permite pues tratar estas combinaciones binarias $(p \mid q)$ ó $(p \supset q)$, etc., reunidas por las operaciones $[\vee (pq)]$ y $[\,.\,(\overline{pq})]$ como constituyendo por sí mismas los elementos de un agrupamiento. En tal caso, dicho agrupamiento, que pasará a ser la más general de las formas consideradas hasta aquí, no se referirá ya a las proposiciones como tales p ó q, sino a los pares de proposiciones conjuntas, tales como $(p.q)$ ó $(p.\bar{q})$, etc.

Llamemos (T) el sistema total, $T = (p * q)$ y partamos de la equivalencia:

$$(p\cdot q) \vee (p\cdot\bar{q}) \vee (\bar{p}\cdot q) \vee (\bar{p}\cdot\bar{q}) = T$$

Bastará entonces transferir de un miembro al otro toda conjunción, $(p.q)$ o $(p.\bar{q})$, cambiando el signo de la conjunción como tal (pero no el de las proposiciones mismas) y permutando las operaciones $[\vee (pq)]$ y $[\,.\,(\overline{pq})]$ para engendrar todas las operaciones binarias posibles. El conjunto de estas transformaciones constituirá entonces un agrupamiento.

En efecto, si se transfiere del primero al segundo miembro de la expresión total la última conjunción $(\bar{p}\,.\,\bar{q})$, se tendrá:

(302) $$(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) = T \cdot (\overline{\bar{p} \cdot \bar{q}}) = \overline{\bar{p} \cdot \bar{q}}$$

es decir, $(p \vee q) = \overline{\bar{p} \cdot \bar{q}}$ (*cf.* (124)).

Si se transfiere la antepenúltima conjunción, se obtendrá:

(303) $$(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q}) = T \cdot (\overline{p \cdot \bar{q}})$$

es decir, $p \supset q = \overline{p \cdot \bar{q}}$ (*cf.* proposición (155)) y así sucesivamente.

Las conjunciones como tales, cuyas diversas asociaciones definen las dieciseis operaciones binarias, constituyen pues un agrupamiento bien definido, idéntico al agrupamiento de implicaciones de la *forma* I con la única diferencia que el elemento no es ya una proposición simple $(\vee p)$, sino una proposición conjuntiva $[\vee (p \cdot q)]$. He aquí las operaciones de dicho agrupamiento:

1. La *operación directa* es la reunión disyuntiva $(\vee)$ de una conjunción a otra: $(o) \vee (p \cdot q)$; $(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q})$; etc.

2. La *operación inversa* es la negación de una conjunción, reunida conjuntivamente a otra: $[\cdot (\overline{p \cdot q})]$; $[\cdot (\overline{p \cdot \bar{q}})]$; etc.

3. La *operación idéntica general* $[\vee (o)]$ es el producto de toda operación directa y de su inversa: $(p \cdot q) \cdot (\overline{p \cdot q}) = o$.

Compuesta con cualquier operación, la idéntica general no la modifica: $(p \cdot q) \vee (o) = (p \cdot q)$.

4. Las *idénticas especiales* son:

a) La tautificación: $(p \cdot q) \vee (p \cdot q) = (p \cdot q)$.

b) La reabsorción: $(p \cdot q) \vee [(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q})] = [(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q})]$.

c) La absorción: $(p \cdot q) \cdot (p * q) = (p \cdot q)$.

5. *Asociatividad:* Reglas habituales de los agrupamientos.

Las composiciones del agrupamiento abarcan pues toda la lógica de combinaciones binarias, pudiendo por otra parte escribirse también en la cómoda forma de equivalencias, es decir, de ecuaciones de transformaciones algebraicas usuales. (*cf.* § 10 en III):

1º Tenemos en primer lugar las composiciones correspondientes a las que hemos tratado (en § 32) en la forma de un modelo de clases:

(304) $$(p \mid q) = (p * q) \cdot (\overline{p \cdot q})$$

(305) $$(p\cdot q) = (p * q)\cdot(\overline{p\cdot\bar{q}})\cdot(\overline{\bar{p}\cdot q})\cdot(\overline{\bar{p}\cdot\bar{q}})$$

En efecto, una incompatibilidad $(p \mid q)$ equivale a una afirmación completa menos la conjunción $(p.q)$. Por otra parte, una conjunción $(p.q)$ equivale a una afirmación completa menos la exclusión recíproca $(p\cdot\bar{q}) \vee (\bar{p}\cdot q)$ y menos la negación conjunta $(\bar{p}.\bar{q})$.

(306) $$p \supset q = p * q\cdot(\overline{p\cdot\bar{q}})$$

Una implicación es una afirmación completa menos la no-implicación $(p.\bar{q})$.

2º Se tienen a continuación las transformaciones de las combinaciones unas en otras por reunión de dos de ellas:

(307) $$(p \mathbin{w} q) \vee (\bar{p}\cdot\bar{q}) = (p \mid q)$$

y

(308) $$(p \mid q)\cdot(\overline{\bar{p}\cdot\bar{q}}) = (p \mathbin{w} q)$$

En efecto, una exclusión recíproca más una negación conjunta da una incompatibilidad. Inversamente, la parte común a una incompatibilidad y a una disyunción $(\overline{\bar{p}\cdot\bar{q}}) = (p \vee q)$ es $[(p\cdot\bar{q}) \vee (\bar{p}\cdot q)]$, es decir una exclusión recíproca $(p \mathbin{w} q)$.

(309) $$(\overline{p \supset q}) \vee (\overline{p \subset q}) = (p \mathbin{w} q)$$

En efecto, una exclusión recíproca $(p \mathbin{w} q) = (p\cdot\bar{q}) \vee (\bar{p}\cdot q)$ es la reunión de dos no-implicaciones $(\overline{p \supset q}) = (p\cdot\bar{q})$ y $(\overline{p \subset q}) = (\bar{p}\cdot q)$, respectivamente.

(310) $$\bar{p}[q] \vee (p\cdot q) = (p \supset q)$$

La negación de p reunida a la conjunción da la implicación.

(311) $$(p = q) = (p * q)\cdot(\overline{p\cdot\bar{q}})(\overline{\bar{p}\cdot q})$$

Una equivalencia es una afirmación completa menos las dos no-

implicaciones, o mejor, es lo que tienen de común la tautología y las dos implicaciones $(\overline{p \cdot \bar{q}}) = (p \supset q)$ y $(\overline{\bar{p} \cdot q}) = (q \supset p)$, es decir $(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$.

(312) $$\bar{p}[q] \vee (p \cdot \bar{q}) = (p \mid q)$$

La negación de p unida a la no-implicación $(\overline{p \supset q}) = (p . \bar{q})$ da la incompatibilidad.

(313) $$(p \vee q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q}) = (p * q)$$

de lo que se deduce:

$$(p \vee q) = T \cdot (\overline{\bar{p} \cdot \bar{q}}) = \overline{\bar{p} \cdot \bar{q}}$$

etc.

3º Tenemos finalmente el pasaje general de las operaciones a sus inversas, recíprocas y correlativas conforme a los teoremas I-V y a sus corolarios (§ 31):

a) La inversa está dada por la operación inversa del agrupamiento o por la transferencina de un miembro al otro de las equivalencias.

b) El pasaje de una operación a su correlativa es todavía una operación del agrupamiento, ya que la correlativa de una operación se confunde con la misma operación en el caso de afirmaciones o negaciones de p y de q (teoremas II y IV), o con la operación inversa en el caso de las demás expresiones de cuatro, dos o cero conjunciones (teoremas II y V, corolario I); en cuanto a las expresiones de tres o de una conjunción, la correlativa se obtiene (teorema III y corolario I) por adjunción $[\vee (pq)]$ o negación$[.(\overline{pq})]$ de las partes comunes $(p.q) \vee (\bar{p}.\bar{q})$ o de las partes no comunes $(p.\bar{q}) \vee (\bar{p}.q)$ a partir de la expresión considerada:

(314) $$(p \vee q) \cdot (\overline{p \cdot \bar{q}}) \cdot (\overline{\bar{p} \cdot q}) = (p \cdot q)$$

y

(315) $$(p \cdot q) \vee [(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)] = (p \vee q)$$

(316) $$(p \mid q) \cdot (\overline{p \cdot \bar{q}}) \cdot (\overline{\bar{p} \cdot q}) = (\bar{p} \cdot \bar{q})$$

y

(317) $$(\bar{p}\cdot q) \vee [(p\cdot \bar{q}) \vee (\bar{p}\cdot q)] = (p \mid q)$$

(318) $$(p \supset q)\cdot(\overline{p\cdot q})\cdot(\overline{\bar{p}\cdot \bar{q}}) = (\bar{p}\cdot q)$$

y

(319) $$(\bar{p}\cdot q) \vee [(p\cdot q) \vee (\bar{p}\cdot \bar{q})] = (p \supset q)$$

(320) $$(q \supset p)\cdot(\overline{p\cdot q})\cdot(\overline{\bar{p}\cdot \bar{q}}) = (p\cdot \bar{q})$$

y

(320 *bis*) $$(p\cdot \bar{q}) \vee [(p\cdot q) \vee (\bar{p}\cdot \bar{q})] = (q \supset p)$$

Al formar parte el cálculo de las correlativas de las operaciones del agrupamiento, se hace posible entonces abreviarlo por la simple permutación de los ($\vee$) y los (.), por ejemplo $(p \vee q) \rightarrow (p\cdot q)$ (proposición (314)). Pueden entonces incorporarse al sistema las operaciones $(.\ p)$ y $(\vee\ \bar{p})$ (ver proposición (273) y comentario), lo que autoriza la transformación de las formas normales disyuntivas, a que conducen las operaciones fundamentales del agrupamiento, en formas normales conjuntivas que expresan la correlativa de las expresiones consideradas. Por ejemplo:

$$[(p\cdot q) \vee (\bar{p}\cdot \bar{q})] \rightarrow \{\, [(p \vee q)\cdot(\bar{p} \vee \bar{q})] = (p \mathbin{w} q) \,\}$$

c) Finalmente, al ser la recíproca la inversa de la correlativa, basta entonces con aplicar la operación inversa del agrupamiento a la correlativa de una expresión dada para obtener la recíproca de esta última. Puede entonces calcularse dicha recíproca por la simple inversión de los signos (p) y $(\bar{p})$ en la expresión inicial.

En síntesis, el conjunto de las transformaciones binarias se deriva de esta forma (C) del agrupamiento general. En cuanto a esta forma (C), todas sus composiciones aparecen como reuniones ($\vee$), disociaciones $(\cdot\,\bar{}\,)$, sustituciones y "vicariancias" a partir de la expresión $(p * q)$ dada en la *forma* IV del agrupamiento de implicaciones (ver B en IV).

D. El grupo de inversiones, reciprocidades y correlatividades. — Como hemos visto (teorema VI del § 31), las inversiones, reciprocidades y correlatividades, unidas a la transformación idéntica, forman entre sí un "grupo" propiamente dicho y no un "agrupamiento". Si designamos por N la inversión, por R la reciprocidad y por C la correlatividad (el símbolo I representará la transformación nula o "idéntica") se tiene en efecto:

(321) $$NN = I; \quad RR = I \quad \text{y} \quad CC = I$$

(321 *bis*) $$N = CR(= RC); \; R = NC(= CN); \; C = NR(= RN)$$

(321 *ter*) $$I = CRN(= RCN = NCR = \text{etc.})$$

¿Cómo puede derivarse pues un grupo de transformaciones del agrupamiento de las operaciones elementales, ya que este se basa únicamente en los encajes de parte a todo y en las complementariedades? La razón está en que las transformaciones de dicho grupo consisten exclusivamente en inversiones de diversas formas, que son por sí solas, componibles entre sí de manera a la vez reversible, asociativa y conmutativa. La inversión N es, en efecto, una negación, es decir, una complementariedad en relación a la afirmación completa (*). La reciprocidad (R) es una inversión de las proposiciones como tales, es decir, una complementariedad en relación a la "equivalencia" (teorema V). Finalmente, la correlatividad C es una inversión simple (negación) de la recíproca R, es decir nuevamente una complementariedad en relación a la afirmación completa (*). No intervienen pues en dicho sub-sistema (N, R, C e I) ninguna "idéntica especial", ya que las idénticas especiales de un "agrupamiento" son posibles sólo entre elementos de signos iguales:

$$[(p \vee p) = p]; \quad [(p \cdot p) = p]; \quad [(p \cdot q) \vee (p \cdot q) = (p \cdot q)]; \text{ etc.}$$

De lo que se desprende que no existe más que una operación idéntica única (I) en el caso particular de las solas transformaciones N, R y C: por el hecho mismo de estar separadas de las demás composiciones posibles del "agrupamiento" y de componerse entre sí solas los tres tipos de inversiones fundamentales del agrupamiento son combinables, por lo tanto, en un "grupo" de transformaciones propiamente dicho.

Se ve, a este respecto, de una manera particularmente clara en qué sentido constituye el "agrupamiento" una estructura intermedia entre el "grupo" y el "reticulado", ya que el agrupamiento es un caso particular de reticulado y abarca él mismo un grupo de transformaciones si se limita a componer entre sí los operadores de inversión del agrupamiento y la identidad. Recordemos, en efecto, que la inversión N corresponde a la operación inversa de los agrupamientos aditivos de clases (y del agrupamiento general de las operaciones interproposicionales) y que la reciprocidad R corresponde a la operación inversa de los agrupamientos aditivos de relaciones (y a la permutación de los términos de la equivalencia o de la implicación entre proposiciones). Finalmente, la correlatividad C, producto de la inversión y de la reciprocidad (NR o RN) caracteriza la relación entre los límites inferiores y superiores del reticulado correspondiente.

E. El agrupamiento de las combinaciones ternarias, etc. — Todo lo que acabamos de decir respecto de las combinaciones binarias es aplicable inmediatamente a las combinaciones ternarias, etc., engendradas por las operaciones $(p * q * r)$ ó $(p * q * r * s)$, etc., de la misma *forma* IV del agrupamiento de las implicaciones (B). Se tendrá así, para $(p * q * r)$, las operaciones directas: $(p.q.r) \vee (p.q.\bar{r})$, etc., y las operaciones inversas:

$$(p\cdot q\cdot r)\cdot(\overline{p\cdot q\cdot r}) = o \text{ ; etc.}$$

Será posible entonces engendrar las relaciones ternarias, ya sea por composición directa a partir de dos o tres combinaciones binarias *(pq, qr y pr)*, ya sea por negación a partir de la afirmación completa $(p * q * r)$ (proposición (296)).

Tomemos como ejemplo la composición $(p \mid q).(q \mid r)$. Es posible en primer lugar componer las dos combinaciones binarias entre sí:

(322)
$$(p \mid q) = (\bar{p}\cdot\bar{q}) \vee (p\cdot\bar{q}) \vee (\bar{p}\cdot q)$$
$$(q \mid r) = (\bar{q}\cdot\bar{r}) \vee (q\cdot\bar{r}) \vee (\bar{q}\cdot r)$$
$$\overline{(p \mid q)\cdot(q \mid r) = (\bar{p}\cdot\bar{q}\cdot\bar{r}) \vee (p\cdot\bar{q}\cdot\bar{r}) \vee (\bar{p}\cdot q\cdot\bar{r}) \vee (\bar{p}\cdot\bar{q}\cdot r) \vee (p\cdot\bar{q}\cdot r)}$$

En efecto, $(p.q.r)$, $(\bar{p}.q.r)$ y $(p\cdot q.\bar{r})$ están excluidos, ya que no

tiene, en ninguno de los seis componentes, ni la asociación $(p.q)$ la asociación $(q.r)$:

23) $$(p \mid q)\cdot(q \mid r) = (p * q * r)\cdot(\overline{p\cdot q\cdot r})\cdot(\overline{\bar{p}\cdot q\cdot r})\cdot(\overline{p\cdot q\cdot \bar{r}})$$

Ejemplo: Si $p =$ "x es invertebrado", $q =$ "x es vertebrado" y $r =$ "x vive jado a las rocas (ostras, algas, etc,)", se tienen las asociaciones verdaderas: $\bar{p}.\bar{q}.r$) = ni invertebrado, ni vertebrado, ni fijado a las rocas; $(p.\bar{q}.\bar{r})$; etc. ver proposición (322)), pero está excluido que pueda darse $(p.q.r) =$ a la ez invertebrado, vertebrado y fijado a las rocas; $(\bar{p}.q.r) =$ no-invertebrado, verebrado y fijado a las rocas; ni $(p.q.\bar{r}) =$ a la vez invertebrado, vertebrado, pero ιo fijado a las rocas.

Igualmente, para componer la expresión $(p.q) \supset \bar{r}$, no tenemos más que negar la asociación $(p.q\cdot r)$, que es la única excluida:

(324) $$[(p\cdot q) \supset \bar{r}] = (p * q * r)\cdot(\overline{p\cdot q\cdot r})$$ (ver fig. 50)

Esta expresión equivaldrá pues a:

(324 *bis*) $$[(p\cdot q) \supset \bar{r}] = [(p\cdot q)\cdot \bar{r}] \vee [(\overline{p\cdot q})\cdot r] \vee [(\overline{p\cdot q})\cdot \bar{r}]$$

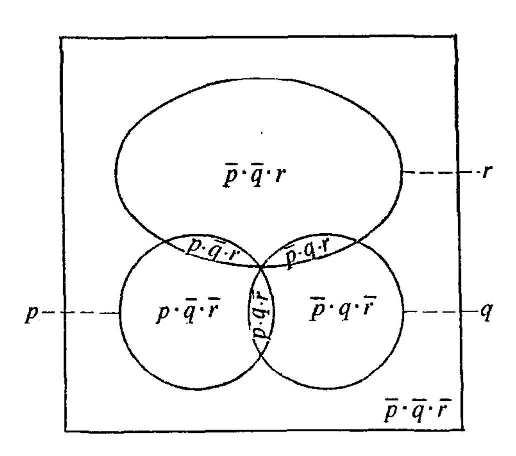


Fig. 50.

Ahora bien, $(\overline{p.q}) = (p \mid q) = (\bar{p}.\bar{q}) \vee (\bar{p}\cdot q) \vee (p.\bar{q})$, de donde se derivan seis combinaciones:

$$\bar{p}\cdot\bar{q}\begin{cases} r \\ \bar{r}\end{cases};\quad p\cdot\bar{q}\begin{cases} r \\ \bar{r}\end{cases}\quad \text{y}\quad \bar{p}\cdot q\begin{cases} r \\ \bar{r}\end{cases}$$

que dan, junto con $(p.q.\bar{r})$, la fórmula total:

$$(324\ ter) \qquad [(p \cdot q) \supset \bar{r}] = (p \cdot q \cdot \bar{r}) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot r) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot \bar{r}) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot \bar{r}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \bar{r}) = [(p * q * r) \cdot (\overline{p \cdot q \cdot r})]$$

Ejemplo: $p =$ "x es un animal acuático"; $q =$ "x es un animal terrestre" y $r =$ "x es un animal volador", de donde $(p . q) =$ "x es anfibio" y $(p \cdot q) \supset \bar{r} =$ anfibio implica no-volador. Las siete combinaciones de la proposición (324 ter) son entonces verificadas.

Veamos aún otro ejemplo equivalente al precedente:

$$(325) \qquad (p \cdot q) \mid (q \cdot r) = (p * q * r) \cdot (\overline{p \cdot q \cdot r})$$

Por otra parte, se tiene:

$$(p \cdot q) \mid (p \cdot r) = [(\overline{p \cdot q}) \cdot (\overline{q \cdot r})] \vee [(p \cdot q) \cdot (\overline{q \cdot r})] \vee [(\overline{p \cdot q}) \cdot (q \cdot r)]$$

Ahora bien:

$$(\overline{p \cdot q}) \cdot (\overline{q \cdot r}) = (p \mid q) \cdot (q \mid r) = (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \bar{r}) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot \bar{r}) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot \bar{r}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot r) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot r)$$

(ver proposiciones (322) y (323)).

Por otra parte $(p \cdot q) \cdot (\overline{q \cdot r}) = (p \cdot q \cdot \bar{r})$ y $(\overline{p \cdot q}) \cdot (q \cdot r) = (\bar{p} \cdot q \cdot r)$.

De donde se obtienen finalmente las mismas siete asociaciones que en (324 *ter*).

Igual ejemplo: Anfibio $(p . q)$ incompatible con terrestre y volador $(q . r)$

Así el pasaje resulta fácil de las operaciones binarias de tipo (C) a las operaciones ternarias, etc. (E), las cuales permanecen siendo las mismas partiendo de $(p * q)$ a $(p * q * r)$, etc. Pero a medida que se complican, estas últimas dejan de ser interesantes, a causa del número de combinaciones posibles: aparte precisamente de las composiciones *I* a *III* del tipo B (que son multiproposicionales y constituyen así un caso particular de E), no son ya transitivas y suponen, en consecuencia, una multivocidad creciente. Es lo que nos falta señalar para concluir.

§ 40. CONCLUSION: EL AGRUPAMIENTO DE LAS OPERACIONES $(\vee p)$ y $(\cdot \bar{p})$ FUNDAMENTO DE LA DEDUCCION.

Los desarrollos que preceden muestran que es posible deducir el conjunto de las operaciones de la lógica bivalente de la única operación $(\vee p)$ y de su inversa $(.\ \bar{p})$, aplicadas inicialmente al sistema $(p \vee \bar{p} = T)$ y $(p . \bar{p} = o)$. Pasando de este sistema inicial (que define de entrada sus propias condiciones de no-contradicción y de tercero excluido) al agrupamiento de implicaciones $(p \supset q)$, es decir $(p \vee p' = q)$; $(q \vee q' = r)$; etc., y de este al de las afirmaciones completas, la cupla de operaciones $(\vee p)$ y $(.\ \bar{p})$ reúne entonces las formas normales disyuntivas de las operaciones binarias, además de las operaciones de tres o n elementos. Así, todas las operaciones de la lógica bivalente son reducibles a un solo y único "agrupamiento" caracterizado por sus leyes bien definidas de reversibilidad, de composiciones contiguas (complementariedades), de encajes dicotómicos y de autoencajes (idénticas especiales).

La lógica proposicional no se basa pues en una simple combinatoria atomística, sino en una estructura de conjunto, cuya existencia revelan ya los axiomas de Russell-Hilbert y sobre todo el de Nicod, y que la construcción precedente manifiesta en la forma más simple. Esta estructura no se reduce a un grupo, ya que se halla restringida a las solas relaciones de parte a todo, de ahí la presencia necesaria de las idénticas especiales: es por ello que la operación $(\vee)$ es fundamental, en oposición a la operación (w) del grupo de Boole-Bernstein, que disocia las partes no-comunes: la implicación $(p \supset q)$, expresa, en efecto, la reunión en un solo todo de las partes comunes $(p . q)$ y no comunes $(\bar{p} . q)$, es decir $(p \cdot q \vee \bar{p} \cdot q)$, por lo tanto $(p \vee p') = q)$. Esta estructura no constituye tampoco un simple reticulado, ya que exige la intervención de composiciones reversibles. Se remite pues a las leyes del agrupamiento, y esto en completo paralelismo con las estructuras de conjunto de clases y de relaciones.

Ahora bien, esta conclusión interesa desde un triple punto de vista: en lo concerniente, en primer lugar, al rol esencial de la implicación y de la equivalencia (o doble implicación), al asegurar las solas composiciones multiproposicionales indefinidamente transitivas, es decir, la posibilidad misma de la deducción; en lo que concierne, por

otra parte, a la naturaleza de la no-contradicción lógica; y, finalmente, a las relaciones entre la lógica proposicional bivalente y el razonamiento matemático.

1º La operación fundamental del agrupamiento único descrito precedentemente, es decir $(p \vee \bar{p} = T)$, o de modo general $(x \vee y = z)$, constituye, en efecto, desde el comienzo un juego de implicaciones y pone así la implicación en la fuente misma de las composiciones del agrupamiento. En efecto, $(x \vee y) = z$ significa $(x \supset z)$; $(y \supset z)$; $(x \vee y) \supset z$; y $[z \supset (x \vee y)]$. Basta decir que la reunión disyuntiva $(x \vee y)$ engendra, por su propio mecanismo, un encaje de x e y en un todo z, para que las relaciones de las partes y de ese todo no puedan ser otras más que la implicación misma. Es pues la implicación como tal la que, por sus diferenciaciones sucesivas, fundamenta la afirmación completa $(p * q)$ y no ésta, como se dice generalmente, la que engendra todas las demás operaciones.

La cosa se vuelve evidente en la construcción misma del agrupamiento. Las composiciones de la especie (C), es decir, las dieciseis combinaciones binarias y sus transformaciones mutuas (así como *a fortiori* las composiciones E, es decir, ternarias, etc.) no constituyen, en efecto, más que una extensión, con intervención de sustituciones simples o complementarias (vicariancias) cada vez más numerosas, de las composiciones B (I a IV), es decir, del agrupamiento de implicaciones. Por ejemplo, una composición tal que:

$$[(p \mathrm{w} q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})] = [(p * q) \cdot (\overline{p \cdot q})] = (p \mid q)$$

no es sino una sustitución complementaria (vicariancia) en el interior del conjunto $(p * q)$ y este a su vez no es más que el resultado de dos implicaciones $(p \vee \bar{p}) \supset (q \vee \bar{q})$ entrecruzadas (toda intersección constituye una doble implicación).

Ahora bien, este primado de la implicación (o de la equivalencia que es una implicación recíproca) se debe a su carácter fundamental (fuente del agrupamiento) que es la transitividad de los encajes que constituye. En efecto, entre las dieciseis operaciones binarias sólo precisamente la implicación $(p \supset q)$ o $(p \subset q)$ y la equivalencia $(p \supseteq q)$ presentan lo que podría llamarse una transitividad mayorante. La única otra relación binaria transitiva es, en efecto, la conjunción: $(p . q) . (q . r) = (p . r)$, pero como $(p . q)$ no excluye ni la verdad posible de $(\bar{p} . q)$ ni la de $(p . \bar{q})$ y $(q . r)$ no excluye ni $(q . \bar{r})$

ni $(\bar{q}.r)$ (por ejemplo, la disyunción $p \vee q$ implica la verdad posible de tres combinaciones $p \cdot q \vee p \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q$), la transitividad propia de la conjunción puede llamarse minorante en el sentido que lleva sobre intersecciones cada vez más restringidas. Por ejemplo, si "x es a la vez vertebrado y acuático" $(p.q)$ y a la vez "acuático y pulmonar" $(q.r)$, es entonces "a la vez vertebrado y pulmonar" $(p.r)$ (ver fig. 51), la conjunción total $(p.q.r)$ es el límite inferior (el mayor de los "minorantes") de p, q y r. Por el contrario, en una relación como $p \supset q$, $q \supset r$, luego $p \supset r$, la transitividad es mayorante en el sentido en que incorpora p en un límite superior $q \vee p \vee r$ (ver fig. 44) que constituye el menor de los "mayorantes" de p, q y r. En cuanto a la equivalencia, la transitividad $p = q$, $q = r$, luego $(p = r)$, inserta p, q y r en una totalidad $(p = q = r)$ que es a la vez el límite superior e inferior de dichas proposiciones.

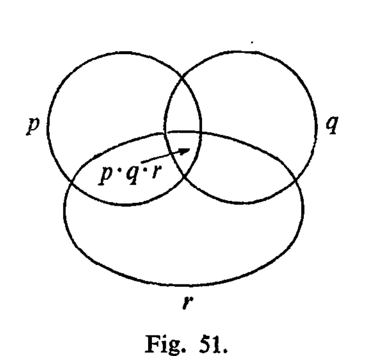


Fig. 51.

Al constituir pues todo agrupamiento una serie de equivalencias, o sea de composiciones transitivas, se comprende entonces por qué la implicación desempeña un papel tan fundamental en el agrupamiento de las operaciones interproposicionales. Por otra parte, al ser todo agrupamiento una serie de encajes dicotómicos de composiciones "contiguas" (ver § 10), la implicación satisface igualmente dichas condiciones, ya que $(p \supset q)$; $(q \supset r)$; etc., equivalen a $p \vee p' = q$ (donde $p' = \bar{p}.q$); $q \vee q' = r$ (donde $q' = \bar{q}.r$); etc., Ahora bien, por el hecho de fusionar en un solo todo las operaciones $(\vee p)$, $(.\,\bar{p})$ y $(p \supset q)$, la expresión $(p \vee p' = q)$ confiere precisamente una transitividad mayorante indirecta a las operaciones ($\vee$), (w), $(.)$ y $(^{*})$ que no la poseen por sí mismas: en efecto, si $p \supset q$, entonces $(p.r) \supset$ $\supset (q.r)$; igualmente:

$$(p \vee r) \supset (q \vee r) \qquad \text{y} \qquad (q \mid r) \supset (r \mid p); \text{ etc.}$$ [1]

De lo que resulta que, si una composición intransitiva como por ejem-

1 Ver el axioma IV de Russell-Hilbert y el axioma único de Nicod.

plo $(p \mid q) . (q \mid r)$, no presenta ningún interés en sí misma para la deducción, ya que supone sólo una conclusión multívoca (ver las cinco posibilidades de la proposición (322), el agrupamiento de las mismas operaciones le confiere un poder operativo específico subordinándola a las implicaciones.

Así la deducción concluyente no puede basarse más que en implicaciones y equivalencias, además de subordinar las operaciones no transitivas a los encajes constituidos por las series transitivas. Tal es el rol desempeñado por las formas A y B (con sus variedades I a IV) del agrupamiento de las operaciones interproposicionales, por oposición a las formas C y E que las generalizan simplemente. Pero, ¿estas formas B (I a IV) son en sí completas (a condición naturalmente de poder componerlas entre ellas)? Es fácil asegurarse de ello, ya que si subordinan a la implicación las operaciones (v), (.), (w = caso particular de v) y (*), comprenden naturalmente las inversas (por ejemplo $x \mid y = z$ dará $\bar{x} \vee \bar{y} = z$, etc.). Lo mismo ocurrirá con las implicaciones inversas. En cuanto a las afirmaciones y negaciones de p ó de q, no son más que semi-implicaciones directas o inversas.

No existe pues sino un sólo y amplio agrupamiento de las operaciones de la lógica bivalente, sus diferentes formas no son pues sino sub-agrupamientos. Comparado a los agrupamientos de clases y de relaciones, que abarca por completo y traducido en proposiciones, este agrupamiento único reúne en un solo todo las operaciones aditivas $(\vee p)$ y las multiplicativas $(. \bar{p})$, ya que la inversa de "p ó q" $(p \vee q = P + Q)$ es "ni p ni q", es decir $\bar{p} \cdot \bar{q} = \bar{P} \times \bar{Q}$. La operación idéntica general es pues $(\vee o)$ que es la idéntica de las operaciones aditivas, mientras que U que es la idéntica de las operaciones multiplicativas de clases, corresponde a la idéntica especial $(. p T = p)$, la más general de las idénticas especiales del sistema y no a, $(p . \bar{p} = o)$.

El segundo interés de este agrupamiento es el de proporcionar alguna luz sobre la no-contradicción lógica y por lo tanto hacer entrever el por qué de las dificultades de su aplicación a la no-contradicción aritmética o matemática en general.

En efecto, si la fecundidad del sistema se debe, como acabamos de verlo, a la transitividad de las implicaciones y las equivalencias, su coherencia se basa enteramente en la reversibilidad (en sus tres formas de complementariedad, reciprocidad y correlatividad, deduciéndose las dos segundas de la primera). Ahora bien, la operación in-

versa fundamental del agrupamiento (en su forma inicial A) es $p.\bar{p} = o$, es decir, el enunciado mismo del principio de no-contradicción. Por otra parte, la operación que hemos denominado "negación completa" y que se designa ordinariamente con el nombre de contradicción (o) constituye la misma expresión ($p.p = o$) pero aplicada a cuplas de proposiciones, por ejemplo:

$$[(p \cdot q)(\overline{p \cdot q})] = o \qquad \text{o} \qquad [(p \cdot q) \cdot (p \mid q)] = o$$

Se ve pues que, desde el punto de vista del agrupamiento, la no-contradicción se confunde idénticamente con la reversibilidad: *es contradictorio todo producto no nulo de operaciones en las cuales una es la inversa de la otra, y se halla exento de contradicción toda composición estrictamente reversible.*

Pero, si es así, se hace evidente que existirán diversas formas o grados de no-contradicción, correspondientes a las diferentes estructuras reversibles conocidas. Decir que un animal es a la vez invertebrado y mamífero puede ser contradictorio de un modo distinto que establecer ($n - n > o$). En efecto, la reversibilidad del agrupamiento interproposicional se basa íntegramente en la complementación: se tiene ($p.\bar{p} = o$) por que $p \vee \bar{p} = T$, y $\bar{p} = T.\bar{p}$ ó $p = T.\bar{\bar{p}}$, al igual que en lógica de clases, se tiene: ($A + A' = B$); ($A = B - A'$) y ($A' = B - A$), de donde $A \times A' = o$. La contradicción "x es a la vez mamífero e invertebrado" se basa por lo tanto simplemente en el hecho que se han repartido los animales (B) en vertebrados (A) e invertebrados ($A' = B\overline{A}$), y que al estar comprendidos los mamíferos en A y no en A', la proposición en cuestión daría ($A \times \overline{A}) > o$, ó $p.\bar{p} \neq o$. Pero, la no contradicción basada en esta reversibilidad por complementariedad, ¿basta por sí sola para dar cuenta de la no-contradicción propia de las matemáticas, es decir de una coherencia basada en formas de reversibilidad mucho más estructuradas? Es lo que investigaremos en el capítulo VIII.

3º Esto nos conduce al tercer aspecto interesante que presenta el agrupamiento de las operaciones interproposicionales bivalentes. La existencia de dicho agrupamiento total demuestra, en efecto, de la manera más decisiva (a causa precisamente de su carácter completo), que la lógica bivalente de proposiciones se basa exclusivamente en las relaciones de parte a todo (implicaciones simples o intersecciones) y de complementariedad, es decir, de las partes entre sí pero por inter-

medio del todo. Tanto la reversibilidad propia del agrupamiento (complementariedad en relación a la afirmación completa), como la reciprocidad (complementariedad en relación a la equivalencia: ver teorema V del § 31) y, en consecuencia, la correlatividad misma (inversión de las recíprocas: ver teorema I del § 31) se derivan de este único principio. Tal es la gran diferencia entre la lógica bivalente y la lógica matemática, la cual admite (gracias a las correspondencias bi-unívocas cualesquiera, al principio general de recurrencia, etc.) el establecimiento de relaciones directas entre las partes y llega así a superar los límites del agrupamiento en la dirección de los grupos cada vez más complejos.

Pero, ¿no hay contradicción al oponer a los "grupos" matemáticos el "agrupamiento" propio de las relaciones lógicas de parte a todo, si las operaciones $(p \mathrm{w} q)$ y $(p = q)$ constituyen por sí solas grupos y el sistema de inversiones, reciprocidades y correlatividades constituye, por otra parte, un verdadero "grupo de transformaciones"? No, porque la operación (w) no conduce a la construcción de un grupo más que a condición de separar de sus inclusiones o implicaciones las partes no comunes para unirlas directamente entre sí: lo que significa pues que el grupo de disyunciones exclusivas (w) no puede derivarse del agrupamiento de disyunciones simples (v) más que a condición de separar precisamente las idénticas especiales $(p \vee p)$ necesarias para los encajes lógicos y que distinguen el agrupamiento de los grupos. En cuanto a las equivalencias, al ser cada equivalencia $p = q$ a la vez la operación directa, inversa e idéntica del grupo $p = q = r = \ldots$, se deduce que si se tienen dos equivalencias distintas, por ejemplo $p = q$ y $s = t$, pero $(p \neq s)$, el pasaje de una de dichas equivalencias a la otra no será ya una equivalencia: el grupo de las equivalencias se refiere pues sólo a la relación más general, relación común a la lógica y a las matemáticas, pero no a las operaciones que permiten construir las equivalencias y distinguir sus diversas variedades. Por lo tanto, si el grupo de equivalencias expresa el aspecto más general del agrupamiento, es a condición precisamente de eliminar de él las partes no-comunes (w), del mismo modo que el grupo de las exclusiones elimina las partes comunes. Así, subsiste la oposición entre el agrupamiento de conjunto de las operaciones lógicas, que reúne en un solo todo las partes comunes y las partes no comunes del sistema llevando a los encajes como tales, y los grupos (w) y

(=) que abstraen del agrupamiento dos tipos de relaciones para considerarlas aparte: sólo su conexión indisociable ($p \text{ w } q = x$) les confiere, en efecto, una significación lógica al subordinar las partes disyuntas ($p \text{ w } q$) al todo ($= x$) que las reúne.

En cuanto al grupo de los cuatro operadores de inversión, reciprocidad, correlatividad e identidad, resulta, como acabamos de verlo, del hecho que dichos operadores son considerados en sí mismos independientemente de las demás operaciones del agrupamiento. Es decir, que las operaciones interproposicionales elementales ($\vee$; $\supset$; $*$; etc.) sobre las que se realizan las transformaciones, no son consideradas más que respecto de sus distintas relaciones de inversión (N, R y C) y no de reunión.

Dado desde el comienzo (ver § 39, A, en 7 *bis*), con el cuaterno de operaciones ($\vee\, p$); ($.\, \bar{p}$); ($\vee\, \bar{p}$) y ($.\, p$), dicho grupo consiste, en efecto, no en utilizar estas últimas en tanto tales, como lo hacen los operadores de reunión del agrupamiento, sino en transformarlas unas en otras. Constituye pues no la fuente sino el mecanismo regulador del agrupamiento, respecto del cual representa el factor de movilidad por oposición a los encajes en tanto tales: al disociar las complementariedades mismas (inversiones y reciprocidades) de los encajes que las fundamentan, marca la frontera entre las relaciones de parte a todo y las relaciones directas entre las partes. Se distinguen así, en el seno mismo del agrupamiento, dos aspectos distintos pero indisociables en dicha estructura elemental: el aspecto de la reversibilidad, origen del grupo, y el aspecto de los encajes, origen de las "idénticas especiales". Pero, si bien existen grupos a nivel de la lógica pura, no bastan para abarcar a esta en su totalidad, ya que permanecen subordinados a las relaciones de parte a todo y de complementariedad. Es esto lo que explica a la vez la autonomía y los límites de la lógica bivalente. Su autonomía, ya que el agrupamiento se basta a sí mismo en tanto teoría de las relaciones entre las partes y el todo. Pero, también sus límites, ya que los razonamientos matemáticos se basan en estructuras de grupo mucho más complejas, y en particular el famoso razonamiento por recurrencia no puede reducirse a las únicas relaciones que supone una teoría de las relaciones entre las partes y el todo, sino que debe ser explicado en función de una teoría que fundamente las relaciones entre las partes mismas.

CAPITULO VII

LA CUANTIFICACION DE LAS OPERACIONES INTERPROPOSICIONALES Y LA SILOGISTICA CLASICA

¿Las operaciones de la lógica proposicional implican la cantidad o son independientes de toda cuantificación? Es interesante, a fin de poder decidirlo, echar una ojeada retrospectiva a sus relaciones con la lógica de clases, así como determinar las que sostiene con la silogística misma, ya que esta última constituye una teoría intermedia entre la lógica de clases y la de proposiciones.

§ 41. LOGICA BIVALENTE Y LOGICA DE CLASES.

En el curso de los capítulos V y VI hemos podido constatar la total autonomía de la lógica proposicional respecto de la de las operaciones intraproposicionales. No obstante, la lógica interproposicional admite la realización de un modelo constituido por las operaciones que conducen a un sistema de clases "débilmente estructuradas" (ver especialmente los § 28 y 32), y el "agrupamiento" de las operaciones interproposicionales obedece a las mismas leyes que los "agrupamientos" de clases y de relaciones. ¿Cómo explicar entonces semejante situación?

Las operaciones intraproposicionales consisten en acciones reversibles de clasificación y seriación ejercidas por el sujeto sobre los objetos y expresadas a través de proposiciones de un contenido determinado: es este "contenido" (ver § 2), o estructura interna de las proposiciones, el que es simbolizado bajo la forma de operaciones de clases y de relaciones. Por el contrario, las operaciones interproposicionales consisten en abstraer ciertos aspectos de dichas operaciones,

a saber, sus conexiones de verdad o falsedad, sin preocuparse de su estructura particular, es decir, del contenido de las proposiciones intervinientes. De lo que resultan nuevas operaciones que tienen como objeto general las proposiciones mismas y no ya los objetos a que estas se refieren: pero como las proposiciones constituyen, por otra parte, (en su contenido), operaciones, las operaciones interproposicionales son por lo tanto operaciones efectuadas sobre otras operaciones, es decir operaciones a la segunda potencia. El problema es entonces comprender cómo estas operaciones a la segunda potencia pueden alcanzar una autonomía completa, pese a admitir la realización de un modelo formado por estructuras de clases (u operaciones a la primera potencia).

La respuesta a esta doble cuestión está en el hecho que las operaciones interproposicionales constituyen una formalización de elementos abstraídos de las operaciones intraproposicionales mismas: al ser más "abstractas" que estas desarrollan, en efecto, un mecanismo más general y más profundo; pero al estar abstraídas de aquellas suponen la posible realización de un modelo isomorfo al del campo de su punto de partida concreto.

Para construir, por ejemplo, las grandes clases zoológicas, importa admitir en primer lugar como verdaderas (independientemente del origen epistemológico de dichas verdades) un conjunto de proposiciones que establezcan las semejanzas y las diferencias, las homologías (en sentido anatómico), etc., entre los términos clasificados. El punto de partida de toda operación lógica debe pues buscarse en una acción del sujeto, fuente de comparación o de asimilación y consistente en reunir u ordenar los objetos. De esta acción psicológica la lógica no retiene más que la expresión simbólica, en la forma de una proposición o juicio verbal: la proposición es pues anterior a la clase y a la relación, como el juicio es anterior a los conceptos que engendra, o como la acción en general es anterior a sus resultados. Pero las proposiciones no son consideradas en primer lugar más que en función de su contenido: en tanto tales caracterizan precisamente los términos individuales, sus relaciones y sus clases. Sea una especie A incluida en un género B y otras especies A' tales que $A \cup A' = B$ y $A = B - A'$: cada una de estas clases o de estas operaciones resulta de un juego de relaciones o acciones enunciadas por proposiciones en vista precisamente de dicha clasificación. El hecho que ahora esas mismas proposiciones sean consideradas simplemente en tanto afirmaciones

verdaderas y sus negaciones en tanto que afirmaciones falsas, implica que un nuevo sistema de operaciones se ha hecho entonces posible. No se tratará ya de términos individuales, de relaciones o de clases: las proposiciones en cuestión serán las mismas, o todas aquellas que hubieran podido enunciarse a propósito de las clases $A + A' = B$, de los individuos que las constituyen, de las relaciones que las unen o que las ligan a las clases vecinas, etc., pero no será retenido de cada una de dichas proposiciones más que su verdad o su falsedad. Dicho de otro modo, del conjunto de acciones de comparación y de clasificación ejecutadas por el sujeto, no será extraído más que su carácter más general: el acto por el cual cada operación concreta enunciada por una proposición es reconocida como verdadera o falsa. Es esta abstracción a partir de las acciones anteriores del sujeto la que sirve de punto de partida a un nuevo cálculo: cierto número de proposiciones p, q, etc., dadas como verdaderas para ciertos argumentos x (p = "x es un pez", q = "x es un vertebrado", etc.) y falsas ($\bar{p}$, $\bar{q}$), para otros argumentos, se trata entonces de combinar simplemente las cuplas $(p.q)$; $(p.\bar{q})$; $(\bar{p}.q)$; $(\bar{p}.\bar{q})$ o los conjuntos de tres o cuatro proposiciones, etc., sin preocuparse de otra cosa más que de la verdad o falsedad de sus asociaciones posibles. Se comprende entonces cómo este nuevo cálculo puede ser a la vez autónomo en relación al contenido de las proposiciones consideradas y no obstante isomorfo al cálculo de clases mismo.

La autonomía del cálculo interproposicional resulta en primera instancia de su mayor abstracción. Consideremos una cupla $(p.q)$ formada por dos proposiciones supuestas verdaderas: esta cupla puede ser ella misma verdadera o falsa en tanto cupla: en el caso que p = "x_1 es un pez" y q = "x_1 es un vertebrado", la cupla $(p.q)$ es verdadera, pero si p = "x_1 es un insecto", la cupla $(p.q)$ será falsa, es decir $(\overline{p.q})$. La lógica proposicional no las agrupará solamente a fin de constituir reuniones concretas verdaderas correspondientes a clases no nulas y positivas, sino que determinará todas las asociaciones verdaderas o falsas, a fin de deducir la estructura abstracta. La lógica interproposicional se propone así abstraer la forma pura (disposiciones verdaderas o falsas) de las proposiciones preliminares necesarias para la construcción de las clases y de las relaciones. Hay pues allí una primera razón que explica su autonomía respecto del cálculo intraproposicional: no depende de este, ya que

explícita simplemente lo que aquel supone desde el comienzo. A lo que se agrega una segunda razón: la extensión de dicho proceso de abstracción llega a una generalidad cada vez mayor; las cuplas $(p.q)$; $(p.\bar{q})$; etc., consideradas en sí mismas como verdaderas o falsas, no son ya la expresión de clases o relaciones particulares, sino que representan un esquema general aplicable a cualquier sistema de clases o de relaciones. El cálculo proposicional constituye pues un conjunto de operaciones a la segunda potencia que conduce a operaciones de una escala inferior. De ahí una segunda razón de su autonomía.

Pero, ¿por qué es isomorfo a las operaciones de clases, y por qué, por ejemplo, la operación $(A \cup A' = B)$ corresponderá a la equivalencia $(p \vee p' \leftrightarrow q)$ así como $p \rightarrow q$ es extraído de la inclusión $(A \subseteq B)$? Es que si, por una parte, es posible hacer corresponder a todo sistema de operaciones intraproposicionales un sistema de proposiciones vacías de su contenido y consideradas simplemente como combinaciones de valores (1) y (0), del mismo modo es posible hacer corresponder a todo sistema de operaciones interproposicionales clases de argumentos hipotéticos que verifican o no las proposiciones p ó q. Estas clases de argumentos hipotéticos (clases P ó Q) tendrán entonces, en virtud de la misma reciprocidad de los dos sistemas, una estructura formal isomorfa a la de las clases de objetos concretos a que conducen las proposiciones iniciales consideradas desde el punto de vista de su contenido. Pero no serán ya necesariamente clases de objetos: serán clases de clases, es decir, esquemas de afirmaciones posibles o clases de argumentos virtuales. Puede ser naturalmente que las clases P y Q coincidan con clases de objetos reales. Pero puede ser también que no contengan sino posibles reuniones de individuos. Desde el punto de vista de las clases concretas es evidente que una clase formada por "algunos hombres" (A) está incluida en la clase formada por "todos los hombres" (B): es decir $(A \subseteq B)$. Desde el punto de vista interproposicional debe decirse, por el contrario, que la proposición $p =$ "todos los hombres son mortales" implica la proposición $q =$ "algunos hombres son mortales": se tiene pues $(p \rightarrow q)$ y no la inversa $(q \rightarrow p)$. Si se le hace corresponder entonces a p la clase P (= al conjunto de casos que verifican p) y a q la clase Q (= al conjunto de casos que verifican q), se tendrá $(P \subseteq Q)$. Se ve así que $(P \subseteq Q)$ no coincide de ningún modo con $(A \subseteq B)$. La clase P no contiene, en efecto, más que un conjunto concreto de

argumentos, que es "todos los hombres" (= los individuos que pertenecen a B); por el contrario, la clase Q contiene una multiplicidad de argumentos posibles: si "todos los hombres" son 4 "algunos hombres" pueden ser los nos 1 y 2; 1 y 3; 1 y 4; 2 y 4; 3 y 4; 1, 2 y 3; 1, 2 y 4; etc. Es decir, si P corresponde a una clase entera de individuos (B), la clase Q corresponde a todas las sub-clases que es posible construir en su interior (sea A_1 y A'_1; A_2 y A'_2; etc.). Se ve bien pues que ($P \subseteq Q$) corresponde a ($p \rightarrow q$), pero que la extensión de P y de Q no coincide con la de las clases A y B.

En síntesis, entre el doble exceso de una separación total de la lógica proposicional respecto de la de las operaciones intraproposicionales, y su fusión completa con la lógica de clases, es posible sostener simultáneamente la autonomía de la primera y su correspondencia con las operaciones de clases admitidas por ella como posible modelo. De lo que resulta entonces que la lógica de proposiciones bivalentes contiene, a título de caso particular, la silogística clásica, la cual se basa precisamente en un esquema de cuantificación extraído de la lógica de clases.

§ 42. LA SILOGISTICA CLASICA Y LA CUANTIFICACION DE LAS PROPOSICIONES.

Si lo propio de la lógica bivalente es el hecho de no implicar más que relaciones de parte a todo y de complementariedad, como lo atestiguan su estructura de agrupamiento, así como su correspondencia con un modelo de operaciones de clases, debe implicar entonces las nociones del "todos" y el "algunos", pese a que las proposiciones p, q, etc., de las cuales se ocupa permanezcan cualesquiera y no se hallen explícitamente cuantificadas del modo en que procede la lógica clásica. Ahora bien, la discusión de esta cuestión no es sólo interesante a título de verificación de la naturaleza puramente "intensiva" (ver definición 14) del agrupamiento de las operaciones interproposicionales. Ella encierra un problema más general (el único que nos interesa en este capítulo): ¿la cantidad concierne sólo al "contenido" de las proposiciones en juego, o interviene también necesariamente en la "forma" misma de las operaciones interproposicionales?

Se sabe en efecto, que la lógica de Aristóteles constituye un compromiso entre la lógica de clases y la de proposiciones por el hecho

de introducir precisamente la consideración del "todos" y el "algunos" en el formalismo mismo de las combinaciones de proposiciones. La lógica contemporánea, por el contrario, disocia el cálculo proposicional de toda cuantificación, para reservar esta al cálculo de las extensiones (clases), pero Russell ha introducido la noción de función proposicional (ver § 4) a título de nexo entre ambas: las funciones proposicionales pueden ser, en efecto, "siempre" verdaderas, o "a veces" o "jamás", lo que une la cantidad propia de las clases con la verdad o falsedad propias de las proposiciones. Del mismo modo, en general, es en términos de funciones proposicionales como se introduce con Russell la lógica aristotélica en lenguaje logístico[1]. Hilbert adopta un formulario intermedio entre el cálculo de predicados y el de proposiciones.

Nosotros quisiéramos, por el contrario, mostrar en lo que sigue que las operaciones interproposicionales implican en sí mismas, desde un primer momento, una cuantificación en relación a su forma en tanto tal y no a su contenido. Ahora bien, esta cuantificación formal, o relativa a la forma sola, basta para constituir un esquema general en el cual la silogística puede ser considerada como un caso particular. No nos proponemos de ningún modo volver a hacer aquí la teoría logística del silogismo, la cual ha sido bien extensamente tratada[2], sino únicamente considerar la silogística como un modelo particular al cual es posible hacerle corresponder las estructuras cuantificantes de la lógica proposicional (en el mismo sentido que acabamos de verlo en el § 41 respecto de su correspondencia con una estructura de operaciones de clases).

Se sabe, en efecto, que la lógica clásica distingue cuatro tipos de proposiciones:

A. La universal afirmativa: todo X es Y.
I. La particular afirmativa: algún X es Y.
E. La universal negativa: ningún X es Y.
O. La particular negativa: algún X no es Y.[3]

1 Serrus, 1945, cap. X.
2 Bochenski, 1948.
3 Estas proposiciones se escriben como sigue en la lógica de predicados:

A. $(\forall x)(ax \supset bx)$ E. $(\forall x)(ax \supset \bar{b}x)$
I. $(\exists x)(ax \cdot bx)$ O. $(\exists x)(ax \cdot \bar{b}x)$

Una proposición se llama universal cuando es afirmada respecto de toda la extensión del sujeto, ya sea este singular, especial o general: todo X es Y puede pues significar: "el individuo x_1 es Y" (proposición siempre verdadera) o "todos los x son Y" (*ídem*). Lo que expresa la universal afirmativa es pues simplemente, que el atributo Y es de una extensión igual o superior a la del sujeto y que este se halla tomado en toda su extensión.

Ahora bien, existe una relación del mismo tipo cuando se establece como verdadero el condicional $(p \supset q)$. En efecto, sea cual sea la naturaleza de las proposiciones p y q (es decir, que p ó q pertenezcan a las categorías A, I, E u O), la implicación $(p \rightarrow q)$ excluye la posibilidad $(p.\bar{q})$: por lo tanto, "todas las veces" que, en una relación $(p \rightarrow q)$, p es verdadera, q es verdadera. A la proposición p corresponde así una clase de argumentos tomada en toda su extensión, de otro modo no podría excluirse $(p.\bar{q})$. Por otra parte, q corresponde a otra clase de extensión igual o superior, ya que se tiene siempre $(p.q)$ y eventualmente $(\bar{p}.q)$. Por ejemplo, si $p =$ "algunos animales han sido importados de Europa en Australia" y si $q =$ "la fauna australiana no es puramente autóctona", p es una particular afirmativa (I) y q una universal negativa (E): no obstante la relación $(p \rightarrow q)$ corresponde a una inclusión $(P \subseteq Q)$ que significa que todos los argumentos que verifican p verifican también q (pero no recíprocamente) y esta inclusión se traduce por una universal afirmativa. Incluso en el caso que p signifique "todos los hombres son mortales" y q "algunos hombres son mortales", la clase de argumentos que verifican Q es de extensión superior a la clase de argumentos que verifican P, ya que un conjunto es de extensión inferior a la del conjunto de sus partes (ver en § 41 la discusión de este ejemplo). En síntesis, la implicación supone una cuantificación por su "forma" misma, ya que q es "siempre" verdadero cuando p es verdadero, y p es "a veces" verdadero cuando q es verdadero. Esta cuantificación intensiva corresponde a la de la inclusión $P \subseteq Q$, que expresa la universal afirmativa.

De una manera análoga establezcamos que el condicional $(p \supset \bar{q})$ es "siempre" verdadero, es decir que $\vdash p \supset \bar{q}$. En dichas condiciones, a la implicación $p \rightarrow \bar{q}$ corresponderá la relación $P \subseteq \bar{Q}$, es decir la universal negativa (E).

En cuanto a las dos particulares, la afirmativa (I) y la negativa (O), basta recordar que se hallan ligadas a dos universales de la manera siguiente:

No-A equivale a O
No-E equivale a I.

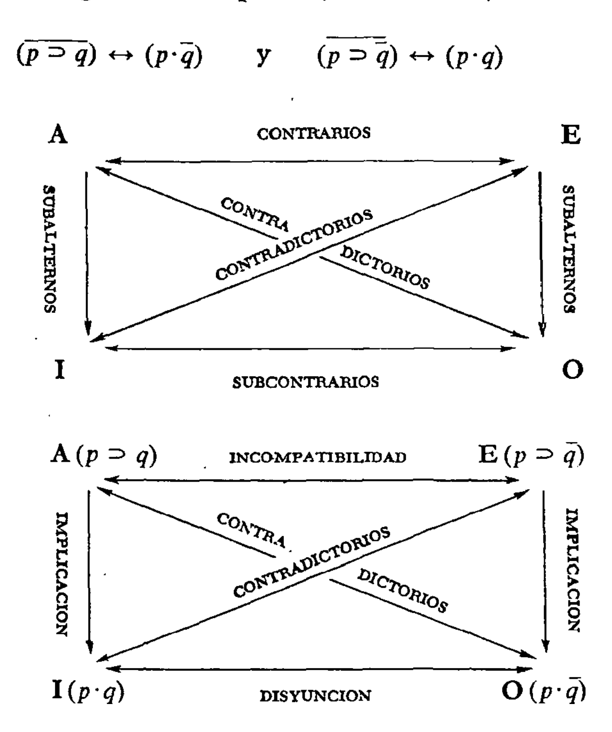
Por otra parte, ya que

$$\overline{p \supset q} \leftrightarrow p \cdot \bar{q} \qquad \text{y} \qquad \overline{p \supset \bar{q}} \leftrightarrow p \cdot q$$

se podrá hacer corresponder a (O) la relación que existe entre p y q cuando se tiene $\vdash p \cdot \bar{q}$, y a (I) la relación que existe entre p y q cuando se tiene $\vdash p \cdot q$. Se llega así a un esquema general correspondiente al modelo particular que constituye la famosa tabla de oposiciones de la lógica clásica (cuadrado lógico) (ver esquema de la página siguiente).

Los cuatro tipos de relaciones (contradictorios, subalternos, contrarios y subcontrarios), equivalen desde este punto de vista a las siguientes operaciones interproposicionales: 1º Los contradictorios corresponden a las negaciones completas (contradicción):

$$(\overline{p \supset q}) \leftrightarrow (p \cdot \bar{q}) \qquad \text{y} \qquad (\overline{p \supset \bar{q}}) \leftrightarrow (p \cdot q)$$



2º Los subalternos son implicaciones de "todos" a "algunos": $(p \supset q) \rightarrow (p.q)$ y $(p \supset \bar{q}) \rightarrow (p.\bar{q})$. En efecto, "todos los *P* son *Q*" implica "algunos *P* son *Q*", pero la recíproca no es verdadera, ya que la conjunción $(p.q)$ no excluye por sí sola $(p.\bar{q})$; igualmente $(p \supset \bar{q})$ implica $(p.\bar{q})$ pero $(p.\bar{q})$ no implica $(p \supset \bar{q})$, ya que $p.\bar{q}$ es compatible con $(p.q)$. 3º Las proposiciones contrarias *A* y *E* corresponden a la relación de incompatibilidad que existe entre $(p \supset \bar{q})$ y $(p \supset q)$. 4º Las relaciones subcontrarias corresponden finalmente a la relación de disyunción $(p \vee q)$: "Dos subcontrarias pueden ser ambas verdaderas, ya que lo que se afirma de algunos sujetos del grupo puede ser negado de otros; pero no pueden ser ambas falsas, ya que el rechazo de una de ellas equivale a la aserción contradictoria, que encierra *a fortiori* la subcontraria"[1]. Ahora bien, es la propia definición de la disyunción $(p \vee q) \leftrightarrow (p.q) \vee (p.\bar{q}) \vee (\bar{p}.q)$, la que une dos proposiciones p y q de las cuales una puede ser falsa, pero no ambas.

Se constata así que: por su forma misma, ciertas operaciones inherentes al puro cálculo de proposiciones encierran una cuantificación intensiva, conforme al "todos" y al "algunos" que la lógica clásica había puesto en el punto de partida de su desarrollo. Ahora bien, ello no tiene nada de sorprendente, ya que la implicación, la incompatibilidad y la disyunción corresponden a formas bien determinadas de encajes de clases (§ 41). Por la misma razón, se comprende mal la objeción de Hilbert según la cual sólo un cálculo combinado de proposiciones y predicados es susceptible de dar cuenta de dichos encajes cuantitativos. Si *X* significa "ser bello", dice Hilbert[2], entonces *X* puede significar ya sea "todos los objetos son no bellos", o bien "es falso que todos los objetos sean bellos". Pero, si en lugar de razonar sobre una proposición predicativa aislada, se considera la implicación $(p \rightarrow q)$ (= "si x_1 es un objeto entonces es bello"), es fácil distinguir $(p \supset q)$, es decir $(p.\bar{q})$ (= "es falso que objeto implique bello", = "es cierto que algunos objetos no son bellos") y $(p \mid q)$, es decir $(p \rightarrow \bar{q})$ (= "todos los objetos son no bellos"). La forma misma de las operaciones interproposicionales $(p.\bar{q})$ y $(p \supset \bar{q})$, en las que la primera contiene una negación más débil que la segunda, supone así una cuantificación implícita, independientemente del cálculo

1 Goblot, 1918, pág. 212.
2 Hilbert-Ackermann, 1949, pág. 40.

de predicados. Es lo que, por otra parte, Hilbert mismo parece enseguida admitir.

§ 43. LAS FIGURAS Y LOS MODOS DEL SILOGISMO.

El silogismo consiste en extraer una conclusión de dos proposiciones elegidas como premisas, dicho de otro modo, en relacionar tres proposiciones. Ahora bien, las relaciones posibles de tres proposiciones son 256, mientras que la silogística clásica distingue 19 modos legítimos, consistentes en combinar en un orden variado (= las cuatro figuras) las proposiciones de los tipos A, E, I y O, según todas las combinaciones concluyentes (= los modos autorizados entre las 64 disposiciones posibles para cuatro proposiciones tomadas tres a tres). Además de estos 19 modos clásicos (de los cuales 14 se deben a Aristóteles y 5 a Galeno, los de la cuarta figura), existen 5 modos concluyentes agregados por Teofrasto a la primera figura de Aristóteles (y entrevistos por el mismo Aristóteles [2]), designados a menudo con el nombre de modos indirectos (Baralipton, Celantes, Babitis, Fapesmo y Frisesomorum).

Es pues interesante preguntarse a qué se debe esta limitación de la silogística clásica. ¿Se deberá esto al hecho que la silogística se atiene a las relaciones del "todos" y el "algunos", mientras que la lógica bivalente de proposiciones ignora esa condición restrictiva? Si esta opinión, que es corriente, fuese justificada, implicaría la negación de la hipótesis sostenida en el parágrafo precedente. O bien se deberá, por el contrario, simplemente que, a falta de un simbolismo abstracto y de una técnica suficiente del cálculo de las operaciones inversas y recíprocas, por lo tanto, a falta de una reversibilidad bastante general, la silogística se haya limitado al análisis de ciertas relaciones sin descubrir el conjunto de las que es posible construir a partir de sus combinaciones. En este caso, la misma estructura cuantitativa (intensiva) sería común a la silogística clásica y al cálculo general de proposiciones.

Examinemos pues desde este punto de vista, las figuras y los modos del silogismo preguntándonos a qué relaciones triproposicionales corresponden si se admiten las correspondencias indicadas en el § 42.

1 Bochenski, 1947.

La primera figura, llamada también figura perfecta, es aquella en que el término medio desempeña el papel de sujeto en la mayor y de predicado en la menor. De ahí los cuatro modos válidos AAA, EAE, AII y EIO. Si designamos por r la proposición que contiene el término mayor (por ejemplo "x_1 es mortal"), q la que comprende el término medio (por ejemplo, "x_1 es hombre") y p la que comprende el término menor[1] (por ejemplo, "x_1 es Sócrates"), se tiene entonces:

(326)[2]

$$\begin{aligned}
&\text{AAA} \rightarrow [(q \supset r)\cdot(p \supset q)] \supset (p \supset r)\\
&\text{EAE} \rightarrow [(q \mid r)\cdot(p \supset q)] \supset (p \mid r)\\
&\text{AII} \rightarrow [(q \supset r)\cdot(p\cdot q)] \supset (p\cdot r)\\
&\text{EIO} \rightarrow [(q \mid r)\cdot(p\cdot q)] \supset (p\cdot \bar{r})
\end{aligned}$$

La segunda figura atribuye al término medio el papel de predicado en las dos premisas, de ahí el esquema rq, pq y pr:

(327)

$$\begin{aligned}
&\text{EAE} \rightarrow [(r \mid q)\cdot(p \supset q)] \supset (p \mid r)\\
&\text{AEE} \rightarrow [(r \supset q)\cdot(p \mid q)] \supset (p \mid r)\\
&\text{EIO} \rightarrow [(r \mid q)\cdot(p\cdot q)] \supset (p\cdot \bar{r})\\
&\text{AOO} \rightarrow [(r \supset q)\cdot(p\cdot \bar{q})] \supset (p\cdot \bar{r})
\end{aligned}$$

En la tercera figura el término medio desempeña el papel de sujeto en las dos premisas, es decir: qr, qp y pr:

(328)

$$\begin{aligned}
&\text{AAI} \rightarrow [(q \supset r)\cdot(q \supset p)] \supset (p\cdot r)\ ^{3}\\
&\text{IAI} \rightarrow [(q\cdot r)\cdot(q \supset p)] \supset (p\cdot r)\\
&\text{AII} \rightarrow [(q \supset r)\cdot(q\cdot p)] \supset (p\cdot r)\\
&\text{EAO} \rightarrow [(q \mid r)\cdot(q \supset p)] \supset (p\cdot \bar{r})\ ^{3}\\
&\text{OAO} \rightarrow [(q\cdot \bar{r})\cdot(q \supset p)] \supset (p\cdot \bar{r})\\
&\text{EIO} \rightarrow [(q \mid r)\cdot(q\cdot p)] \supset (p\cdot \bar{r})
\end{aligned}$$

1 Llamaremos término mayor el predicado de la conclusión, el término menor será el sujeto de la conclusión y el término medio el término que une al mayor en la premisa mayor y al menor en la premisa menor.

2 Notamos sistemáticamente las relaciones entre las proposiciones con ayuda del operador que las engendra.

3 Este modo, rechazado por los lógicos clásicos, exige para ser concluyente una premisa de existencia suplementaria.

Finalmente, en la cuarta figura el término medio es predicado en la mayor y sujeto en la menor:

$$
\begin{array}{lll}
\text{(329)} & \text{AAI} \rightarrow [(r \supset q)\cdot(q \supset p)] \supset (p\cdot r)\ ^{1} \\
& \text{AEE} \rightarrow [(r \supset q)\cdot(q \mid p)] \supset (p \mid r) \\
& \text{IAI} \rightarrow [(r\cdot q) \cdot(q \supset p)] \supset (p\cdot \bar{r}) \\
& \text{EAO} \rightarrow [(r \mid q)\cdot(q \supset p)] \supset (p\cdot \bar{r})\ ^{1} \\
& \text{EIO} \rightarrow [(r \mid q)\cdot(q\cdot p)] \supset (p\cdot \bar{r})
\end{array}
$$

Se ve así que los 19 modos clásicos pertenecientes a las cuatro figuras posibles, corresponden todos a combinaciones interproposicionales definidas, pese a que varios de ellos no sean distintos entre sí. Se trata entonces, en primer lugar, de precisar el sentido de esta correspondencia. El silogismo es un esquema de razonamiento que recurre al *contenido* (definición 4) de las proposiciones relacionadas entre sí, es decir, a un encaje de clases tomadas en extensión (o de predicados en comprensión) y a un encaje expresado por la sola cópula "es" (pertenencia o inclusión). Como tal, la silogística se halla pues doblemente limitada.

Lo está en primera instancia por la naturaleza de la cópula elegida, ya que toda la lógica de relaciones niega la unicidad de dicha cópula.

Por otra parte, dado que el silogismo es un razonamiento intraproposicional, las clases, respecto de las cuales las proposiciones unidas por el silogismo expresan los encajes, son clases concretas: sus elementos son objetos y constituyen así más o menos directamente un "contenido extra-lógico" (definición 6). Por el contrario, las proposiciones, cuyas relaciones con los silogismos acabamos de mostrar sus correspondencias, son absolutamente cualesquiera respecto a su contenido, es decir a su estructura intraproposicional, y sus relaciones no son verdaderas o falsas más que en función de su forma interproposicional. A cada una de dichas proposiciones elementales puede hacérsele corresponder así una clase de argumentos que la verifiquen, pero estas clases P, Q, R no son ya clases de objetos: son clases de clases equivalentes desde el punto de vista de sus relaciones generales. Decir que el razonamiento $[(q \supset r).(p \supset q)] \supset (p \supset r)$ corresponde al silo-

1 Este modo, rechazado por los lógicos clásicos, exige para ser concluyente una premisa de existencia suplementaria.

gismo en Bárbara, es decir pues simplemente que mediante inclusiones de clases $Q \subseteq R$ y $P \subseteq Q$, clases cuyos elementos son todos los argumentos que verifican $(q \supset r).(p \supset q)$, es posible construir un silogismo en Bárbara; y que, recíprocamente, puede expresarse todo silogismo en Bárbara en la forma: $[(q \supset r)\cdot(p \supset q)] \supset (p \supset r)$.

Lo que no equivale de ningún modo a decir que la relación interproposicional en cuestión constituya en sí misma un silogismo AAA. En efecto, las clases P, Q y R, construidas en función de p, q y r, no se limitan a incluir todas las clases que puedan relacionarse por medio de silogismos en Bárbara (lo que atribuiría de por sí a estas clases P, Q y R extensiones considerables), sino las clases de todos los argumentos que verifican la estructura

$$[(q \supset r)\cdot(p \supset q)] \supset (p \supset r),$$

sean cuales sean el contenido y la cuantificación de las proposiciones p, q y r. La correspondencia entre las operaciones interproposicionales enumeradas y los 19 modos clásicos del silogismo es pues muy indirecta: resulta tan sólo muy interesante constatar que existe, y que el solo juego de las proposiciones de forma $(p \supset q)$; $(p \mid q)$; $(p.q)$ y $(p.\bar{q})$ basta para dar cuenta de las combinaciones que caracterizan la cuantificación (A, E, I, O) característica del silogismo.

Pero, si dicha correspondencia existe ¿por qué la lógica clásica se atuvo sólo a los 19 modos (o 24 con los modos indirectos), sin ocuparse de las 256 combinaciones que es posible construir con 3 proposiciones? ¿Es porque sólo las relaciones $(p \supset q)$; $(p \mid q)$; $(p.q)$ y $(p.\bar{q})$ admiten el "todos" y el "algunos" o se deberá por el contrario a la falta de una técnica deductiva suficiente? Examinemos desde este punto de vista las conversiones o transformaciones de un modo en el otro.

Junto al silogismo, la lógica clásica distingue las "inferencias inmediatas" algunas de las cuales resultan de la tabla de "oposiciones" que hemos recordado en § 42 y las demás de las diversas formas de "conversiones". Ahora bien, las conversiones llevan, por su parte, a ciertos desarrollos de la implicación y de las reciprocidades. Así, la conversión simple entre dos universales negativas $(p \mid q) \leftrightarrow (q \mid p)$ —"ningún hombre es inmortal" = "ningún inmortal es hombre"— supone la doble implicación $(p \supset \bar{q})$ y $(q \supset \bar{p})$, mientras que la conversión simple entre particulares afirmativas $(p\cdot q) \leftrightarrow (q.p)$ —"algu-

nos vertebrados son ovíparos'' = ''algunos ovíparos son vertebrados''– es una equivalencia entre conjunciones o implicaciones: $(\overline{p \supset \bar{q}}) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow (\overline{q \supset \bar{p}})$. La conversión por limitación –''Todos los pájaros son vertebrados = algunos vertebrados son pájaros'' conduce a disociar $(p \supset q)$ en $(p \cdot q)$ y $(\bar{p} . q)$, y la contraposición $(p \supset q) \leftrightarrow (p \mid \bar{q})$ –''no-vertebrado excluye pájaro''– conduce a una traducción de la implicación en incompatibilidad o, lo que equivale a lo mismo, en extraer $(\bar{q} \supset \bar{p})$ de $(p \supset q)$ ya que $(p \supset q) \leftrightarrow (\bar{q} \supset \bar{p}) \leftrightarrow (p \mid \bar{q})$.

De lo que resultan las transformaciones que permiten pasar de una figura a otra o incluso de un modo al otro de la misma figura. Estas transformaciones consisten, para Aristóteles, en reducir las figuras II y III a la primera, considerada como la única perfecta. Se transformaron así en una verdadera combinatoria, en la que se interesó Leibniz generalizando en especial el tipo de reducción consistente en reemplazar la mayor por la negación de la conclusión (su contradictoria).

Ahora bien, el examen de estas transformaciones, a través de las cuales la silogística manifiesta lo mejor de su naturaleza operatoria, muestra que su verdadera diferencia con la lógica bivalente de proposiciones no se refiere al papel desempeñado por la cuantificación, sino simplemente a una falta de generalización en lo que concierne en particular a las operaciones multiplicativas y la reversibilidad.

En efecto, sólo las transformaciones llamadas ''directas'' consisten en permutar las premisas (operación simbolizada por la letra *m*, por ejemplo en Ca*m*enes y Ca*m*estres, reducibles a Celarent), en convertir simplemetne (símbolo *s* en Camestre*s*, en que la primera *s* indica la posibilidad de una conversión simple de la menor y la segunda *s* la de una conversión de la conclusión), o por limitación (símbolo *p*, por ejemplo en Dara*p*ti reducible a Darii). Veamos la reducción de Camestres (AEE, figura II) en Celarent (EAE, figura I):

(330) $\{[(r \supset q) \cdot (p \mid q)] \supset (p \mid r)\} \rightarrow \{[(q \mid p) \cdot (r \supset q)] \supset (r \mid p)\}$

y la de Darapti (AAI, figura III) en Darii (AII, figura I):

(331) $\{[(q \supset r) \cdot (q \supset p)] \supset (p \cdot r)\} \rightarrow \{[(q \supset r) \cdot (p \cdot q)] \supset (p \cdot r)\}$

En cuanto a las transformaciones ''indirectas'', conciernen a los modos AOO y OAO de las figuras II y III, que no son reducibles a la primera figura sino por contraposición. Veamos un ejemplo de Ba-

roco de la figura II (la c es el símbolo de la reducción indirecta) transformada en Ferio (figura I):

$$(332) \quad \{[(r \supset q)\cdot(p\cdot\bar{q})] \supset (p\cdot r)\} \rightarrow \{[(\bar{q} \supset \bar{r})\cdot(p\cdot\bar{q})] \supset (p\cdot\bar{r})\}$$

Se ve que nada ha cambiado, salvo $(r \supset q)$ en su equivalencia $(\bar{q} \supset \bar{r})$.

Existen por otra parte, transformaciones cualesquiera consistentes no ya en reducir las figuras II y III a la I, sino en pasar indistintamente de una de las figuras a la otra. Estudiadas por Leibniz, equivalen a la construcción de nuevos silogismos obtenidos por la negación de una de las proposiciones contenidas en el silogismo inicial[1]. No intervienen pues más que operaciones del tipo $(\overline{p \supset q}) \leftrightarrow (p.\bar{q})$ ó $(\overline{p.\bar{q}}) \leftrightarrow (p \supset q)$, etc. Por ejemplo, reemplazando la menor de un silogismo por la negación de su conclusión, se obtiene un silogismo de la figura II cuya conclusión es la negación de la menor del silogismo inicial:

$$(333) \quad \{[(q \supset r)\cdot(p \supset q)] \supset (p \supset r)\} \rightarrow \{[(q \supset r)\cdot(p\cdot\bar{r})] \supset (p\cdot\bar{q})\}$$

En síntesis, las reducciones clásicas consisten en conversiones, contraposiciones y negaciones de las solas relaciones de implicación, incompatibilidad y conjunción. El carácter demasiado limitado de estas transformaciones se revela en primer lugar en la ausencia de una teoría sistemática de la reversibilidad (inversiones y reciprocidades). Se encuentra en Goblot[2] una exposición tendiente a sintetizar las distintas relaciones precedentes desde el punto de vista de lo que él llama la inversión y la reciprocidad, y que basta para revelar el desorden en que permanece la lógica usual respecto de las operaciones de inversión, a falta de un simbolismo adecuado. "Invertir una proposición, dice Goblot, es formar otra proposición que tiene por términos la negación de los términos de la primera. Si dos universales inversas son simultáneas, sus recíprocas son verdaderas. En efecto, la negación *no-p excluye q*, inversa de *p implica q*, se convierte en *q implica p*, recíproca de *p implica q*" (... etc.). De donde Goblot concluye: "la inversa y la recíproca de una universal son un solo juicio"[3]. No

1 SERRUS, 1945, pág. 168 y sig.
2 GOBLOT, 1918, pág. 240-244.
3 GOBLOT, 1918, pág. 241.

es cuestión de objetar a Goblot su terminología, ya que desgraciadamente en la actualidad cada autor se ve obligado a construir la suya. El problema es solamente saber si lo que Globlot llama "negativas", "inversas", "recíprocas" y "conversión" abarcan el conjunto de transformaciones reversibles que actúan en el caso de las tres proposiciones invocadas: $(\bar{p} \mid q)$; $(p \supset q)$ y $(q \supset p)$. Ahora bien, salta a la vista que, desde un comienzo, Goblot define sin ninguna duda la inversa y la recíproca de $(p \supset q)$ de la misma manera, ya que $(\bar{p} \mid q) \leftrightarrow [(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q}) \vee (p \cdot q) \leftrightarrow (q \supset p)$, de modo que no es sorprendente que las encuentre al fin y al cabo equivalentes. En realidad, las transformaciones reversibles que pueden efectuarse sobre $(p \supset q)$ comprenden especialmente: a) la contraposición, que deja $(p \supset q)$ idéntico a $(\bar{q} \supset \bar{p}) \leftrightarrow (p \supset q)$; la reciprocidad, que transforma $(p \supset q)$ en $(\bar{p} \supset \bar{q}) \leftrightarrow (q \supset p) = (\bar{p} \mid q)$; la inversión o negación: $\overline{(p \supset q)} \leftrightarrow (p \cdot \bar{q})$; la correlatividad que extrae $(\bar{p}.q)$ de $(p \supset q)$ (ver § 31, teorema III). En cuanto a la identidad de $(\bar{p} \supset \bar{q})$ ó $(\bar{p} \mid q)$ y de $(q \supset p)$, en la que insiste Goblot, no es sólo verdadera de las universales, sino de todas las relaciones: por ejemplo $(\bar{p} \cdot \bar{q}) \leftrightarrow \overline{(\bar{p} \supset q)}$ y $(p \cdot q) \leftrightarrow \overline{(p \supset \bar{q})}$. Es pues un verdadero "grupo de transformaciones" (ver teorema VI, § 11) lo que Goblot ha dejado escapar a su análisis, a falta de una teoría rigurosa de la reversibilidad operatoria.

Una segunda laguna esencial de la silogística se refiere a la ausencia de operaciones multiplicativas (intersección y producto de clases) del tipo $(p \vee q)$ (ver figura 21) ó $(p * q)$ (ver figura 19). Por ejemplo, Goblot afirma directamente que "no hay juicios disyuntivos" [1] con el pretexto de que una proposición formada por otras dos proposiciones ¡no constituye ya en sí misma una unidad! No obstante, la noción misma de oposiciones "subcontrarias" implica, como hemos visto (basándonos en el comentario del propio Goblot), la disyunción $(p \vee q)$. Pero la lógica clásica no ha sabido colocar en forma de relaciones $(p \vee q)$ ni sobre todo:

$$(p * q) \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$$

que no obstante abarcan también la distinción entre el "todos" y el "algunos". Es esta laguna fundamental la que explica las dificultades

1 GOBLOT, 1918, pág. 241 (§ 150). Ver también § 113.

de la silogística respecto a los modos llamados "irregulares" que le impiden llegar a la constitución de una lógica proposicional verdaderamente general.

En conclusión, la diferencia entre la lógica clásica y la de proposiciones bivalentes no radica, como pudiera haber parecido, en el rol de la cuantificación: ambas se hallan limitadas a la cantidad intensiva, la que se manifiesta en el "todos", el "algunos" y el "ninguno" de las inclusiones de clases concretas consideradas por la lógica clásica, así como por el empleo exclusivo de los encajes de parte a todo y de las complementariedades en el cálculo de proposiciones. Su diferencia esencial se refiere al carácter imperfecto del formalismo de la silogística, la cual a falta de un algoritmo abstracto que alcanzase la generalidad del puro cálculo proposicional, no ha sabido dominar ni la cuestión de la reversibilidad ni incluso la de los encajes multiplicativos. Así, el *dictum de omni et nullo,* entendido en el sentido de la subordinación necesaria de cada afirmación o negación relativa a las partes, a las afirmaciones y negaciones referentes al todo, marca los límites comunes a la lógica clásica y a la de proposiciones bivalentes, es decir en una palabra, a la lógica intensiva, respecto a la lógica matemática.

CAPITULO VIII

EL RAZONAMIENTO MATEMATICO

Al oponer a la lógica de la Escuela el "método" propio al razonamiento matemático, Descartes planteó un problema que se ha mantenido en el centro de toda la lógica moderna. Un doble movimiento, con interferencias periódicas, ha caracterizado en lo sucesivo los esfuerzos hechos para resolverlo. Inspirado por el sentimiento de la inadecuación de la silogística al razonamiento matemático, el primero de ambos movimientos se orientó hacia el logro de una mayor flexibilidad y ampliación de la lógica. Por el contrario, el segundo movimiento se esforzó por disminuir las distancias a través de una reducción inversa de la matemática a la lógica, considerando así cada nueva estructura lógica capaz de soportar todo el peso del edificio matemático. Ahora bien, esta alternancia llegó a un punto en que, las mismas cuestiones debatidas en primer lugar en el terreno de los conflictos entre el silogismo y la inducción completa, se vuelven a encontrar íntegramente en la actualidad, pero bajo la forma más general del problema de las relaciones entre la lógica y la deducción matemática.

§ 44. PLANTEO DEL PROBLEMA

Así como nadie ha objetado la aplicación efectiva de la silogística a la matemática, sino que se ha sostenido solamente la insuficiencia del silogismo para explicar en su totalidad el razonamiento matemático (y en sus aspectos más específicos), igualmente cada uno admite la utilización de la lógica en la deducción matemática: el problema reside en saber en qué consiste esta utilización y si dicha lógica basta para sostener el conjunto de las construcciones deductivas de la matemática.

Hay, en efecto, dos maneras de concebir la aplicación de un esquematismo lógico a contenidos formalizados gracias a él, respecto a los cuales representa así la parte más "general": o bien dicho esquematismo expresará simplemente lo que hay de común a todas las estructuras, ya sean matemáticas o no, pero sin dar cuenta de sus diferencias específicas sino limitándose por el contrario a los caracteres más "generales" en el sentido de la comprensión más débil; o bien, por el contrario, dicho esquematismo alcanzará la generalidad en el sentido matemático del término, es decir, la fuente de las estructuras particulares, fuente más rica, aunque más general, que las especificaciones extraídas de ella por diferenciaciones progresivas [1].

Ahora bien, hemos constatado que las estructuras propias de la lógica consisten exclusivamente en encajes (aditivos o multiplicativos) de la parte en el todo, así como en complementariedades en sus diversas formas. La lógica es pues, como la silogística clásica (y pese a las limitaciones de esta), una lógica del todo y la parte, es decir una lógica puramente "intensiva" (definición 14) que no conoce sino la cuantificación del "todos", el "algunos", el "uno" (identidad) y el "ninguno". La cuestión es pues, en apariencia, muy simple: ¿el razonamiento matemático es también reducible a las puras relaciones de parte a todo, o algunos de sus elementos esenciales desbordan ese cuadro estrecho?

Está claro que las relaciones intensivas, es decir entre la parte y el todo, y de complementariedad, se reencuentran en matemática. Pero, además de dichas relaciones intensivas intervienen inmediatamente relaciones extensivas entre las partes, que suponen las relaciones de parte a todo, pero que al mismo tiempo las superan (ver cap. IV). Es pues fácilmente comprensible que la lógica se aplique a todos los dominios de la matemática como a cualquier otro conocimiento: sólo que se trata de saber si este esquematismo de los encajes de parte a todo constituye el carácter más general a las diversas formas de inferencia en el sentido de la generalidad más rica o de la generalidad más pobre: lo que equivale a preguntarse si todas las relaciones que intervienen en el razonamiento matemático son reducibles a relaciones intensivas de parte a todo y derivadas de ellas solas (generalidad más

1 Los dos tipos de generalización se relacionan con la distinción entre las clases "débilmente estructuradas" y las clases "estructuradas" que hemos introducido en las definiciones 11 y 13.

rica), o si por el contrario, las relaciones intensivas no expresan sino el cuadro exterior de todas las relaciones sin que pueda deducirse del mismo el detalle de aquellas (generalidad más pobre).

Ahora bien, esta cuestión, tan simple en apariencia, se demuestra de hecho de una sorprendente complejidad, ya que, bajo el juego formal de las nociones definidas e indefinibles o de las proposiciones demostradas o indemostrables, se halla el juego real de las operaciones que las engendran y que no se llega a explicitar jamás completamente. De lo que resulta que la filiación entre las estructuras generales y las estructuras particulares es singularmente mucho más difícil de establecer de lo que podría parecer, dado que la solución del problema debe buscarse en el análisis del mecanismo operatorio subyacente y no sólo en el de las nociones o proposiciones elegidas como axiomas.

Nos volvemos a encontrar aquí, respecto a las relaciones entre la lógica y el razonamiento matemático, en presencia de dificultades análogas a las que encontramos a propósito de las relaciones entre el número entero y la clase lógica: son, a decir verdad, las mismas dificultades, pero generalizadas en el plano interproposicional. En efecto, al igual que las relaciones de equipotencia entre dos conjuntos permiten engendrar los conjuntos de potencias que fundamentan el número entero, igualmente las relaciones entre los conjuntos de las partes conducen a considerar cierto número de transformaciones generales que se reencuentran en álgebra, en topología, en análisis, etc.; parece fácil pasar entonces a la vez de la clase —imagen lógica del conjunto— al número cardinal, y de la lógica de proposiciones —cuyas operaciones son isomorfas a las transformaciones elementales de los conujntos de partes— a la deducción matemática en su totalidad. En tanto que capítulo más general de la teoría de los conjuntos, la que sería a su vez el capítulo más general de la matemática, la lógica sería así la fuente directa de la matemática. Es de este modo como razonan gran número de lógicos, que piensan servir mejor, por esta reducción, a la causa de la matemática. Pero esta posición encubre un problema fundamental.

Es posible ciertamente instalarse, desde un comienzo, en un reticulado de conjuntos concebido bajo la forma más abstracta (admitiendo especialmente el infinito), para considerar a continuación las clases y las relaciones de la lógica intensiva como un simple caso particular (una pequeña sección finita) de dicha estructura general. Pero, los

conjuntos generales de los cuales puede extraerse a voluntad ya sea el número, ya sea la clase lógica, ¿suponen una estructura operatoria más o menos compleja que la de esta última? Toda la cuestión se centra allí, y es a este respecto donde debe precisarse necesariamente el problema de los dos tipos de generalidad. Si no hacen intervenir ninguna operación además de las que testimonia la clase lógica, podrán ser concebidos legítimamente como más generales: la lógica intensiva será considerada entonces como una simple aplicación de la teoría de los conjuntos y la generalidad más grande será, por este mismo hecho, la más rica, en tanto que fuente común de todas las estructuras diferenciadas. Pero, si la estructura abstracta postulada inicialmente supone, por el contrario, ciertas operaciones que sobrepasan el cuadro de las relaciones intensivas, ¿con qué derecho podrá concebírsela como más general?

Ahora bien, como hemos visto ya (§ 23-25), si bien un conjunto puede ser definido inicialmente de un modo que parecería poder ser aplicado directamente a la clase intensiva [1], reviste no obstante inmediatamente caracteres que sobrepasan los de la clase: basta así que sus elementos sean puestos en correspondencia bi-unívoca con los de otro conjunto, para que deje de constituir una clase intensiva y adquiera una "potencia". ¿Es entonces más o menos general que la clase? Si se dejan de lado las operaciones que es preciso hacer intervenir para efectuar dicha correspondencia "cualquiera" (ver § 25), podría responderse que lo es más, ya que toda clase finita es un conjunto enumerable y puede ser puesto en correspondencia con otros. Pero, desde el punto de vista de las operaciones mismas, la clase intensiva es más general en tanto que supone exclusivamente relaciones de parte a todo, mientras que el conjunto enumerable y la correspondencia bi-unívoca "cualquiera" le añaden las relaciones de las partes entre sí, o de elemento a elemento, que sobrepasan así las simples relaciones de inclusión y complementariedad.

Es de este modo como se plantea ahora el problema de las inferencias matemáticas. Es evidente que estas comprenden, a título de caso particular, la lógica de proposiciones. Pero ¿son reducibles a ella (como se quiso reducir el número a la clase), o agregan a las operaciones interproposicionales elementales ciertas relaciones que no están

1 *Cf.* § 23.

contenidas en ellas (como la correspondencia bi-unívoca "cualquiera" debe ser añadida desde afuera a la clase cuando se la quiere transformar en número)? La misma cuestión de las relaciones entre lo intensivo y lo extensivo se reencuentra pues necesariamente aquí; y sobre todo el mismo problema relativo a la noción de "generalidad" (entre la generalidad más pobre o más rica).

§ 45. EL SILOGISMO Y EL RAZONAMIENTO POR RECURRENCIA.

Estas cuestiones se plantearon en primer término en el terreno de la silogística clásica, la que se mostró en seguida como insuficiente para dar cuenta de la deducción matemática. Si bien las soluciones proporcionadas durante esta primera fase de la discusión de los problemas se hallan hoy superadas, no deja de ser instructivo compararlas con el estado actual de los mismos.

La lógica inglesa del siglo XIX sometió el silogismo a una doble crítica. Crítica externa, por una parte, que consistía en oponer su esterilidad a la fecundidad de la inducción experimental: el silogismo interviene sólo después que aquella ha suministrado las premisas, y se limita a desarrollar el contenido de manera puramente tautológica. Crítica interna, por otra parte, consistente en diferenciar las diversas formas posibles de cópulas y construir un álgebra de las clases y las relaciones mejor adaptada al contenido del razonamiento matemático. Ahora bien, mientras que esta ampliación de la lógica llegó, en la obra memorable de Whitehead y Russell, a una reducción de la matemática a la lógica y especialmente a una interpretación simple (ya indicada por Peano) del axioma de la recurrencia, la misma doble crítica de la silogística clásica desencadenó otra corriente de pensamiento, representada sobre todo en Francia, que tendió a oponer el razonamiento matemático al silogismo, incluso ampliado y generalizado.

La inducción experimental es fecunda, decía Poincaré, porque constituye una generalización progresiva, pero le falta rigor en la medida en que se basa en simples juicios de probabilidad. El silogismo, por el contrario, es riguroso, pero permanece enteramente tautológico. El razonamiento matemático presenta en cambio, la originalidad de ser a la vez una generalización gradual y una deducción entera-

mente rigurosa: se parece pues a la inducción por su carácter generalizador, pero sin compartir su falta de rigor, y se parece al silogismo por su carácter de necesidad interna, sin conocer no obstante su infecundidad. Ahora bien, el carácter tautológico de la silogística proviene del hecho que su estructura entera se reduce al encaje de la parte en el todo: el silogismo se limita a enseñarnos, dice así Poincaré ¡que dos soldados que pertenecen a la misma brigada son del mismo regimiento! Por el contrario, el razonamiento matemático se basa en estructuras mucho más diferenciadas, como la sucesión de los números enteros. Es pues en la "intuición del número puro", como dice Poincaré, es decir, en la certidumbre que tenemos de poder agregar indefinidamente una unidad a las precedentes, donde debe buscarse la originalidad del razonamiento matemático: el modelo es en consecuencia el razonamiento por recurrencia, según el cual una propiedad verdadera para $n = 0$, y verdadera para $n + 1$ si es verdadera de n, es verdadera para todos los números. Dicho razonamiento es irreductible al silogismo, ya que encierra una infinidad de proposiciones relacionadas entre sí; es, por otra parte, fecundo como la inducción, ya que procede por generalización de la parte al todo, pero es riguroso puesto que se basa en una "enumeración completa".

§ 46. EL RAZONAMIENTO POR RECURRENCIA Y LOS AGRUPAMIENTOS INTERPROPOSICIONALES

Era natural que Russell, que concebía el número como reducible a la clase, se esforzase por reducir el razonamiento por recurrencia a un simple encaje de clases ordenadas: "Si definimos los cuadrúpedos como los animales que tienen cuatro pies, se seguirá de ello que todo animal que tenga cuatro pies será un cuadrúpedo; el caso de los números sometidos al régimen de la inducción matemática es exactamente el mismo"[1]. Es cierto que se le añade el orden, en este último caso, pero incluso desde ese punto de vista no hay en ello más que una verdad puramente lógica: "lo que puede inferirse del vecino del vecino puede ser inferido del primero al último"[2]. Por ejemplo, si el hijo de Atreo es un atrida y su nieto también lo es, todos sus descen-

1 RUSSELL, 1928, pág. 41.
2 RUSSELL, 1928, pág. 42.

dientes también lo serán de próximo en próximo, por transferencia de ese carácter del precedente al siguiente. No se encontraría así, según Russell, ningún misterio en el razonamiento por recurrencia, y Poincaré habría complicado sin motivo lo que deriva de las relaciones lógicas más elementales.

Nos encontramos aquí, efectivamente, en el centro del problema de las relaciones entre la lógica bivalente y la deducción matemática. El razonamiento por recurrencia, dice Poincaré, es irreductible a la pura lógica, porque supone un pasaje, no de la totalidad incluyente a la parte incluida o a la inversa, sino de 1 (ó 0) y de $n \rightarrow (n+1)$ a todos. De ningún modo, responde Russell, "la inducción matemática es una definición y no un principio"[1]: "en la serie de los números naturales una propiedad se llama hereditaria, si todas las veces que pertenece al número n pertenece también a $n+1$, sucesor de n. Igualmente una clase se llama hereditaria si todas las veces que n es miembro de ella, $n+1$ también forma parte (...). Una propiedad se llama inductiva cuando es una propiedad hereditaria que pertenece a 0. Igualmente, una clase se llama inductiva cuando es hereditaria y contiene a 0"[2]. Dicho esto, es evidente que las inferencias que conducirían a tales clases permitirían el pasaje de 0 y de $n \rightarrow (n+1)$ al conjunto de los números hasta el infinito.

Pura cuestión de definición, dice así Russell. Si se quiere, pero falta explicar por qué al definir una clase inductiva por el pasaje de n a $n+1$, se introducen operaciones nuevas en relación a las que permiten asegurarse que todos los cuadrúpedos tendrán cuatro pies y que todos los descendientes de Atreo serán atridas. En el caso de los cuadrúpedos, se construye un simple encaje de parte a todo; en el de los atridas, se basa directamente en relaciones asimétricas transitivas de filiación; pero en el pasaje de n a $n+1$, se fusionan las operaciones de clases y de relaciones en una síntesis operatoria distinta, en su mecanismo, de las operaciones tomadas aisladamente: se sintetizan así dos "agrupamientos" intensivos en un "grupo" numérico introduciéndole todos los caracteres que distinguen dicho grupo del agrupamiento. Construir una clase o una seriación intensiva no consiste, en efecto, más que en reunir los individuos según una relación común de equivalencia cualitativa (analogía de los órganos, incluso si se enu-

1 Russell, 1928, pág. 41.
2 Russell, 1928, pág. 35.

meran cuatro pies) o una serie de relaciones asimétricas cualificadas (hijo, nieto, etc.); mientras que construir la serie de los números inductivos consiste en engendrarlos por adición de la *unidad*, es decir de un término simultáneamente sustituible (clase) y seriable (relación asimétrica). En su contenido pues, el razonamiento por recurrencia difiere de las operaciones intraproposicionales no matemáticas tanto como el número difiere de las clases y relaciones intensivas (ver § 25-26).

¿Pero, qué ocurre con su forma, que es lo único que nos interesa aquí? La solución de Russell podría ser interpretada en el siguiente sentido: una vez asegurado el contenido por definiciones convenientes, la forma intraproposicional del razonamiento por recurrencia sería idéntica a la de una inferencia cualquiera tomada de la lógica bivalente. Ahora bien, es aquí donde desempeña un papel fundamental el isomorfismo que hemos reconocido entre las estructuras interproposicionales y las estructuras de "clases de clases" constituidas por los argumentos que verifican las proposiciones en juego. Hemos constatado en particular, que la implicación $(p \rightarrow q)$ correspondía a la inclusión $(P \subseteq Q)$ y que si $(p \supset q)$ se descompone en $(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$, es porque la inclusión $(P \subseteq Q)$ supone, si $(P \neq Q)$, la complementariedad $(P \cup P' = Q)$ donde $P' = Q - P$. ¿Qué ocurrirá entonces si el razonamiento por recurrencia en lugar de tener por contenido las clases de clases puramente intensivas $(P \cup P' = Q)$ y $(Q \cup Q' = R)$, como en la inferencia

$$[(p \supset q) \cdot (q \supset r)] \rightarrow (p \supset r),$$

supone a título de contenido las clases de clases de carácter numérico que constituyen los números inductivos?

Basta, para comprenderlo, comparar la estructura del razonamiento por recurrencia con un agrupamiento de implicaciones $(p \rightarrow q)$; $(q \rightarrow r)$; $(r \rightarrow s)$; etc. Como se recordará, en efecto (§ 39, en B), toda serie de implicaciones puede escribirse en la forma $(p \vee p' \leftrightarrow q)$; $(q \vee q' \leftrightarrow r)$; $(r \vee r' \leftrightarrow s)$; ... donde $(p \cdot p' \leftrightarrow q;\ q \cdot q' \leftrightarrow r;\ r \cdot r' = s;\ \ldots)$, lo que transcribiremos en la forma más débil:

(334) $(p \vee p') \rightarrow q;\quad (q \vee q') \rightarrow r;\quad (r \vee r') \rightarrow s$; etc.

De lo que se desprende:

(335) $p \rightarrow q; \quad p \rightarrow r; \quad p \rightarrow s$; etc.

Pero p no podría implicar p', o q', etc.

Escribamos, por otra parte, el razonamiento por recurrencia en la forma:

(336) $$[(p_0)\cdot(p_n \supset p_{n+1})] \rightarrow p_x$$

es decir, si p es válido para 0 y si "p válido para n" implica "p válido para $n+1$", entonces p es válido para $0 \ldots \infty$.

Llamemos ahora p la proposición "p válido para $n=1$"; q la proposición "p válido para $n=2$"; r la proposición "p válido para $n=3$"; etc. Se tiene entonces $(p \supset q)$; $(p \supset r)$; etc.; $(q \supset r)$; $(q \supset s)$; etc.

Ahora bien, si se tiene $(p \supset q)$; $(q \supset r)$; etc., se debe tener también $(p' \supset q)$; $(q' \supset r)$; etc., ya que:

$$(p \supset q) \leftrightarrow [(p \vee p') \supset q]; \qquad (q \supset r) \leftrightarrow [(q \vee q') \supset r]; \text{ etc.}$$

Efectivamente, si "p válido para $n=2$" (sea q) implica "p válido para $n=3$" (sea r), se tiene que considerar igualmente una proposición q' correspondiente a $3-2=1$, que significará pues "p válido para 1" y que implicará igualmente r. Del mismo modo, si r ($=p$ válido para 3) implica s ($=p$ válido para 4), se tendrá una proposición r' ($=p$ válido para $4-3=1$) que implicará también s, etc. En síntesis, puede escribirse en el caso del razonamiento por recurrencia como en cualquier serie de implicaciones del tipo (334): $(p \vee p') \rightarrow q$; $(q \vee q') \rightarrow r$; $(r \vee r') \rightarrow s$; etc., y se tendrá: $p' = p$ válido para 1; $q' = p$ válido para 1; $r' = p$ válido para 1; etc.

Pero, se ve entonces la diferencia esencial que opone esta estructura deductiva a la del "agrupamiento" ordinario $(p \rightarrow q)$; $(q \rightarrow r)$; etc.

Si en $(p \vee p') \rightarrow q$; $(q \vee q') \rightarrow r$; $(r \vee r') \supset s$; etc., se tiene $p =$ "p válido para 1"; $q =$ "p válido para 2"; $r =$ "p válido para 3"; etc., y $p' =$ "p válido para $2-1$"; $q' =$ "p válido para $3-2$"; etc., entonces:

(337) $$p \rightarrow p'; \; p \rightarrow q'; \text{ etc}; \; p' \rightarrow q'; \; q' \rightarrow r'; \text{ etc.}$$

Dicho de otro modo, las proposiciones p, p', q', r', etc., son todas equivalentes y significan todas "p válido para la unidad agregada al número precedente". En lugar de encontrarse en presencia de una serie de proposiciones de las cuales cada una se halla implicada por dos proposiciones elementales, una primaria (p, q, r, etc.) y otra secundaria (p', q', r', etc.), pero que no se implican entre sí, se obtiene una serie de proposiciones que se implican entre sí y se hallan implicadas por proposiciones elementales equivalentes que significan todas "p válida para la unidad agregada a las precedentes". El razonamiento por recurrencia llega así a una equivalencia generalizada y presenta, en consecuencia, una estructura particular que representa, respecto de los "agrupamientos" de implicaciones, lo que la estructura del grupo aditivo de los números enteros respecto de la de los "agrupamientos" de clases. Es decir, los agrupamientos interproposicionales pueden aplicarse a los números como a cualquier otro contenido, pero son más pobres que el sistema de implicaciones que interviene en el razonamiento por recurrencia, por lo que no pueden dar cuenta del mismo.

La razón está en que una implicación ($p \rightarrow q$) no expresa nada más que una especie de *dictum de omni et nullo*: lo que se afirma en q está afirmado en p sin que la recíproca sea verdadera: de ahí la existencia de la implicación ($p' \rightarrow q$) que significa que q está también afirmada en p', pese a que p y p' no se impliquen mutuamente. El pasaje de la proposición "p válido para n" a la proposición q "p válido para $n + 1$" expresa, por el contrario, una implicación ($p \supset q$) tal que q se deriva de p (correspondiente a n) y de p' (correspondiente a $n + 1$), ya que se tiene simultáneamente ($p \rightleftarrows p'$) y que ($q \leftrightarrow p \vee p'$). A lo que se añade que la equivalencia ($p \leftrightarrow p'$), ($\leftrightarrow q' \leftrightarrow r' \leftrightarrow$ etc.), no es una identidad, ya que se trata cada vez de una nueva unidad agregada a las precedentes, es decir, de una proposición distinta de efecto acumulativo y no tautológico. En síntesis, se reencuentra en el razonamiento por recurrencia, comparado a la lógica bivalente, toda la diferencia que existe entre la iteración ($1 + 1 = 2$) y la tautología de clases y de relaciones ($A + A = A$) y ($a + a = a$). Se tiene, en efecto, ($p = p'$), pero también ($p \vee p'$) $\neq p$ ya que ($p \vee p'$) $= q$. La equivalencia ($p = p' = q$) $=$ etc., es pues intraducible en simples equivalencias lógicas (bivalentes).

La diferencia fundamental entre el razonamiento por recurrencia

y las inferencias lógicas es, en definitiva, la siguiente: la lógica no conoce más que la relación de la parte respecto del todo, y no determina la parte sino en función del todo por un juego de complementariedades que caracterizan las operaciones inversas y recíprocas. El razonamiento por recurrencia es, por el contrario, un pasaje del elemento a la totalidad por composición gradual de las partes, unas en función de las otras. La implicación $(p_n \rightarrow p_{n+1})$ es pues irreductible a la implicación bivalente $(p \rightarrow q)$: expresa una ley de construcción y no un simple encaje.

Estas observaciones no significan naturalmente que el razonamiento por recurrencia agote la deducción matemática. Pero si el hecho que conduzca a estructuras numéricas lo diferencia paralelamente de las inferencias simplemente lógicas, ocurrirá lo mismo, en distintos grados, con los razonamientos cuya estructura implique la cantidad extensiva en general (el "casi todos", etc.). Pero el razonamiento por recurrencia proporciona un primer ejemplo de la irreductibilidad de ciertas implicaciones a la implicación $(p \rightarrow q)$, pese a que su estructura formal suponga un elemento en común: este elemento común es la relación de parte (p) a todo (q), mientras que el elemento especial a la implicación matemática es la relación directa de parte a parte.

§ 47. EL INFINITO Y EL PRINCIPIO DE TERCERO EXCLUIDO.

Como hemos visto en el capítulo IV, la diferencia entre las matemáticas y la lógica tiende esencialmente, en el plano interproposicional, al pasaje de las operaciones finitas a aquellas que son generalizables al infinito. Esto es particularmente claro respecto a las relaciones que mantienen el principio de tercero excluido con los conjuntos infinitos, y fue en ese sentido que el problema se vio traspuesto al plano interproposicional.

A partir de 1907, Brouwer, seguido en seguida por Weyl y otros, adoptó una posición que invirtió totalmente la de Russell y los logicistas, respecto a la reducción pura y simple de la matemática a la lógica: la verdad propia de las relaciones matemáticas no podría asegurarse más que por su construcción efectiva, la lógica dependería así de la matemática en lugar de dominarla.

La razón de esta inversión se debió, en efecto, a ciertas dudas

experimentadas por Brouwer respecto a la validez de ciertas demostraciones, no obstante corrientes [1]. Sea un conjunto E y una propiedad a. Se demuestra que es falso que a se aplique a todos los elementos del conjunto: ¿puede concluirse entonces que existe al menos un elemento del conjunto que goce de la propiedad no-a? Tal es la primera cuestión, y he aquí la segunda, que se halla bastante próxima: si está dado un elemento que presenta la propiedad b, ¿en nombre de qué criterios se asegurará que b equivale a no-a (es decir a $\bar{a}$)?

Sea:

(a) $(\forall x)(ax \supset \bar{b}x)$ (b) $(\forall x)(bx \supset \bar{a}x)$ (c) $(\forall x)(\bar{b}x \supset ax)$

y

(d) $(\forall x)(\bar{a}x \supset bx)$

o, abreviando:

(a) $a \supset \bar{b}$ (b) $b \supset \bar{a}$ (c) $\bar{b} \supset a$ (d) $\bar{a} \supset b$

de lo que se deriva (de **a** y **c**) la equivalencia (**e**)$a \equiv \bar{b}$ y de **b** y **d**) la equivalencia (**f**)$b \equiv \bar{a}$.

Planteadas las dos cuestiones, equivale a preguntarse si es legítimo escribir $(\bar{a} \equiv b)$ y admitir $(a \le \bar{a})$; dicho de otro modo: ¿cuál es el alcance del principio de no-contradicción $(a.\bar{a} \equiv 0)$ en el caso $(\bar{a} \equiv b)$ y cuál es la legitimidad del principio de tercero excluido $(a \le \bar{a})$?

Sobre el primer punto, Brouwer toma una posición que anuncia en cierto sentido el descubrimiento de Gœdel: sin cuestionar el valor universal (es decir, que atañe tanto al infinito como a lo finito) del principio de contradicción, insiste sobre todo en las dificultades de su aplicación a las colecciones infinitas. Sólo las evidencias extralógicas permiten, en efecto, considerar los atributos a y b como la negación uno del otro. En el caso de una clase de objetos de número finito, es legítimo ciertamente establecer las implicaciones **a**) y **d**) y extraer de ellas las equivalencias **e**) y **f**). Es decir:

1 WAVRE, 1934.

(338) Si $(a \equiv \bar{b})$ y $(b \equiv \bar{a})$ entonces $(a \cdot b \equiv a . \bar{a} \equiv o)$

Pero en el caso de un conjunto infinito, incluso enumerable, el empleo de las implicaciones y equivalencias (a y f), es decir la aplicación del principio de contradicción a dos atributos a y b concebidos como la negación uno del otro, choca con la dificultad de dar un sentido preciso a la palabra "todos": esta precisión no es posible más que en el caso de una construcción bien determinada, como precisamente las que se basan en la serie de números enteros, exigida por el axioma de la inducción completa o de recurrencia. Lo que equivale a decir que la operación numérica desborda la no-contradicción y que la no-contradicción no basta para agotar la existencia matemática: esta es "intuitiva" según la terminología de Brouwer, es decir, relativa a una construcción operatoria efectiva que supera el cuadro de las operaciones de la lógica bivalente.

Pero es en el terreno del tercero excluido donde la cosa se hace más tangible, ya que en ese caso, es el valor mismo del principio, y no sólo la legitimidad de sus aplicaciones, lo que es puesto en cuestión por las nuevas exigencias lógicas impuestas a la demostración por la escuela brouweriana. Según Brouwer, en efecto, no podría estarse seguro de la ausencia de todo *tertium* entre a y $\bar{a}$, es decir del valor de la disyunción exclusiva $(a \text{ w } \bar{a})$, más que en el caso de una colección finita. Por ejemplo, en una urna que contuviese un número finito de bolas, podríamos estar seguros que todas fuesen blancas (a) o que no lo fuesen todas $(\bar{a})$, ya que podríamos controlar uno por uno todos los elementos del conjunto. En virtud de ese mismo control podríamos establecer entonces $(\bar{a} \supset b)$. Pero en el caso de una colección infinita, no tendríamos ya el derecho de establecer $(a \text{ w } \bar{a})$ precisamente a causa de la ausencia de todo control posible, es decir, de la indeterminación de la palabra "todos". En este caso, la demostración de la falsedad de una proposición no implica la verdad de su contradictoria, ya que esta verdad no podría admitirse más que una vez asegurada la construcción del elemento que constituye la excepción a la proposición negada. Por ejemplo, el hecho de demostrar que es falso que un conjunto infinito no comprenda tal elemento, no constituye *ipso facto* la prueba de su presencia. Esta existencia no podría demostrarse más que por una construcción directa y efectiva, y no deduciéndola de la negación de su negación.

Ahora bien, resulta interesante comprobar que las proposiciones que Brouwer puso en duda en el terreno de la teoría de conjuntos y del análisis, en virtud de su reflexión sobre el principio de tercero excluido, son entre otras, las que E. Borel y Lebesgue sospecharon igualmente, pero a causa de una crítica directa de las demostraciones propuestas. Son pues cuestiones de rigor, y no solamente su epistemología del devenir matemático, lo que se halla a la base de la revisión brouweriana.

El alcance de la limitación del principio de tercero excluido es evidente respecto a la significación de la lógica bivalente en sus relaciones con la deducción matemática. Objetar la generalidad de la exclusión $(p \text{ w } \bar{p})$, es, en efecto, negarse a admitir que una proposición pueda ser demostrada por la negación de su falsedad, salvo en una colección finita. Es pues, por una parte, reconocer la irreductibilidad de las construcciones operatorias de carácter matemático respecto a las operaciones lógicas bivalentes. Y es sobre todo, por otra parte, limitar el dominio de la lógica bivalente, no sólo a los conjuntos finitos, sino además a las solas relaciones de parte a todo, conforme a la concepción defendida en esta obra.

Desde el punto de vista formal, la tesis de Brouwer equivale a sostener que independientemente de una ley de construcción operatoria, no se podría aplicar a las colecciones infinitas la disyunción exclusiva entre una universal afirmativa y una particular negativa. Más precisamente, no bien interviene el infinito, el universal "todos" pierde su significación lógica. Una de dos: o bien cesa de presentar un sentido, o bien adquiere uno, pero gracias exclusivamente a una ley de construcción: sólo las operaciones que constituyen esta desbordan en ese caso el campo de las operaciones lógicas (intensivas).

§ 48. LA LOGICA INTUICIONISTA.

La conclusión que Brouwer extrae de su análisis crítico es que, lejos de constituir su fuente, la lógica (bivalente) no se aplica a los seres matemáticos de manera adecuada y completa, o, lo que equivale a lo mismo, no representa sino un simple sector de la matemática, limitado a los conjuntos finitos. La verdadera lógica de la matemática sería la estructura propia del número, o de las operaciones matemáticas mismas.

Pero los continuadores y discípulos de Brouwer han tratado de conciliar su tesis con la formalización lógica. Así Heyting en 1930 [1] constituyó una lógica que se presenta como un debilitamiento de la lógica clásica. Si se designa por $\neg$ la negación utilizada (llamada *absurdidad*), se tiene en particular la ley:

(339) $$\vdash p \supset \neg\neg p$$

sin que la recíproca no sea verdadera. Igualmente se tiene:

(340) $$\vdash (p \supset q) \supset (\neg q \supset \neg p)$$

pero no recíprocamente. En contrapartida se tiene:

(341) $$\vdash p \supset \neg\neg\neg p.$$

Este último resultado, ya expuesto en 1923 por Brouwer, se conoce con el nombre de *regla de la triple absurdidad.*

El movimiento de ideas desencadenado a partir de allí ha presentado dos aspectos muy distintos. Uno está representado por la posición que Gonseth adoptó en 1926 [2].

Negándose a admitir con Brouwer la inadecuación general de la lógica bivalente y del principio de tercero excluido al infinito matemático, Gonseth adoptó una posición intermedia: la lógica bivalente no es sino un esquema, cuya significación no podría ser considerada como absoluta, pero no hay ninguna razón para privarse de su utilización en todo caso en que dicho esquema pudiera ser adaptado sin conducir a contradicciones explícitas; por el contrario, en caso que esto no ocurriera, conviene hacer una ampliación: "Si en un conjunto, una propiedad *a* y una propiedad no-*a* dividen *todos* los elementos en dos clases complementarias, en el sentido mismo que la palabra *todos* puede y debe tomar en la definición del conjunto, las aserciones *a*) [$(\forall x)ax$ = todos los x son a] y *b*) [$(\exists x)\bar{a}x$ = existe un elemento de la clase que posee la propiedad $\bar{a}$], deben considerarse ellas mismas como contradictorias y ser tratadas según el esquema L (bivalente). Pero puede ocurrir que para ciertos conjuntos —que no son necesa-

1 Heyting, 1930.
2 Gonseth, 1926.

riamente infinitos– para ciertos atributos y para ciertos elementos, la eventualidad ni a ni no-a sea la única exenta de contradicción; las dos clases no son entonces ya complementarias, las propiedades a y no-$\bar{a}$ no pueden ser llamadas perfectamente contradictorias y las proposiciones a) y b) deben tratarse según el esquema I"[1], es decir el esquema que daremos a continuación. Ahora bien, este esquema, del cual Gonseth proporciona los lineamientos, constituye un modelo que implica la originalidad de admitir un nuevo principio de cuarto excluido que concilia los axiomas de Hilbert con la regla de la triple absurdidad de Brouwer. Gonseth designa por p lo verdadero, por p' lo falso y por Rp lo indiferente, pero escribiremos para simplificar $(+p)$ $(\bar{p})$ y (p). Se tiene así en primer lugar:

$$(342) \qquad (+p) \vee (\bar{p}) \vee (p)$$

en lugar de $(p \vee \bar{p})$. La expresión (342) es pues siempre justa. Por el contrario $(+p).(\bar{p})$ ó $(+p).(p)$ ó incluso $(\bar{p}).(p)$ no son nunca justas:

$$(343) \qquad [(+p)\cdot(\bar{p})] \leftrightarrow o; \quad [(+p)\cdot(p)] \leftrightarrow o \quad \text{y} \quad (\bar{p})\cdot(p) \leftrightarrow o$$

La absurdidad de $(+p)$ y de $(\bar{p})$ está definida por las siguientes fórmulas (en las que Gonseth escribe $\wedge$ lo que nosotros continuaremos designando por $\neg$)

$$(344) \qquad (\neg p) \leftrightarrow (\bar{p} \vee p) \qquad \text{y} \qquad (\neg \bar{p}) \leftrightarrow (+p \vee p)$$

La absurdidad $(\neg p)$ significa pues: "ó p es falso o no se puede afirmar nada''. En cuanto a la absurdidad de la indiferencia como tal de p, que Gonseth nota $\widehat{Rp}$ y que nosotros notaremos $\neg(p)$ por oposición a $(\neg p)$, significa entonces: ''o bien es falso que no se sepa nada de p, o bien no se puede afirmar nada del hecho que no se pueda afirmar nada''. Se tiene pues:

$$(345) \qquad \neg(p) \leftrightarrow (+p) \vee (\bar{p}) \vee (p)$$

1 Gonseth, 1926, pág. 232.

Esta absurdidad es así siempre verdadera (en virtud de la proposición 342), lo que asegura la verdad de $[\neg(p)]\cdot(p) \leftrightarrow (p)$, mientras que $(\neg p)\cdot(+p)$ no es nunca justa:

(346) $$[\neg(p)]\cdot(p) \leftrightarrow (p) \quad \text{y} \quad [(\neg p)\cdot(+p)] \leftrightarrow o$$

Pueden entonces aceptarse las fórmulas de equivalencia de la lógica clásica:

(347) $$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p)\cdot(\neg q)$$

(348) $$\neg(p\cdot q) \leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$$

(349) $$[(\neg p) \vee (+q)] \leftrightarrow (p \supset q)$$

Pero el esquema de Gonseth comprende además la ley de la triple absurdidad de Brouwer. En efecto, tenemos en virtud de (344) y (347)

(350) $$\neg\neg p \leftrightarrow \neg(\bar{p} \vee p) \leftrightarrow [(+p) \vee (p)]$$

y

(351) $$\neg\neg\neg p \leftrightarrow \neg[(+p) \vee (p)] \leftrightarrow (\neg p)\cdot\neg(p) \leftrightarrow \neg p$$

Pero, otra corriente comenzó a delinearse en reacción contra la lógica intuicionista. Consistió en acentuar el elemento de irreversibilidad que se manifiesta en la concepción brouweriana de las operaciones que llevan al infinito, y que se vuelve a encontrar hasta en el formalismo de Heyting; así, la segunda corriente llegó a la constitución de ese mecanismo formal, extremadamente original, que es una lógica sin negación.

§ 49. LAS OPERACIONES APARENTEMENTE IRREVERSIBLES Y LA LOGICA SIN NEGACION.

Lo propio de la concepción brouweriana de la matemática es la exigencia de una constructibilidad entera: el término (bastante equí-

voco) de intuicionismo se refiere únicamente, en efecto, a la naturaleza de la construcción operatoria asignada por Brouwer al razonamiento matemático, en oposición a toda intuición sensible o platónica (en el sentido de las especulaciones cantorianas). Ahora bien, por una paradoja que merece que se le preste atención, encontramos que, contrariamente a todo lo que hemos visto hasta aquí respecto a la operación, Brouwer introduce lo irreversible en la matemática misma; de p puede derivarse $(\neg\neg p)$, pero de $(\neg\neg p)$ no puede volverse a p, es decir que la doble negación no conduce ya a la afirmación. Dicho de otro modo, no basta encontrar la falsedad de la falsedad de una proposición para estar seguro de su verdad, y el razonamiento por el absurdo no es ya una demostración siempre válida en matemática.

La razón de esta irreversibilidad de hecho es de gran interés: al perder el término "todos" su sentido en las colecciones infinitas, desde el momento en que ninguna construcción operatoria determinada le confiere uno, se hace posible demostrar negaciones y extraer de ellas otras negaciones, pero no es posible ya volver de la negación a la afirmación, ya que no es posible decidir sobre todos los términos la alternativa de lo verdadero o de lo falso. La irreversibilidad brouweriana no conduce pues a la noción, que sería contradictoria, de operaciones irreversibles. Expresa solamente los límites de la operación lógica cuando no es posible conocer todos los términos a que conduce, a falta precisamente de una construcción operatoria: es una irreversibilidad de hecho y no de derecho. Opone a la noción racional de un infinito efectivamente construido, la irracional del infinito no construido o en puro devenir, el cual es al primero como el caos es al orden o la entropía física a la mecánica reversible.

Un ejemplo dado por Griss para ilustrar la proposición (339) en su propia lógica, nos hará comprender la cosa. Sea el conjunto infinito de puntos comprendidos entre 0 y 2 (fig. 52). Llamemos A el subconjunto que comprende exclusivamente el punto 1 y $(\bar{A})$ el complementario de A, es decir, el subconjunto al que pertenecen los puntos comprendidos entre 0 y 2, salvo el punto 1; definamos enseguida p por $p = x \in (A \vee \bar{A})$. Debemos recalcar entonces (desde el punto de vista brouweriano) que *ciertos puntos no pueden ser clasificados* ni en (A) ni en $(\bar{A})$, a falta de indicaciones sobre ellos: no sabemos si 0,999. . . es igual a 1 (pertenece entonces a A) o forma parte de $(\bar{A})$. No podemos incluirlos entonces ni en (A) ni en $(\bar{A})$, no obstante se hallan comprendidos con toda seguridad entre 0 y 2. Determinemos ahora el complementario $\neg p$ de p, es decir, el conjunto de elementos de los cuales estamos *seguros* que no están ni en (A) ni en $(\bar{A})$: serán

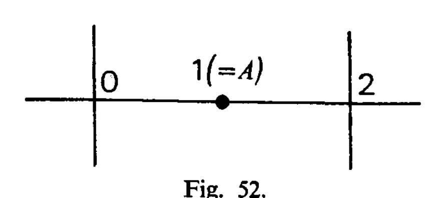


Fig. 52.

todos los puntos situados del otro lado de 0 y del otro lado de 2, sea ($\neg p = < 0$ y > 2). Tenemos entonces $p \supset (\neg\neg p)$, pero no $(\neg\neg p) \supset p$. En efecto, p está incluido (pero sin reciprocidad ni equivalencia) en $(\neg\neg p)$, ya que el complementario del complementario de p (sea $\neg\neg p$) comprende *todos* los puntos entre 0 y 2, mientras que p comprende exclusivamente los puntos que estamos *seguros* que son ya sea 1, ya sea distintos de 1; hay pues más en $(\neg\neg p)$ que en p, y es porque $p \supset (\neg\neg p)$ es una implicación (inclusión) y no una equivalencia. La recíproca $(\neg\neg p) \supset p$ es, en efecto, falsa, ya que hay menos en p que en $(\neg\neg p)$. Dicho de otro modo p corresponde a un sub-conjunto de $(\neg\neg p)$, ya que todos los puntos comprendidos entre 0 y 2 (sea $\neg\neg p$) son más numerosos, o pueden ser más numerosos, que los puntos que estamos *seguros* que son 1 (sea en A) o diferentes de 1 (sea en $\bar{A}$).

Este ejemplo permite comprender bien en qué el "todos" lógico no coincide con el "cierto" operatorio (matemático) y por qué en consecuencia, la operación ($p \supset \bar{\bar{p}}$) es aparentemente irreversible en el infinito: se tendría ($p \supset p$), es decir ($p = \bar{\bar{p}}$) si se estuviese "cierto" (seguro) respecto a la naturaleza de "todos" los elementos, pero no podría estárselo en el infinito no construido, y este permanece entonces irreversible porque se halla precisamente no determinado operatoriamente. Esta especie de irreversibilidad aparente o provisoria, es decir de hecho y no de derecho, que caracteriza el infinito no construido del brouwerismo confirma pues, al mostrar los límites de lo operatorio, la tesis de la reversibilidad propia de las operaciones.

Pero, por el hecho mismo que la negación constituye así en las matemáticas llamadas intuicionistas una vía sin retorno, un lógico brouweriano, G.F.C. Griss quiso construir una lógica matemática sin negación [1], reemplazando la noción del "no" por la de simple "diferencia". Contrariamente a la lógica con negación de Heyting, Griss se propone pues constituir una lógica de la afirmación o de la construcción puras, no admitiendo como operaciones primarias más que la implicación y la conjunción. De lo que resulta que el principio de contradicción ($p.\bar{p} = 0$) no interviene en la lógica de Griss, no porque introduzca lo contradictorio, sino al contrario, porque evita cuidadosamente toda negación susceptible de implicar contradicciones, y se

1 Griss, 1944.

esfuerza así en interpretar todo en el lenguaje positivo de la teoría de los conjuntos.

Nos encontramos pues con semejante lógica en presencia de la conclusión natural de la irreversibilidad del infinito no-construido. La lógica de Heyting es ya irreversible, puesto que supone más valores para la afirmación que para la negación, y puesto que acepta la no-reciprocidad de $(p \supset \neg\neg p)$ (proposición (339)). Pero Griss va más lejos aún suprimiendo la negación como tal, es decir, el principio mismo de la inversión.

Es interesante advertir que dicho formalismo, que sanciona así los límites de la reversibilidad operatoria, retiene pese a todo un principio que desempeña un papel de sustituto en relación a la negación y a la no-contradicción $(p.\bar{p} = 0)$. La lógica de Griss posee, en efecto, un equivalente de la incompatibilidad [1], pero interpretado naturalmente en el sentido de la complementariedad y no de la negación propiamente dicha.

Ahora bien, esta incompatibilidad es la operación inversa de la conjunción $(p.q)$, es decir de una de las dos operaciones fundamentales de Griss. Es cierto que en la lógica de Heyting no era posible ya extraer $(p.q)$ de $(\overline{p \supset \bar{q}})$ y que la lógica de Griss no supone ninguna negación que permita pasar directamente de la incompatibilidad a la conjunción. Pero siguen siendo dos relaciones inversas, incluso si esta inversión se halla limitada.

La lección de esta interesante tentativa es pues que, al querer privarse de la negación y de la no-contradicción, se disocia simplemente esta última en sus dos componentes: la complementariedad, por una parte, y la reversibilidad en general, por la otra, aún cuando esta última permanezca incompleta. Veremos en el § 51 el sentido de dicha conclusión.

§ 50. LAS LOGICAS POLIVALENTES.

La crítica del principio de tercero excluido no ha constituido la única razón de la ampliación de la lógica bivalente. Desde 1921, Lukasiewicz, seguido de cerca por Post, trataron, por simple necesidad

1 *Cf.* DESTOUCHES-FEVRIER, 1948.

de generalización modal, de considerar n valores distintos, y la escuela polaca, con Lukasiewicz y Tarski, se propuso igualmente construir una lógica polivalente con infinidad de valores. Por otra parte, Reichenbach elaboró una lógica polivalente destinada a dar cuenta de las modalidades probabilísticas, inspirada en las preocupaciones fisicalistas propias del Círculo de Viena. Así se constituyeron un conjunto de lógicas coherentes, cuya aplicación no ha dado todavía todos sus frutos, pero cuya existencia misma basta para consagrar el hecho capital de la no-exclusividad de la lógica bivalente.

En lugar de limitarse a la complementariedad (p) y $(\bar{p})$ de donde se derivan principios de tercero excluido $(p \vee p = 1)$[1] y de contradicción $(p . \bar{p} = 0)$, es posible, en efecto, considerar el valor de $\bar{p}$ como equivalente a 1 menos el valor de p, lo que escribiremos (simplificando el simbolismo):

(352) $$\text{val } \bar{p} = 1 - \text{val } p$$

El condicional, cuyo formalismo había sido ya profundamente modificado en la lógica de Heyting, toma ahora la siguiente significación. Si en $(p \supset q)$ el valor de verdad de p es igual o inferior al valor de verdad de q, resulta que la implicación $(p \supset q)$ vale ella misma 1 (verdad). Si por el contrario, el valor de p es superior al de q, se tiene:

(353) $$(p \supset q) = 1 - \text{val } p + \text{val } q \text{ (si val } p > \text{val } q)$$

Ejemplo: Si p es verdadero (1) y q falso (0), se tiene $(p \supset q) = 1 - 1 + 0 = 0$.

Introduzcamos ahora los tres valores 0; 0,5 y 1 para p y para $\bar{p}$.

Ejemplo: Si $p = 1$ y $q = 0{,}5$, la implicación $(p \supset q)$ dará:

$$(1 - 1 + 0{,}5) = 0{,}5$$

Pero, al lado de esos tres valores, es entonces posible generalizar a n valores:

1 Donde 1 = el todo referencial.

$$0;\quad \frac{1}{n-1};\quad \frac{2}{n-1};\quad \frac{3}{n-1};\ldots;\quad \frac{n}{n-1};\ldots;1$$

En el sistema bivalente en que $n = 2$, se tiene entonces que las dos posibilidades 0 y $\frac{1}{2-1} = 1$. En una lógica L_n de valores n se llega por el contrario a un principio de "n^{esimo} excluido" que reemplaza al tercero excluido. Este principio es $(p \vee \bar{p})$, es decir en lenguaje de negaciones $(\bar{p} \vee \bar{\bar{p}})$ para $n = 2$. Si está dado que la proposición de rango n es la única excluida, se transforma, de un modo general:

(354) $\bar{p} \vee \bar{\bar{p}} \vee \bar{\bar{\bar{p}}} \vee \bar{\bar{\bar{\bar{p}}}} \vee \ldots$ hasta n negaciones.

Igualmente, la contradicción será:

(355) $\overline{(\bar{p} \cdot \bar{\bar{p}})} \vee \overline{(\bar{\bar{p}} \cdot \bar{\bar{\bar{p}}})} \vee \overline{(\bar{\bar{\bar{p}}} \cdot \bar{\bar{\bar{\bar{p}}}})} \vee \ldots$

Dos observaciones se imponen en lo concerniente a esta generalización de la lógica bivalente. Se está en presencia de un sistema elemental, que se basta a sí mismo y en el cual la no-contradicción $(p . \bar{p} = 0)$ se halla asegurada por una reversibilidad que se define exclusivamente por la complementariedad $(p \vee \bar{p} = 1)$. Las series de negaciones y de implicaciones que intervienen en la lógica de Lukasiewicz y Tarski flexibilizan, por el contrario, al extremo los principios de tercero excluido e incluso de no-contradicción. La contradicción del sistema se basa en ella nuevamente, en la reversibilidad, ya que el pasaje de un valor al siguiente o al precedente se obtiene por la adición o sustracción de una negación, es decir, por un desplazamiento, en un sentido o en otro, en la serie de las modalidades. Sólo que al estar esta reversibilidad no caracterizada ya por una simple complementariedad, sino por una verdadera ley de sucesión, la cuestión es saber en base a qué mecanismo asegura aún la no-contradicción del sistema. Estamos en presencia de un encaje indefinido de lógicas particulares de n valores, pero que no se encierran en una lógica general única, que sería la Lógica simplemente.

Desde el punto de vista de las relaciones entre la matemática y la lógica, las lógicas polivalentes, al reemplazâr así las relaciones exclusivas de parte a todo por una ley de sucesión, desbordan la estructura del "agrupamiento" y limitan las estructuras propias de los seres matemáticos.

En particular, si los valores considerados son en número infinito, la implicación lógica se vuelve entonces susceptible de reencontrarse con el razonamiento por recurrencia. El pasaje de una negación $\bar{\bar{p}}$ a la siguiente $\bar{\bar{\bar{p}}}$ ó a la precedente $\bar{p}$ se efectúa, en efecto, por adjunción o supresión de una negación: ahora bien, estas operaciones son componibles entre sí, reversibles, asociativas y suponen una idéntica única. Puede concebirse así una recurrencia lógica que correspondería a la recurrencia matemática, pero, como ya se ha visto, a condición de incorporar a su propio mecanismo la serie misma de los enteros[1].

De una manera general, y por una paradoja extremadamente reveladora, el ultraformalismo que testimonia esta generalización de las "formas" lógicas pone en peligro la integridad de las fronteras que separan lo formal, en el sentido puramente lógico, de su contenido matemático. En un sistema en el cual la implicación toma un número ilimitado de valores, las nociones mismas de compatibilidad e incompatibilidad arriesgan disolverse en una ampliación tal de relaciones que sólo el sentido efectivo ("contenido") de las proposiciones en juego puede asegurar una significación a la "forma" lógica. Es lo que Tarski mismo ha entrevisto claramente. La cuestión está en saber si el "contenido" matemático es un contenido en relación a la lógica, o si no constituye por el contrario una forma mucho más compleja, en la cual las formas lógicas indefinidamente diferenciadas se transformen en partes integrantes. El problema está sobre todo en saber si la "lógica general" no se confunde, en este caso, con la teoría

1 En cuanto a su significado, esta recurrencia lógica no permanece necesariamente modal, pero puede concebirse como conduciendo a grados de generalización de lo verdadero. Al igual que las proposiciones bivalentes p y $\bar{p}$ llegan directamente a dividir dicotómicamente el conjunto considerado según las clases complementarias $\bar{P}$ y P, igualmente, la partición en n valores puede concebirse como una partición aritmética del conjunto con generalización progresiva (recurrente) de una misma verdad de una parte-unidad a la siguiente. Es según semejante modelo como las cascadas de implicaciones propias de la lógica infinivalente se vuelven sin duda susceptibles de unirse al razonamiento por recurrencia o al axioma general de la inducción completa.

general de las estructuras más que con el cálculo generalizado de las proposiciones.

§ 51. LA NO-CONTRADICCION LOGICA Y LA NATURALEZA DEL RAZONAMIENTO MATEMATICO.

Si el alcance general del principio de tercero excluido ha sido puesto en duda, el de contradicción no ha sido objetado, al menos en el mismo sentido. Se ve mal, en efecto, una lógica que introduzca lo contradictorio en grados diversos en el seno de la deducción, mientras que se acepta que pueda sustituirse el tercero excluido por el cuarto o el n^{esimo} excluido. Sólo que, si bien toda lógica necesita un principio de no-contradicción, no se deduce de ello que este deba ser forzosamente el mismo para todos los sistemas. Acabamos de ver cómo la introducción de modalidades distintas a 0 y 1 conducen a diferenciar el principio $(p.\bar{p} \leftrightarrow 0)$ según los diversos valores modales de p, o a privarse del mismo a falta de negación. Ahora bien, podría ocurrir que, independientemente de la modalidad, el principio $(p.\bar{p} \leftrightarrow 0)$ no fuese la única expresión posible de la no-contradicción.

Señalemos en primer lugar que existe una curiosa convergencia entre las construcciones lógicas derivadas de la formalización de las leyes microfísicas de la "complementariedad" y ciertas formas de la lógica intuicionista inspirada por el brouwerismo. La "complementariedad" de los físicos proporciona, en efecto, el ejemplo de proposiciones consideradas como contradictorias desde cierto punto de vista (el de la simultaneidad de las propiedades consideradas) y como no siéndolo desde otro punto de vista. Pese a que se trate de relaciones que interesan al contenido de las proposiciones y no a su forma, era no obstante esencial encontrar una forma lógica adaptable a dichos contenidos. A este trabajo se consagraron entre otros la señora Destouches-Février y J. L. Destouches. El aspecto más interesante de estas tentativas, en lo que concierne a la no-contradicción, fue el sustituir la noción de contradictorio por la de "incomponible" [1'], es decir, en cierto sentido de la incompatibilidad. Procediendo por pares de proposiciones componibles o incomponibles, pero todavía con operadores

1' "Incomposable": al no hallar equivalente en castellano, hemos optado por "incomponible" que designa: lo no susceptible de composición.

de negación, se tendió así no a negar todo valor al principio de no-contradicción, pero a trascenderlo en nombre de un juego complejo de composiciones permitidas o prohibidas.

Ahora bien, por una convergencia que es preciso remarcar, esta tendencia a devaluar el papel de la negación en provecho de la afirmación reúne las tendencias profundas de la matemática intuicionista la cual, por sus exigencias de constructibilidad y por su crítica de los razonamientos basados en la negación, se vio conducida ella misma a atenerse a la afirmción (§ 49). Es por ello que la señora Destouches menciona entre otras la lógica de Griss[1] como aplicable a la "complementariedad" física.

La conclusión que se extrae de esta coincidencia es pues nuevamente, desde el punto de vista lógico, que el esquema bivalente de lo verdadero y lo falso se demuestra impropio para adaptarse a todas las formas de la cantidad extensiva y que el principio $(p.\overline{p} = 0)$ no puede ser sino un de las formas particulares de la no-contradicción.

Ahora bien, junto a la crítica brouweriana del tercero excluido, los movimientos de ideas orientados en sentido exactamente inverso derivados de las investigaciones de Hilbert para demostrar la no-contradicción de la aritmética, determinaron una crisis que podría considerarse, nos parece, como una puesta en tela de juicio de la unicidad del mismo principio de no-contradicción, y no solamente de la naturaleza de las relaciones entre la lógica y la matemática.

Recordemos en primer lugar que, a diferencia de Russell y de los logicistas, Hilbert no buscó de ningún modo una reducción pura y simple de la matemática a la lógica. Para él, como para cualquier formalista, la tarea consistía en la construcción de sistemas formales de los cuales se tratase de demostrar la no-contradicción.

Ahora bien, considerables dificultades aparecieron inmediatamente. La demostración de la no-contradicción de un sistema formal apto para formalizar la aritmética no fue proporcionada sino por Gentzen en 1936[2]. Pero es preciso señalar que la prueba utiliza métodos no formalizables en el sistema. La razón de esta situación se explica por los famosos teoremas de Gödel[3], luego de los cuales puede decirse,

1 Destouches-Fevrier, 1948.
2 Gentzen, 1936.
3 Gödel, 1961.

intuitivamente, que una teoría no puede ser "saturada" por sus propios medios, ni *a fortiori*, por medios más débiles.

Esta situación supone dos interpretaciones posibles, pero contrarias. La interpretación dada por el esquema usual de la "forma" lógica y del "contenido" no formalizado todavía lógicamente, tendería a hacer de lo no-formalizable una realidad extralógica e incluso, en principio, a riesgo de paralogismo, escapando casi parcialmente a la jurisdicción considerada como absoluta, del principio de no-contradicción. Pero, puede concebirse también otra interpretación igualmente legítima: las estructuras aritméticas podrían muy bien constituir formas más ricas que las formas lógicas, las cuales no podrían abarcar así formas superiores a ellas, así como la parte no puede ser apta para integrar a sí el todo; en ese caso, la no-contradicción de la aritmética no podría demostrarse en la aritmética, no porque esta contuviese proposiciones ni verdaderas ni falsas (relativamente a las operaciones aritméticas mismas), sino porque la no-contradicción lógica sería insuficiente para aplicarse adecuadamente a la no-contradicción matemática.

La cuestión debe centrarse pues bien en la naturaleza de la no-contradicción lógica. Ahora bien, si el principio $(p.\overline{p} \leftrightarrow 0)$ es inatacable, no es tan seguro que agote lo no-contradictorio. No expresa sino una cierta forma de coherencia operatoria, ya que la significación formal de la negación $(\overline{p})$ en relación a la afirmación (p), es relativa al sistema de conjunto de las proposiciones consideradas. Si nos colocamos desde este punto de vista de las estructuras totales, es posible, en efecto, legítimamente, preguntarse si no existen grados en la coherencia de los sistemas de operaciones y en consecuencia en la no-contradicción misma. Un "grupo" matemático es más sistematizado que un "agrupamiento", y las clases "estructuradas" utilizadas por el primero, lo son mucho más que las clases "débilmente estructuradas" (definiciones 11-13) que intervienen en el segundo. Es posible entonces preguntarse si la no-contradicción $(p.\overline{p} \leftrightarrow 0)$ tiene el mismo valor en un sistema fuertemente estructurado que en un sistema menos estructurado. Para retomar un ejemplo anterior, ¿no supone una contradicción más "fuerte" sostener $(n-n) \neq 0$ que escribir "x es a la vez invertebrado y pez"?

Ahora bien, todo lo que hemos podido extraer del análisis de las estructuras de conjunto propias de la lógica bivalente, parece suge-

rirnos el alcance relativamente restringido del principio lógico de no-contradicción y el alcance mucho más amplio del mecanismo en que se fundamenta: el enunciado $(p.\bar{p} \leftrightarrow 0)$ constituye, en efecto, un caso particular de reversibilidad (anulación de una operación directa por su inversa), pero un caso limitado, en el ámbito de la lógica proposicional, a la sola complementariedad:

$$\bar{p} = 1 - p$$

Dicho de otro modo, la expresión $(p.\bar{p} \leftrightarrow 0)$ que abarca toda la no-contradicción lógica (lo contradictorio sería $p.\bar{p} \neq 0$) no es otra cosa sino la operación idéntica (general) del agrupamiento fundamental constituido por las operaciones $(\vee\, p)$ y $(.\, \bar{p})$, de las cuales, como vimos en el (§ 39), era posible derivar el conjunto de la lógica bivalente. Todas las demás formas más diferenciadas de no-contradicción correspondientes a las dieciseis operaciones binarias, por ejemplo:

$$[p \vee q]\cdot[\bar{p}\cdot\bar{q}] \leftrightarrow 0\,; \qquad [p \supset q]\cdot[p\cdot\bar{q}] \leftrightarrow 0\,; \text{ etc.}$$

no expresan sino el mismo valor nulo de las composiciones entre dos operaciones inversas precisamente porque son complementarias.

Dos realidades fundamentales, pero distintas, intervienen pues en la no-contradicción lógica. Una es general, y resulta apta entonces para adoptar cualquier otra forma aparte de la no-contradicción específicamente lógica: es la reversibilidad. Desde este punto de vista general, es contradictorio todo producto no nulo de dos operaciones de las cuales una es la inversa de la otra (ver § 40). La segunda realidad es, por el contrario, específica de la lógica: las operaciones inversas que intervienen en lógica proposicional no son relativas más que a un "agrupamiento", es decir a un sistema de simples complementariedades. Desde este punto de vista restringido, es contradictorio todo producto no nulo de dos operaciones de las cuales una es la complementaria de la otra.

Ahora bien, si de la lógica pasamos a la aritmética, reencontramos naturalmente ciertas estructuras que se derivan de la no-contradicción por simple complementariedad. Por ejemplo, si repartimos el conjunto de los números reales en dos subconjuntos complementarios, uno formado por los números racionales y el otro por los números irracionales,

la afirmación según la cual un número determinado puede pertenecer simultáneamente a esos dos subconjuntos, se derivará de una forma de no-contradicción equivalente a la no-contradicción lógica. Por el contrario, una expresión tal como $(n-n) \neq 0$ contiene una contradicción que es fácil descartar en nombre de la reversibilidad de las operaciones $(+n)$ y $(-n)$ sin que se derive no obstante de una complementariedad puramente lógica: la relación $(n-n)=0$, que traduce las operaciones inversa e idéntica del grupo aditivo de los números enteros, es así de una fuerza mucho mayor que la relación $(p.\bar{p}) \leftrightarrow 0$. No es pues sorprendente que no se pueda demostrar la no-contradicción de la aritmética por medio de la no-contradicción lógica: tal demostración equivaldría ni más ni menos a subordinar la estructura del grupo de los números enteros a la de los agrupamientos, dicho de otro modo, a reducir la cantidad extensiva e incluso numérica a la cantidad intensiva o simple relación de la parte al todo (ver definiciones 14-15 *bis*).

Podemos pues caracterizar la no-contradicción en general, por la nulidad del producto de una operación directa por su inversa:

(356) $$(\mathrm{Op})^{1} \times (\mathrm{Op})^{-1} = 0$$

donde 1 y -1 expresan las operaciones directas e inversas. Por el contrario, la no-contradicción lógica o por complementariedad se define, si $1 =$ el todo considerado T (ver § 39):

(357) $$\mathrm{Op}(P) \times \mathrm{Op}(1-P) = 0 \quad \text{ó} \quad (1-P) = \bar{P}$$

En esta proposición (357), la operación que interviene puede ser unitaria (afirmación o negación), binaria, etc., y P puede ser una proposición única (p) o compuesta $(p.q$, etc.).

Se advierte entonces la semejanza y la diferencia simultáneas entre las inferencias basadas en una estructura extensiva (específicas de la matemática) y las inferencias basadas en una estructura lógica intensiva. En ambos casos, la fecundidad del razonamiento proviene del hecho que las operaciones compuestas entre sí, engendran nuevas operaciones (en número finito o infinito). En ambos casos, la construcción es rigurosa en la medida en que es reversible, ya que la no-contradicción se define precisamente por la reversibilidad entera, es

decir por el valor nulo del producto de las operaciones directas e inversas (proposiciones (356) y (357)). La reversibilidad constituye pues el principio racional fundamental: ella asegura simultáneamente la identidad (operación nula) y la no-contradicción, superando por su propio dinamismo (es decir, al adoptar las diferentes formas de la negación, la reciprocidad, etc.) la expresión estática de esos dos principios clásicos.

Pero existen dos tipos de construcciones operatorias según conduzcan a sistemas más o menos fuertemente o débilmente estructurados, es decir con cuantificación extensiva o intensiva. En el caso de las estructuras débiles o intensivas, ninguna operación permite transformar las propiedades que caracterizan las sub-clases en aquellas que caracterizan el todo: este no constituye sino la reunión de las clases parciales y no su generalización operatoria por transformación de las relaciones en comprensión. Por el contrario, en el caso de las clases fuertes o extensivas, hay un pasaje de la parte a la parte y de la parte al todo, no por simple inclusión de la primera en el segundo, sino por composición operatoria de las propiedades que caracterizan el todo a partir de las que caracterizan las sub-clases. En ciertos casos, las propiedades del todo se reflejan incluso necesariamente sobre las de la parte, lo que hace más fácil aún la relación de las partes entre sí: tal es el caso de un grupo y sus sub-grupos. Pero, en todos los casos, el razonamiento matemático es más fecundo que la deducción simplemente lógica dado que procede por generalización constantemente operatoria tanto en el plano de la comprensión como en el de la extensión; por el contrario, el razonamiento lógico no matemático se reduce a una generalización que podría llamarse inclusiva, puesto que conduce a los encajes como tales basados en relaciones dadas, sin que estas se presten a una construcción en comprensión.

Sólo que, si bien la fecundidad del razonamiento matemático radica pues en el mayor número de composiciones operatorias que permiten las relaciones de parte a parte propias de la cantidad extensiva, su rigor se halla asegurado en cambio por la reversibilidad. En las axiomáticas mejor formalizadas se mantiene, en efecto, que además del principio lógico de no-contradicción (que constituye por sí solo un principio de reversibilidad), las operaciones caracterizadas por los axiomas y necesarias para la deducción de las proposiciones ulteriores, son siempre operaciones reversibles (según las distintas variedades que implica la reversibilidad).

Es por ello que, más allá de los principios demasiado pobres de la identidad y de la no-contradicción intensivos o bivalentes, la matemática se halla sin cesar garantida contra la incoherencia, incluso en aquellos puntos en que desborda el cuadro lógico en que quiso encerrársela. Pero, es por ello también que la lógica misma, si quiere conservar el contacto con el dinamismo real del pensamiento, debe reconocer en lo idéntico y en lo no-contradictorio por complementariedad, las primeras aproximaciones solamente de un principio regulador que los supera y que es la reversibilidad de los mecanismos operatorios en general. Como hemos ya visto (§ 49), sólo las operaciones que conducen a un infinito no construido pueden ser consideradas como sin retorno: pero esta irreversibilidad de hecho marca entonces los límites de la construcción operatoria, por oposición a la construcción racional misma, caracterizada siempre por una reversibilidad de derecho.

BIBLIOGRAFIA DE LAS OBRAS CITADAS

B A. BERNSTEIN, Operations with respect to which the elements of a Boolean algebra form a group. *Trans. Amer. Soc.*, 1924, 26, 171-175; 27, 600.

I. M. BOCHENSKI, *La logique de Théophraste*, Univ. de Fribourg, 1947.

—, On the categorical syllogism. *Dominican Studies*, 1948, 1, 1-23.

M. BOLL, *Manuel de logique scientifique*, 2e éd., Paris, Dunod, 1948.

G. BOOLE, *The mathematical analysis of logic. Cambridge*, 1847.

—, *An investigation of the laws of thought*. Londres, 1854.

N. BOURBAKI, Eléments de mathématiques. Paris, Hermann, 1939-1945 (Las citas corresponden al texto de la primera edición).

P. DESTOUCHES-FEVRIER, Logique de l'intuitionisme sans négation et logique de l'intuitionisme positif. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 1948, 226, 38-39.

G. FREGE, *Grundgesetze der Arithmetik*. Hildensleim, Georg olms, 1962 (2e éd.).

G. GENTZEN, Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. *Math. Ann.*, 1936, 112, 493-565.

Ed. GOBLOT, *Traité de logique*. Paris, A. Colin, 1918.

K. GÖDEL, Ueber formal unentscheitbare Sätze der « Principia Mathematica » und verwandter Cyteme. *Monatsch. Math. Phys.*, 1931, 38, 173-198.

F. GONSETH, *Les fondements des mathématiques*. Paris, Librairie Blanchard, 1926.

—, *Qu'est-ce que la logique?* Paris, Hermann, 1937.

G. G. GRANGER, Un problème d'axiomatisation en psychologie. *Logique et Analyse*, 1965 29, 72-83.

G.F.C. GRISS, Negatieloze intuitionistische wiskunde. K. Nederlandsche Ak. Wet., Verslagen, Afd. Natuurk., 1944, 53, 261-266 (con resúmen en francés).

J.-B. GRIZE, Du groupement au nombre : essai de formalisation. *Études d'épistémologie génétique*. XI. Paris, P. U. F., 1960, 69-96.

—, Des groupements á l'algébre de Boole. *Éudes d'epistémologie génétique*. XV. Paris, P. U. F., 1963, 25-63

—, Remarques sur l'èpistémologie mathématique des nombres naturels. *Logique et connaissance scientifique*. Encyclopédie de la Pléiade, Paris, NRF, 1967, 512-525.

J.B. GRIZE, *Logique moderne*. I. Paris, Gauthier-Villars et Mouton, 1969.

A. HEYTING, Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik. *Sitzberichte Preuss. Akad. Wiss.*, 1930, 42-56, 57-71, 158-169.

—, Formal logic and mathematics, *Synthèse*. VI, 1948.

D. HILBERT et W. ACKERMANN, *Gründzuge der theoretischen Logik*. 3e éd., Berlin, Springer, 1949.

G. JUVET, L'axiomatique et la théorie des groupes. *Actes Congrès Intern. Philos. scientif*. VI. Paris, Hermann, 1936.

L. LIARD, *Logique*. Paris, Masson, s. d.

J. NICOD, A reduction in the number of the primitive propositions of logic. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1917, 19, 32-41.

J. PIAGET, Le rôle de la tautologie dans la composition additive des classes et des relations *C. R. Soc. Phys. Hist. Nat. Genève*, 1941, 58, 102-107. Le groupement additif des relations asymétriques... *Ibid.*, 117-126. Sur les rapports entre les groupements additifs des classes et des relations asymétriques. *Ibid.*, 122-126. Les groupements de la classification complète... *Ibid.*, 149-154. Les groupements de la classification bi-univoque... *Ibid.*, 154-159. Les groupements de la multiplication co-univoque... *Ibid.*, 192-197. La fonction régulatrice du groupement. *Ibid.*, 198-203.

—, *Classes, relations et nombres.* Paris, Vrin, 1942.

— La psychologie de l'intelligence. Paris, A. Colin, 1947 (Reed 1965). (Traducción castellana en Ed. Psique, Buenos Aires, 1960-66-69).

—, Du rapport entre la logique des propositions et els « groupements » de classes et de relations, *Rev. Métaphys. Morale*, 1948, 53, 139-160.

— Introduction a l'épistémologie génétique. 3 vol., Paris, P.U.F., 1950. (Traducción castellana en Ed. Paidós, Biblioteca de Psicología Evolutiva, Serie 2, Volúmenes 10, 11 y 12)

—, *Essai sur les transformations des opérations logiques.* Les 256 opérations ternaires de la logique bivalente des propositions. Paris, P. U. F., 1952.

—, *Logique et connaissance scientifique.* Encyclopédie de la Pléiade. Paris, NRF, 1967.

—, *Etudes d'épistémologie génétique.* I. Paris, P. U. F., 1957.

— Le structuralisme. Paris, P.U.F., 1968. (Traducción castellana en Ed. Proteo, Buenos Aires, 1968).

H. POINCARÉ, *Dernières pensées.* Paris, Flammarion, 1913.

B. RUSSELL, *Introduction à la philosophie mathématique.* Paris, Payot, 1928 (Rééd. 1961).

Ch. SERRUS, *Traité de logique.* Paris, Aubier, 1945.

H. M. SHEFFER, A set of five independent postulates for Boolean algebras, with application to logical constant. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1913, 14, 481-488.

R. WAVRE, Y a-t-il une crise des mathématiques? *Rev. Métaphys. Morale*, 1924, 445-470.

A. N. WHITEHEAD et B. RUSSELL, *Principia Mathematica*, 3 vol., 2e éd., Cambridge Univ. Press, 1925-1927.

K. G. WITZ, On the structure of Piaget's grouping I *Archves de psychologie* (Genève).

INDICE DE TEMAS

